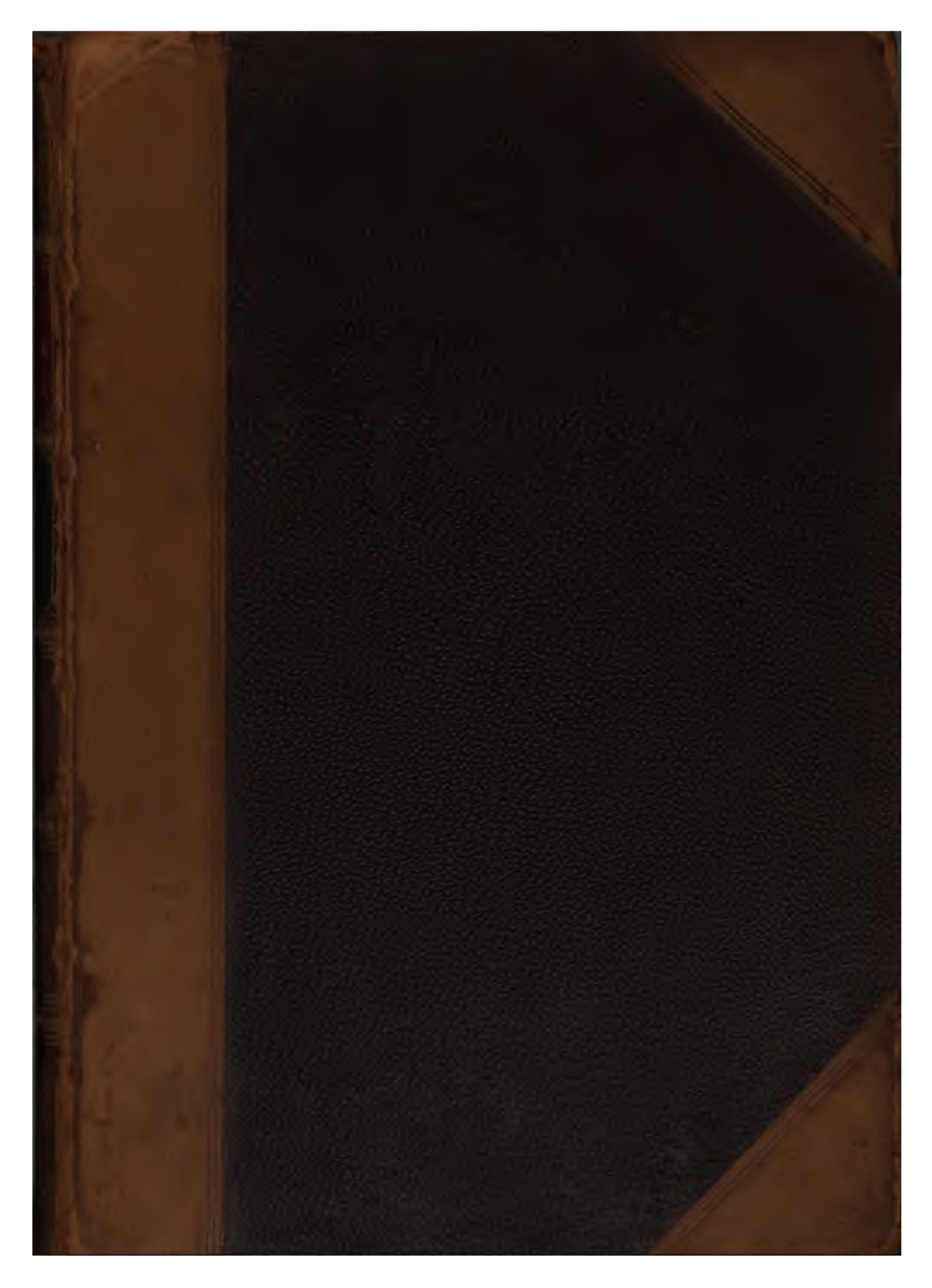



600015366R


PRESS
SHELF
Nº





HANDBUCH

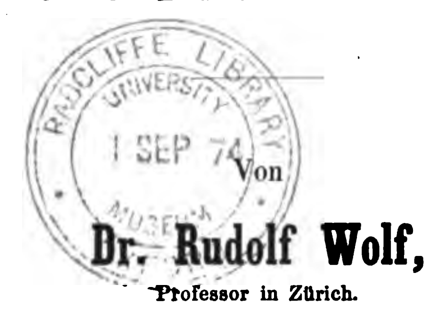
der

Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie.

HANDBUCH

der

Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie.



Von

Dr. Rudolf Wolf,

Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

In zwei Bänden.

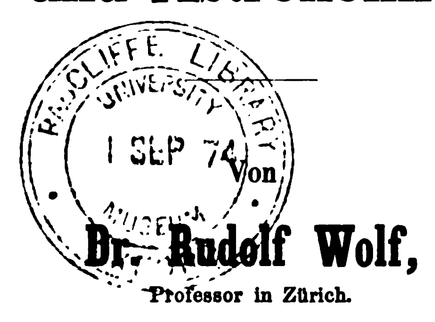
Erster Band.

Zürich.
Druck und Verlag von Friedrich Schulthess.
1869.

HANDBUCH

der

Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie.



Von

Dr. Rudolf Wolf,

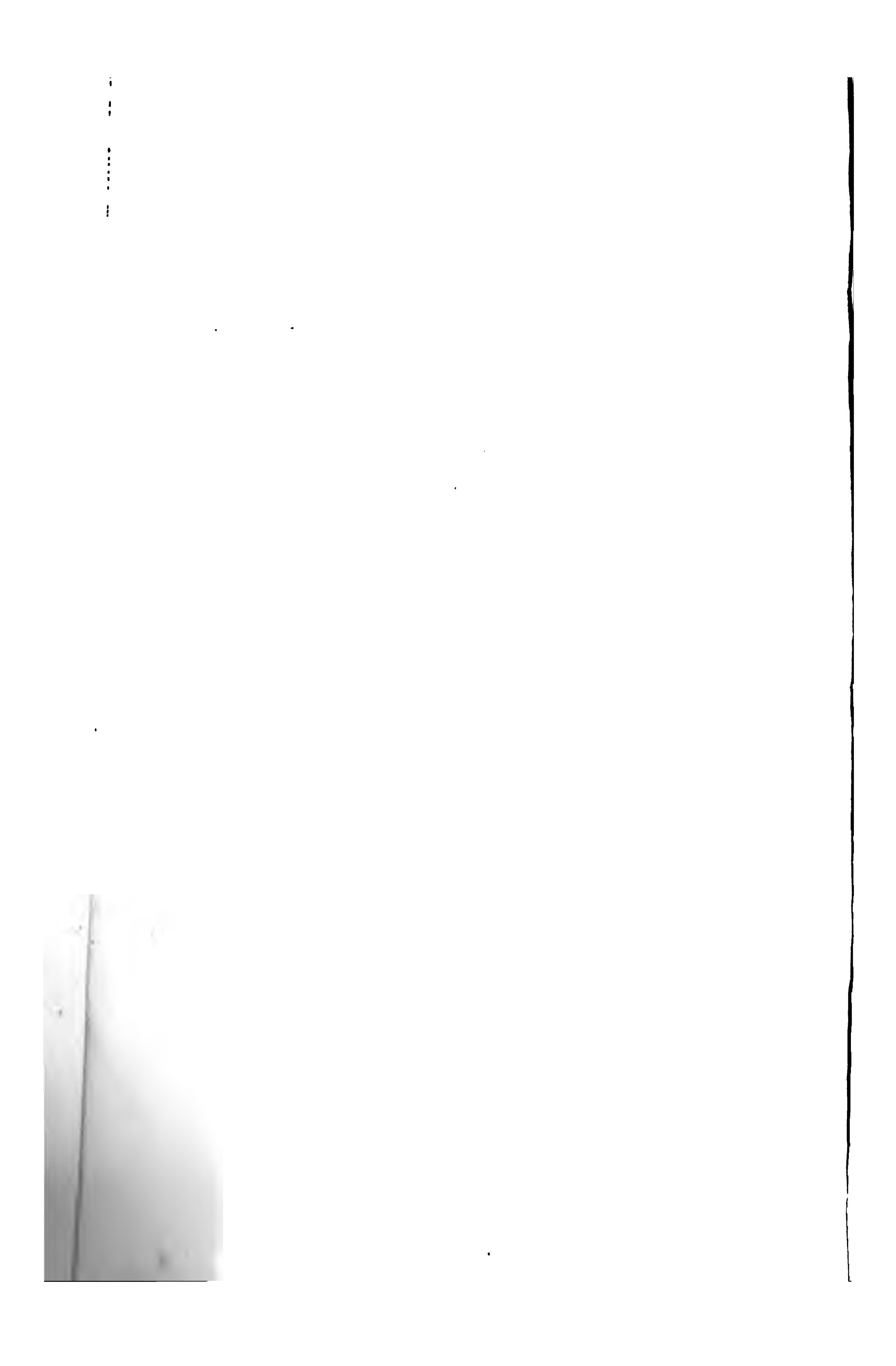
Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

In zwei Bänden.

Erster Band.

Zürich.
Druck und Verlag von Friedrich Schulthess.
1869.



Vorwort.

Als ich vor zwei Jahren im Vorworte zur vierten Auflage meines Taschenbuches den Entschluss ankündigte, „demnächst in gleicher Anlage ein auf zwei Octavbände berechnetes Handbuch zu publiciren, das ausser dem Inhalte des Taschenbuches und den sein Verständniss erleichternden Entwicklungen und Beispielen, auch sonst vielfache Zusätze und historisch-literarische Notizen enthalten solle“, verhehlte ich mir keineswegs die fast unüberwindliche Schwierigkeit, dem mir vorschwebenden Ideale auch nur annähernd gerecht zu werden. Wenn ich es dennoch unternahm, so geschah es in der Hoffnung, dass ich immerhin vielen Freunden der mathematischen Wissenschaften mit meinem Versuche einen Dienst erweisen, und die Kritik nicht übersehen werde, dass es kaum möglich sein dürfte, auf den ersten Wurf eine solche Aufgabe nach allen Theilen befriedigend zu lösen. — Gelingt es meinem Buche, sich Eingang zu verschaffen, so kann ich jetzt schon versprechen, dass eine allfällig nöthig werdende spätere Auflage allseitig vollkommener werden soll, — dass ich mich namentlich bestreben werde, das Ganze homogener zu machen, manche den neuesten Fortschritten der Wissenschaft noch nicht ganz entsprechende Darstellung umzuarbeiten, die historischen und literarischen Nachweise zu vervollständigen und besser einzuordnen, — und vor Allem aus Lücken oder Unrichtigkeiten, deren ich

selbst jetzt schon gar manche kenne, und auf welche ich auch durch sachliche Kritiken aufmerksam gemacht zu werden hoffe, auszufüllen und zu heben. — Ich schreibe dieses selbst auf die Gefahr hin, dass irgend ein Recensent, wie es mir schon einmal passirt ist, anstatt mein Buch zu lesen, das Gute zu würdigen und zur Verbesserung des Mangelhaften einige freundliche Winke zu geben, — es bequemer finde, diese Selbstkritik einfach in ein von ihm herkommendes Urtheil umzuschreiben, wodurch natürlich der Sinn ganz ein Anderer wird.

Zum Schlusse kann ich nicht umhin, meinem Assistenten, Herrn Weilenmann, für seine unermüdliche Hülfe bei den Correcturen, — und dem Herrn Verleger für sein bereitwilliges Eingehen auf alle meine Wünsche den besten Dank auszusprechen.

Zürich, im December 1870.

Rudolf Wolf.

Inhalt.

A. Arithmetik.

B. Geometrie.

C. Mechanik.

D. Physik.

Tafeln.

Mathematik und Physik.

Die Arithmetik.

L'art d'enseigner, c'est l'art d'indiquer aux autres ce qu'ils doivent faire pour s'instruire.
(Jacotot.)

I. Einleitung.

1. Aufgabe der Mathematik und Physik. Was eines **mehr** und **minder** fähig ist, heisst **Grösse**, — die Lehre von den Grössen **Mathematik.** Die Grössen können entweder ganz abstrakt oder in Raum und Zeit betrachtet werden, und entsprechend theilt sich die Mathematik in **Arithmetik**, **Geometrie** und **Mechanik**, je nachdem sie sich die Aufgabe stellt, die Eigenschaften der sog. **Zahlen** (5), die Regeln für das Operiren mit denselben und die Gesetze ihrer Beziehungen zu entwickeln, — oder die **Raumgebilde** (73) nach ihrer Entstehung, organischen Beschaffenheit und Verwandtschaft zu betrachten, — oder endlich die durch sog. **Kräfte** (227) sei es bloss versuchten, sei es in bestimmter Zeit bewirkten Bewegungen zu studiren. Sowie diese Kräfte specialisirt, und, sowohl ihnen, als den Gebilden, auf welche sie wirken, bestimmte in der Natur vorkommende, durch Beobachtungen oder Versuche ermittelte Gesetze und Eigenschaften (245) zugetheilt werden, tritt man aus dem Gebiete der reinen Mathematik in das der **Physik** über.

Der Name **Mathematik** hat strenge genommen keine unmittelbare Beziehung auf die Grössenlehre, da *μάθησις*, *μάθημα* überhaupt Kenntniss, Wissenschaft bezeichnen; jedoch verstanden schon die Alten unter *μαθήματα* vorzugsweise die jetzt so genannten mathematischen Wissenschaften. Unter **Physik**, *θεωρία φυσικὴ*, verstand man früher die ganze Naturwissenschaft; später lösten sich die naturhistorischen Fächer, ja in der neuesten Zeit sogar Chemie und Astronomie von ihr ab.

2. Die älteste Zeit. Die Verrichtung des Zählens, die Einführung von Buchstaben oder Kerben als Zahlzeichen, und die einfachsten bürgerlichen Rechnungsarten datiren muthmasslich aus vorhistorischer Zeit, — dagegen die Anfänge einer wissenschaftlichen Arithmetik

(sei es von den spätern Indiern, sei es von den Alexandrinern Euklid bis Diophant) erst aus der Blüthezeit alter Wissenschaft, — die Ausführung grösserer numerischer Rechnungen aber von der glücklichen Idee der Indier, Zahlzeichen mit Stellenwerth anzuwenden. — Die Geometrie entwickelte sich zunächst aus dem Feldmessen, und erst Euklid ordnete ihre Elemente zu einem wissenschaftlichen Gebäude, während Plato und Apollonius die Lehre vom geometrischen Orte und speciell die sog. Kegelschnitte cultivirten, ja Archimedes bei Rectification des Kreises und Quadratur der Parabel bereits die Grundzüge der höhern Geometrie entwarf, sowie durch Aufstellung der Lehre vom Hebel und der hydrostatischen Grundgesetze die vor ihm trotz Aristoteles kaum existirende Mechanik und Physik schuf. — Die Araber bildeten die Trigonometrie aus, und überlieferten dieselbe mit den indischen Ziffern und den mathematischen Kenntnissen der Griechen dem Abendlande, wo Fibonacci, Christoph Rudolph, etc. dieselben einbürgerten, während durch Einführung des Compasses, der Brillenfabrication, der Construction von Gewichtuhren etc., auch Mechanik und Physik daselbst nach und nach etwas Boden gewannen (XX).

Im Allgemeinen für historischen Detail auf die einzelnen Abschnitte verweisend, mag hier noch Folgendes beigefügt werden: **Euklid**, der um 300 v. Chr. einer mathematischen Schule zu Alexandrien vorstand, schrieb sog. „Elemente" der Mathematik, welche seit Entdeckung der Buchdruckerkunst unzählig oft und fast in allen Sprachen aufgelegt wurden, namentlich in der Ursprache von Simon **Grynäus** (Vehringen 1493 — Basel 1541; Professor der Theologie in Basel) „*Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιε.* Basil. 1533 in fol.", und wieder von François **Peyrard** (Vial 1760 — Paris 1822; Professor der Mathematik und Bibliothekar in Paris) „Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français. Paris 1814—1818, 3 Vol. in 4." — **Diophant** lebte um 160 n. Chr. in Alexandrien. Seine uns erhaltenen sechs Bücher „*Ἀριθμητικῶν*" erhielten durch Wilhelm Holtzmann oder **Xylander** (Augsburg 1532 — Heidelberg 1576; Professor der griechischen Sprache zu Heidelberg) eine erste lateinische Ausgabe „Diophanti rerum arithmeticarum libri VI. Basil. 1575 in fol.", und durch den Jesuiten Claude-Gaspard **Bachet** (Bourg-en-Bresse 1587 — Paris 1638; Professor der Rhetorik zu Mailand) eine erste Originalausgabe „Diophanti Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus; gr. et lat. Lutetiæ 1621 in fol." — **Plato** (Athen 429 — Athen 348 v. Chr.) war erst Schüler von Sokrates, dann Gründer einer nach ihm benannten Philosophenschule. Seine zahlreichen Werke enthalten Einzelnes die Mathematik, Physik und Astronomie Betreffendes; doch scheint er nach diesen Richtungen mehr durch Anregung, als durch eigene Schriften geleistet zu haben. — **Apollonius** von Perga, um 200 v. Chr. in Alexandrien lebend, hinterliess zahlreiche geometrische Werke, von welchen jedoch die Meisten nur in den Bruchstücken existiren, welche der fleissige, um 390 n. Chr. in Alexandrien florirende **Pappos** in seine „*Μαθηματικαὶ Συναγωγαί*" aufnahm. Von diesen Sammlungen veranstaltete Federigo **Commandino** (Urbino 1509 — Urbino 1575; Mathematiker

und Arzt in Urbino und Rom) eine lateinische Ausgabe „Pappi Alexandrini collectionum mathematicarum libri VI superstites. Pisauri 1588 in fol. (Auch Bononiæ 1660)“, und mit ihrer Hülfe gelang es sodann Edmund **Halley** (Haggerston bei London 1656 — Greenwich 1742; Professor der Geometrie zu Oxford und später Director der Sternwarte zu Greenwich; vergl. Mairan, Eloge d'Edmond Halley in Mem. de Par. 1742) seine berühmte Ausgabe „Apollonii Pergæi conicorum libri VIII. Oxonii 1710 in fol. (Deutsch von Balsam, Berlin 1861 in 8.)“, — Robert **Simson** (Kirton-Hall 1687 — Glasgow 1768; Professor der Mathematik zu Glasgow) seine Schrift „The loci plani of Apollonius restored. Edinburgh 1749 in 4. (Deutsch von Camerer, Leipzig 1796), — etc. zu Stande zu bringen. — **Archimedes** (Syracus 287 — Syracus 212 v. Chr.; vergl. Melot, Recherches sur la vie d'Archimède in Vol. 14 der Mém. de l'Acad. des inscript.) schrieb tiefsinnige Werke über fast alle damals existirenden Theile der reinen und angewandten Mathematik, von denen Thomas Gechauf oder **Venatorius** (ein Schüler von Schoner) eine erste Originalausgabe „Archimedis opera, quæ quidem extant omnia; gr. et lat., cum Eutocii commentariis. Basileæ 1544 in fol.“, — Giuseppe **Torelli** (Verona 1721 — Verona 1781; Privatgelehrter) aber die als Beste betrachtete Originalausgabe „*Αρχιμηδους τα σωζομενα μετα των Ευτοκιου ὑπομνηματων*. Cum nova versione latina. Oxonii 1792 in fol.“, — der schon genannte Peyrard endlich (Paris 1807 in 4.; 2 éd. 1808, 2 Vol. in 8.) eine französische Ausgabe besorgte. — **Aristoteles** (Stagira in Macedonien 384 — Chalcis auf Euboea 322 v. Chr.; Arzt und Philosoph zu Athen, Schüler Plato's und Lehrer Alexanders des Grossen), stiftete die sog. peripatetische Schule und war zugleich ein sehr fruchtbarer Schriftsteller. Neben zahlreichen Gesammtausgaben seiner Schriften, von denen die 1831 von der Berliner-Academie veranstaltete zu den besten zählen soll, wurden auch wiederholt einzelne seiner Werke unter die Presse gebracht; so erschienen z. B. „Aristotelis meteorologicorum libri IV; gr. et lat. curavit J. L. Ideler. Lipsiæ 1834—1836, 2 Vol. in 8., — Aristoteles acht Bücher Physik. Griechisch und Deutsch mit sacherklärenden Anmerkungen von C. Prantl. Leipzig 1854 in 8., — etc.“ — Nachdem um 640 der Kalife **Omar** die Academie in Alexandrien zerstört und die mit ihr verbundene Bibliothek zum Heizen der Bäder missbraucht hatte, begannen die mathematischen Wissenschaften unter dem Patronate eines Sohnes von Harun al Raschid, des Kalifen Abdallah **Almamun** (Bagdad 786 — Tarsus 833), und seiner nächsten Nachfolger neu zu blühen; Dank dem um 820 in Bagdad lebenden **Mohammed** ben Musa Alkharezmi, dessen Algebra erst neuerlich (London 1831 in 8.) von Fr. Rosen publicirt wurde, — dem etwa 840 geborenen und 901 verstorbenen **Thebit** ben Corah, einem der fruchtbarsten arabischen Schriftsteller, in dessen Werken manche Bruchstücke der alten Geometer erhalten wurden, — dem bald in Mesopotamien bald in Syrien lebenden, etwa 928 verstorbenen Mohammed ben Geber Albatani oder **Albategnius**, der seine Zeitgenossen in Archimedes einzuführen suchte, — etc., machten sie sogar, namentlich in den für Anwendungen wichtigern Partien, nicht unerhebliche Fortschritte, und erleichterten sich dadurch ihren allmäligen, durchschnittlich auf das 12. Jahrhundert zu setzenden Einzug in's Abendland. Der erste christliche Schriftsteller auf diesem Gebiete scheint der Kaufmann Leonardo **Fibonacci** aus Pisa oder Leonardo Pisano gewesen zu sein, der um 1202 ein „Liber Abaci“ und um 1220 eine „Practica Geometriæ“ verfasste; vergl. seine „Opuscoli pubblicati da Bald. Boncompagni. Firenze 1856 in 8.“

Dann folgte z. B. der etwa 1348 als Bischof von Geraci in Neapel verstorbene **Barlaam** mit seiner „Logistica", — der um 1500 als Lehrer der Mathematik in Rom lebende Minorite Luca **Pacioli** de Burgo mit seiner „Summa de Arithmetica e Geometria", — der (s. 322) ganz besonders auch um die Astronomie hochverdiente Johannes Müller, genannt **Regiomontan** oder Kungsperger (Königsberg in Franken 1436 — Rom 1476) mit seiner Schrift „De triangulis planis et sphæricis libri quinque (Venetiis 1533 in fol.)", — etc., ganz besonders aber auch Christoph **Rudolff.** Dieser merkwürdige Mann, der etwa 1499 zu Jauer in Schlesien geboren wurde, gab 1524 eine „Coss" in Druck, — 1526, wo er zu Wien lebte, eine „Künstliche rechnung mit der ziffer und mit den zalpfenningen, sampt der Wellischen Practica, und allerley forteyl auf die Regel de Tri", — zwei Schriften, auf welche wir noch wiederholt (z. B. 13, 24, 25, etc.) zurückkommen werden; von Letzterer erschien nachmals 1540 bei Johann Petreo zu Nürnberg eine zweite Auflage, — während von Ersterer der damals schon durch seine „Arithmetica integra. Norimb. 1544 in 4.", und seine „Deutsche Arithmetica. Inhaltend die Haussrechnung, deutsche Coss, Kirchrechnung. Nürnberg 1544 in 4." selbst rühmlich bekannte Michael **Stifel** (Esslingen 1487 — Jena 1567; erst Mönch, dann protestantischer Pfarrer, zuletzt Professor der Mathematik zu Jena; vergl. Cantor in Schlömilch II) eine neue Ausgabe (Königsberg 1554 in 4.) besorgte. — Für diese älteste Zeit sind ausser einigen schon genannten und den unter 3 und 4 aufgeführten allgemeinen Werken, z. B. folgende Schriften zu berathen: „Georg Christoph **Hamberger** (Feuchtwangen 1726 — Göttingen 1773; Professor der Literaturgeschichte zu Göttingen), Zuverlässige Nachrichten von den vornehmsten Schriftstellern vom Anfange der Welt bis 1500. Lemgo 1756—1764, 4 Bde. in 8., — Pietro **Cossali** (Verona 1748 — Padua 1815; Professor der Mathematik und Physik zu Parma und Padua), Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra. Parma 1796—1799, 2 Vol. in 4., — Ludwig **Lüders** (Hannover 1776 — Altenburg? 1822; Kammersecretär in Altenburg), Pythagoras und Hypatia. Altenburg 1809 in 8. (2. A. 1811, auch unter dem Titel: Geschichte der Mathematik bei den alten Völkern), — Guglielmo **Libri** (Florenz 1803; Professor der Mathematik zu Pisa und Paris, Mitglied der Academie; seit 1848 flüchtig, und für Diebstahl von Büchern und Handschriften im Werthe von $^1/_2$ Million verurtheilt), Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris 1837—1841, 4 Vol. in 8., — Georg Heinrich Ferdinand **Nesselmann** (Fürstenau 1811; Professor der orientalischen Sprachen in Königsberg), Die Algebra der Griechen. Berlin 1842 in 8., — Moritz **Cantor.** Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863 in 8., — etc."

8. Die mittlere Zeit. Die Entstehung zahlreicher hoher Schulen, die Erfindung der Buchdruckerkunst, die Entdeckung von Amerika und des Seeweges nach Indien, und der mit dem 15. Jahrhundert nach allen Richtungen beginnende Aufschwung beförderten auch die Entwicklung der Mathematik und Physik: Vieta und Harriot führten die Buchstabenrechnung, Stevin und Brouncker die Decimal- und Kettenbrüche ein, — Tartaglia und Cardano bearbeiteten die Lehre von den Gleichungen, — Fermat schuf die Zahlentheorie, — Napier, Bürgi und Briggs erfanden und berechneten die Logarithmen, — Nic. Mercator und Wallis erweiterten die Lehre von den Reihen, —

Hugens, Jak. Bernoulli und Moivre studirten die Probabilitäten, — etc. Anderseits gab Descartes der Geometrie durch Einführung der Coordinaten einen neuen Impuls, und veranlasste dadurch mittelbar die Arbeiten der Pascal, Hugens und Barrow auf dem Gebiete der Curvenlehre, welche hinwieder der Theorie der Functionen die Bahn brachen, die in den Händen der Newton, Leibnitz und der ältern Bernoulli sich rasch entwickelte, und zur Lösung der schwierigsten Probleme auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik führte. — Stevin und Varignon erweiterten durch Einführung der Principien der schiefen Ebene und des Kräftenparallelogrammes die Statik, während Galilei und Hugens durch Feststellung der Gesetze des freien Falles, der Pendelschwingungen und der Centralbewegung die Dynamik schufen; Torricelli erfand den Barometer, während Ferdinand II. von Toskana dem Luftthermometer Galilei's ein Weingeistthermometer in jetzt gebräuchlicher Form substituirte, — Rob. Boyle stellte das den Namen Mariotte's tragende Gesetz auf, — Otto von Guerike construirte die Luftpumpe und eine erste Elektrisirmaschine, — die Brillenmacher Jansen und Lippershey stellten ein Mikroskop und das holländische, Keppler das astronomische Fernrohr, Zucchius das Spiegelteleskop her, — Georg Hartmann fügte der schon vor Columbus bekannten Declination der Magnetnadel die Inclination bei, — Snellius bestimmte das Grundgesetz der Dioptrik, Barrow die Linsengesetze, Römer die Geschwindigkeit des Lichtes, — Grimaldi fand die Beugung, Bartholinus die doppelte Brechung, Newton die Farbenzerstreuung, und des Letztern mathematische Principien der Naturphilosophie bildeten den würdigen Abschluss dieser langen Reihe ausgezeichneter Forschungen und Entdeckungen [XX].

Auch hier im Allgemeinen für historischen Detail auf die einzelnen Abschnitte verweisend, mag Obigem noch Folgendes beigefügt werden: Für François Viète oder **Vieta** (Fontenay 1540 — Paris 1603; maître des requêtes am Hofe von Henri IV.) sind seine durch Vater und Sohn Frans van **Schooten** (Vater 1581—1646, Sohn 16..—1661; beide folgeweise Professoren der Mathematik in Leyden) gesammelten und herausgegebenen „Opera mathematica. Lugd. Batav. 1646 in fol.", so wie „Allégret, Eloge de Viète. Poitiers 1867 in 8." zu vergleichen. — Thomas **Harriot** (Oxford 1560 — London 1621) vermass in Diensten von Sir Walter Raleigh die Colonie in Virginien, und lebte später als Pensionär des Grafen von Northumberland in London. Ausser auf sein Hauptwerk „Artis analyticæ praxis ad æquationes algebraicas resolvendas. Londini 1631 in fol." ist für ihn namentlich auf das 1833 erschienene Supplement zu den „Miscellaneous Works and Correspondence of the Rev. James Bradley. Oxford 1832 in 4." zu verweisen. — Simon **Stevin** (Brügge 1548 — Haag 1620) war erst Steuerverwalter in Brügge, dann Oberaufseher der Land- und Wasserbauwerke in Holland. Vergl. für ihn „Stevin, Oeuvres

mathématiques revues par A. Girard; Leyde 1634 in fol., — Steichen, Vie et travaux de Simon Stevin. Bruxelles 1846 in 8." — William **Brouncker** (Castle Lyons 1620 — London 1684) war Kanzler Karl II. und erster Präsident der Royal Society. — Niccola **Tartaglia** (Brescia 1506 — Venedig 1559) war ein Autodidakt, der an verschiedenen Orten Italiens und zuletzt in Venedig Mathematik lehrte. Von seinen Werken wird ganz besonders der, leider durch seinen frühen Tod unvollendet gebliebene „Trattato de numeri e misure. Venesia 1556—1560 in fol." hochgeschätzt. — Geronimo **Cardano** (Pavia 1501 — Rom 1576) war Professor der Mathematik in Mailand, sodann der Medizin in Pavia und Bologna, zuletzt päpstlicher Pensionär in Rom. Seine zahlreichen, jedoch grossentheils medizinischen Traktate sind in den „Opera Cardani. Lugd. 1663, 10 Vol. in fol." gesammelt. Vergl. für ihn „Cardano, De vita propria. Paris 1643 in 8. (Ital. durch V. Mantovano, Milano 1820 in 8.), — Morley, The life of G. Cardano. London 1854, 2 Vol." — Pierre **Fermat** (Beaumont de Lomagne bei Toulouse 1608 — Toulouse 1665) war Rath am Parlamente zu Toulouse. Vergl. für ihn die von seinem Sohne Samuel (1630—1690) publicirten „Varia opera mathematica D. P. de Fermat; Tolosæ 1679 (Friedländer 1861) in fol.", und „E. Brassine, Précis des œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'arithmétique de Diophante; Paris 1853 in 8." — John **Napier** oder Neper wurde 1550 geboren, — lebte, abgesehen von einer grössern Reise nach Deutschland, Frankreich und Italien, fast ununterbrochen, und starb auch 1617, auf seinem Stammschlosse Merchiston-Castle bei Edinburgh. Vergl. die von Mark Napier herausgegebenen „Memoirs of John Napier of Merchiston, his lineage, life and times, with a history of the invention of logarithms. London 1834 in 4." — Joost **Bürgi** (Lichtensteig 1552 — Kassel 1632), Erfinder des von Galilei's (die Form eines Zollstabes besitzenden) Proportionalzirkel wohl zu unterscheidenden, in einem Doppelzirkel mit beweglichem Kopfe bestehenden Reductionszirkels, war Hofuhrenmacher und Observator Wilhelm IV. von Hessen und Kaiser Rudolf II. Vergl. für ihn Bd. 1 meiner „Biographien zur Culturgeschichte der Schweiz; Zürich 1858—1862, 4 Bde. in 8." — Henry **Briggs** (Warley Wood 1556 — Oxford 1630) war Professor der Mathematik in London und Oxford. Seine „Arithmetica logarithmica. London 1624 in fol.", welche die gemeinen oder eben nach ihm sog. Brigg'schen Logarithmen (s. 14) für alle Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 auf 14 Dezimalen gibt, war die erste etwas vollständige Logarithmentafel. — Nikolaus Kaufmann oder **Mercator** (Holstein 16.. — Paris 1687) hielt sich erst lange in Kopenhagen auf, lebte dann als Mitglied der Royal Society in London, und half schliesslich in französischen Diensten bei Anlage der Wasserwerke in Versailles. Von seinen Schriften ist die „Logarithmotechnia. London 1668 in 4." am Bekanntesten. — John **Wallis** (Ashford in Kent 1616 — Oxford 1703) war erst Prediger in London, dann Professor der Geometrie zu Oxford, später Caplan Karl II. und Mitglied der Royal Society. Vergl. seine „Opera mathematica et grammatica. Oxoniæ 1695—1699, 3 Vol. in fol." — Christian Huyghens oder **Hugens** (Haag 1629 — Haag 1695) machte nach Abschluss juridischer Studien grosse Reisen, lebte von 1666 bis zur Aufhebung des Edicts von Nantes im Jahre 1681, als Mitglied der neu gegründeten Academie der Wissenschaften, in Paris, und privatisirte sodann in seiner Vaterstadt. Vergl. seine „Opera varia, Lugd. 1682 in 4, — Opuscula posthuma, Lugd. 1703 in 4., — Opera reliqua, Amstel. 1728 in 4., — Exercitationes mathematicæ et philosophicæ; ed. P. J. Uylenbroek; Hagæ 1833 in 4., — P. Harting, Chr. Huygens

in zijn leven en werken; Gron. 1868 in 8." — Jakob **Bernoulli** (Basel 1654 — Basel 1705), Urenkel eines von Antwerpen wegen Alba's Religionsverfolgungen nach Frankfurt geflüchteten, und Enkel eines von da nach Basel übergesiedelten Kaufmannes gleichen Namens, war Professor der Mathematik in Basel. Er erwarb sich durch seine Studien über die Isoperimetrie, die logarithmische Spirale, — durch seine „Ars conjectandi, Basil. 1713 in 4.", welche sein Schüler und Neffe Nikolaus (Basel 1687 — Basel 1759; Professor der Mathematik in Padua und dann der Rechte in Basel) zum Drucke besorgte, — und überhaupt durch eine Menge tiefsinniger Abhandlungen, von denen die meisten durch Gabr. Cramer (s. 4) in den „Jac. Bernoulli Opera. Genevæ 1744, 2 Vol. in 4." gesammelt wurden, grossen Ruhm; auch war er der Lehrer seines Bruders Johannes (Basel 1667 — Basel 1748; Professor der Mathematik in Gröningen und Basel), und stand wie dieser mit Leibnitz in vielfachem Verkehr. Johannes war der erste Bearbeiter der Exponentialgrössen, der Lehrer von Hospital, Euler, Cramer, etc., und vor Allem von seinen drei eigenen Söhnen: Nikolaus II. (Basel 1695 — Petersburg 1726; Professor der Rechte in Bern und dann Academiker in Petersburg), — Daniel (Gröningen 1700 — Basel 1782; erst Academiker in Petersburg, dann Professor der Anatomie und Botanik, zuletzt der Physik in Basel), Freund und Rivale von Euler, Verfasser der Hydrodynamica, und einer der Gründer der mathematischen Physik, — und Johannes II. (Basel 1710 — Basel 1790; Professor der Eloquenz und Mathematik in Basel), der wie Vater, Oheim und Bruder Daniel auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie war; seine zahlreichen Abhandlungen wurden durch Gabr. Cramer (s. 4) in den „Joh. Bernoullii opera omnia; Lausannæ 1742, 4 Vol. in 4." gesammelt. Noch bei den Söhnen von Johannes II.: Johannes III. (Basel 1744 — Köpnick bei Berlin 1807; Director der Sternwarte und später der mathematischen Classe der Berliner-Academie), — Daniel II. (Basel 1751 — Basel 1834; Professor der Eloquenz und später Domschaffner in Basel), — und Jakob II. (Basel 1759 — Petersburg 1789; Academiker in Petersburg), — zeigte sich wissenschaftliches Talent; ja sogar der vierte Grad wurde durch einen Sohn Daniel II.: Christoph (Basel 1782 — Basel 1863; Professor der Naturgeschichte zu Basel), der zur Zeit als technologischer Schriftsteller und Mineraloge grosse Verdienste hatte, würdig repräsentirt, und es steht diese Familie, für deren genauere Kenntniss ich auf sämmtliche 4 Bände meiner schon oben erwähnten Biographien, — auf die zum 4. Jubiläum der Basler Hochschule erschienene Festschrift „Pet. Merian, Die Mathematiker Bernoulli; Basel 1860 in 4.", — und auf die academischen Lobreden der Fontenelle, Formey, Fouchy, Goldbach und Condorcet (Mém. de Par. 1705, 1748, 1782; Mém. de Berl. 1747; Comm. Acad. Petr. 2; Nova Acta Petr. 7) zu verweisen habe, wohl als ein Unicum in der Gelehrtenwelt da. — Abraham de **Moivre** (Vitry in der Champagne 1667 — London 1754) verliess nach Aufhebung des Edicts von Nantes als Protestant sein Vaterland, und lebte als Privatlehrer der Mathematik in London, wo er in die Royal Society aufgenommen wurde. Vergl. seine „Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini 1730 in 4.", sowie sein Eloge durch Grandjean de Fouchy in Mém. de Par. 1754. — René **Descartes** oder Cartesius (La Haye en Touraine 1596 — Stockholm 1650) brachte seine Jugend auf Reisen und in Kriegsdiensten zu, privatisirte von 1629 bis 1649 in Holland, und folgte zuletzt einem Rufe der Königin Christine an ihren Hof. Seine Verdienste um die Naturphilosophie im Allgemeinen sind zweifelhaft, dagegen diejenigen um Geometrie

und Optik sehr bedeutend, und von seinen zahlreichen Werken (Opera; Amstel. 1692—1701, 10 Vol. in 4., — Oeuvres, par Cousin; Paris 1831, 11 Vol. in 8.) ist unbedingt sein „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences; plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie. Leyde 1637 in 4 (Lat. durch Fr. a Schooten, Lugd. Bat. 1649)“ am wichtigsten. Vergl. auch seine „Lettres. Paris 1657—1659, 2 Vol. in 4.“, und „Jacobi, Ueber Descartes Leben. Berlin 1846 in 8.“ — Blaise **Pascal** (Clermont-Ferrand 1623 — Paris 1662) lebte ohne öffentliches Amt abwechselnd in Clermont, Rouen und Paris. Vergl. seine von Charles **Bossut** (Tartaras im Dép. du Rhône 1730 — Paris 1814; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris) herausgegebenen mathematischen und philosophischen „Oeuvres. Paris 1779, 5 Vol. in 8. (2 éd. 1819 in 6 Vol.)“, — ferner „Bossut, Discours sur la vie et les ouvrages de Pascal. Paris 1781 in 8., — Reymond, Eloge de Blaise Pascal, accompagné de notes historiques et critiques. Toulouse 1816 in 8. (Auch Lyon 1817), — Faugère, Génie et écrits de Pascal. Paris 1847 in 8., — Vinet, Etudes sur Blaise Pascal. Paris 1848 in 8., — etc.“ — Jsaac **Barrow** (London 1630 — London 1677) war Dr. Theolog., Professor der Mathematik zu London und später zu Cambridge, — schliesslich, nachdem er 1669 letztere Stelle zu Gunsten von Newton niedergelegt hatte, Caplan Karl II. Am Bekanntesten sind seine schon 1669 und 1670 einzeln publicirten „Lectiones opticæ et geometricæ: In quibus phænomenon opticorum genuinæ rationes investigantur ac exponuntur, et generalia curvarum linearum symptomata declarantur. Londini 1674 in 4.“ — Jsaac **Newton** (Whoolstorpe in Lincolnshire 1642 XII 25 a. St. — London 1726 III 20 a. St. oder 1727 III 31 n. St.) bezog 1660 das Trinity-College in Cambridge, rückte 1669 zum Professor der Mathematik an demselben und 1699 zum königl. Münzmeister in London vor, und bekleidete überdiess von 1703 hinweg das Präsidium der Royal Society. Vergl. für ihn theils seine „Opuscula mathematica, philosophica et philologica, coll. J. Castilioneus. Lausannæ 1744, 3 Vol. in 4.“, und seine „Opera quæ extant omnia. Comm. Sam. Horsley. London 1779—1785, 5 Vol. in 4.“, — theils „Fontenelle, Eloge de M. Newton. Paris 1728 in 4. (Auch Mém. de Par. 1727, und engl. durch Pemberton, London 1728), — Maclaurin, An account of Sir Js. Newton's philosophical discoveries. London 1748 in 4., — Frisi, Elogio storico del. Caval. Js. Newton. Milano 1778 in 8., — Etliche merkwürdige Umstände aus Js. Newton's Leben. Frankfurt 1791 in 8., — Brewster, Life of Js. Newton. London 1831 in 4. (Deutsch durch Goldberg, Leipzig 1833 in 8.), — Snell, Newton und die mechanische Naturwissenschaft. Dresden 1843 in 8., — Brewster, Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir Js. Newton. Edinburgh 1855, 2 Vol. in 8. (2 ed. 1860), — etc.“ — Gottfried Wilhelm **Leibnitz** (Leipzig 1646 — Hannover 1716), Rath, Bibliothekar und Historiograph des Herzogs von Hannover, wurde 1673 Mitglied der Royal Society, 1699 (gleichzeitig mit Newton, Jakob und Johann Bernoulli, Guglielmini, Hartsoecker, Tschirnhausen und Römer) auswärtiges Mitglied der damals erst mit dieser Classe versehenen Pariser-Academie, und 1700 Präsident der auf seine Veranlassung in Berlin gegründeten Academie der Wissenschaften. Vergl. für ihn theils seine „Mathematischen Schriften (und Correspondenzen), herausgegeben von Carl Immanuel **Gerhardt** (Herzberg 1816; Oberlehrer zu Salzwedel, Berlin und Eisleben), Berlin 1849 - Halle 1863, 7 Bde. in 8.“, — theils „Fontenelle, Eloge de Leibnitz (Mém. de Par. 1716), — Bailly, Eloge de Leibnitz. Paris 1769 in 4., — Guhrauer, Gottfried Wilhelm von Leibnitz.

Breslau 1845, 2 Vol. in 8., — etc." — Pierre **Varignon** (Caen 1654 — Paris 1722) war erst Theologe, dann Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris. Vergl. sein Eloge durch Fontenelle in Mém. de Par. 1722. — Galileo **Galilei** (Pisa 1564 — Villa Giojello bei Arcetri 1642) war von 1589 bis 1592 Professor der Mathematik zu Pisa, von 1593 bis 1609 zu Padua, und von 1610 an grossherzoglich toscanischer Mathematicus. Vergl. für ihn theils seine „Opere. Firenze 1842—1856, 16 Vol. in 8.", theils „Frisi, Elogio del Galileo. Livorno 1775 in 8., — Jagemann, Geschichte des Lebens und der Schriften des Galileo Galilei. Weimar 1783 in 8. (2. A. 1787), — Nelli, Vita e commercio letterario di Galileo Galilei. Losanna 1793, 2 Vol. in 4., — Venturi, Memorie e lettere di Galileo Galilei, inedite finora o disperse. Modena 1818 bis 1821, 2 Vol. in 4., — Philarête Chasles, Galileo Galilei, sa vie, son procès et ses contemporains. Paris 1862 in 8., — etc." — Evangelista **Torricelli** (Piancaldoli 1608 — Florenz 1647) war ein Schüler von Castelli in Rom, welcher durch diesen 1641 dem erblindeten Galilei als Gehülfe empfohlen wurde, und dann später die Nachfolge des Letztern erhielt. — **Ferdinand** II. von Toskana (1610—1670) wurde durch Galilei, welchen ihm sein Vater **Cosimo** II. (1590—1621) zum Lehrer gegeben hatte, für die Physik gewonnen, arbeitete selbst mit Erfolg auf diesem Gebiete, und gründete 1657 unter dem Präsidium seines Bruders **Leopold** (1617—1675) die Academia del Cimento, welche, vergl. „Saggio di naturali esperienze fatte nell' Academia del Cimento; Firenze 1691 in fol.", in kurzer Zeit so Grosses leistete, dass die Einwilligung zu ihrer Auflösung (1667) ihrem Präsidenten einen Cardinalshut eingetragen haben soll. — Robert **Boyle** (Lismore in Irland 1627 — London 1691) war ein reicher Privatmann und später Präsident der Royal Society. Seine zahlreichen, meist physikalischen Schriften wurden durch Thomas **Birch** (1705—1766; Secretär der Roy. Soc.), der auch „Life and writings of Rob. Boyle; London 1741 in 8." herausgab, in 5 Foliobänden (London 1744) gesammelt; von Sammlungen ausgewählter Schriften mögen z. B. die „Opera varia; Genevæ 1680, 2 Vol. in 4." citirt werden. — Edme **Mariotte** (Bourgogne 16.. — Paris 1684) war erst Prior von St. Martin-sous-Beaune bei Dijon, dann Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. seine „Oeuvres. Leyde 1717, 2 Vol. in 4. (Nouv. éd., A la Haye 1740)". — Otto von **Guerike** (Magdeburg 1602 — Hamburg 1686) war Mathematiker und Jurist, stand längere Zeit als Ingenieur in schwedischen Diensten, und bekleidete dann von 1646 bis 1681 das Amt eines Bürgermeisters von Magdeburg. Vergl. „Fr. Dies, Otto von Guerike und sein Verdienst. Magdeburg 1862 in 8." — Zacharias **Jansen** oder Johnssohn lebte um 1590 als Glasschleifer und Brillenmacher in Middelburg. — Johannes **Lippershey** oder Laprey (Wesel 15.. — Middelburg 1619) lebte ebenfalls als Glasschleifer und Brillenmacher in Middelburg. — Durch Michael **Mästlin** oder Möstlin (Göppingen 1550 — Tübingen 1631; Professor der Mathematik in Tübingen), nach vorausgegangenen philosophischen und theologischen Studien in Maulbronn und Tübingen, in die Mathematik und Astronomie eingeführt, stand Johannes **Keppler** (Magstatt bei Weil 1571 — Regensburg 1630) von 1593 bis 1598 als Professor der Mathematik und Moral am Gymnasium zu Gratz, — ging dann als Gehülfe Tycho's nach Prag, wurde nach dessen Tode 1601 kaiserl. Mathematikus, und versah nebenbei von 1614 bis 1627 eine Professur am Gymnasium zu Linz, — lebte nachher einige Zeit zu Sagan bei Wallenstein, auf den er für rückständige Besoldung angewiesen war, und starb zu Regensburg, wo er beim Reichstage seine Ansprüche geltend machen wollte, — nicht

in Folge Hungers, sondern in Folge der für ihn zu anstrengenden Reise. Vergl. für ihn theils seine von Christian **Frisch** (Stuttgart 1807; Lehrer in Stuttgart) herausgegebenen „Opera omnia. Francof. 1858—1869, 8 Vol. in 8." und die von Michael Gottlieb **Hansch** (Müggenhahl bei Danzig 1683 — Wien 1752?; als Literat in Leipzig, Dresden, Wien, etc. lebend) zum Drucke besorgten „Jo. Keppleri aliorumque epistolæ mutuæ. Lipsiæ 1718 in fol.", — theils „Rümelin, Dissert. de vita Jo. Kepleri. Tubing. 1770 in 4., — Breitschwert, Joh. Keppler's Leben und Wirken. Stuttgart 1831 in 8., — Johann Keppler, kaiserlicher Mathematiker. Denkschrift des historischen Vereins der Oberpfalz und von Regensburg. Regensburg 1842 in 4., — E. Reitlinger, Johannes Kepler. Theil 1. Stuttgart 1868 in 8., — etc." — Nicolo **Zucchi** oder Zucchius (Parma 1586 — Rom 1670), ein Jesuit, war Hofprediger von Papst Alexander VII., und einige Zeit Lehrer der Mathematik am Collegio Romano in Rom. — Georg **Hartmann** (Eckoltsheim bei Bamberg 1489 — Nürnberg 1564) lebte als Mechaniker, später als Vicar an der Sebaldus-Kirche, in Nürnberg. Vergl. seinen Briefwechsel mit dem Herzog Albrecht von Preussen (Dove's Repert. II. 129). — Willebrord **Snellius** (Leyden 1591 — Leyden 1626) war Professor der Mathematik an der Universität zu Leyden. Vergl. „Jachæus, Oratio in Will. Snellii obitum. Lugd. Bat. 1626 in 4." — Ole **Römer** (Aarhuus 1644 — Kopenhagen 1710) lebte von 1671 bis 1681 als Lehrer des Dauphins und Mitglied der Academie in Paris, wurde dann Professor der Mathematik in Kopenhagen, und zuletzt Bürgermeister daselbst. Vergl. die von seinem Schüler und Nachfolger Peter **Horrebow** (Lögstör auf Jütland 1679 — Kopenhagen 1764; Professor der Mathematik in Kopenhagen) herausgegebene „Basis Astronomiæ. Hafniæ 1735 in 4". — Francesco Maria **Grimaldi** (Bologna 1618 — Bologna 1663) war Lehrer der Mathematik am Jesuitencollegium zu Bologna, und hatte vielen Antheil an den Arbeiten Riccioli's. — Erasmus **Bartholinus** (Roeskilde 1625 — Kopenhagen 1698) war Professor der Mathematik und Medizin zu Kopenhagen. — Für diese mittlere Zeit sind ausser einigen schon genannten und den unter 4 aufgeführten allgemeinen Werken, z. B. folgende Schriften zu berathen: „Conrad **Gessner** (Zürich 1516 — Zürich 1565; erst Professor der griechischen Sprache in Lausanne, später Stadtarzt und Lector der Physik in Zürich; vergl. Bd. 1 meiner Biographieen), Bibliotheca universalis. Tiguri 1545—1549, 2 Vol. in fol, — Conrad **Dasypodius** (Frauenfeld 1531? — Strassburg 1600; Professor der Mathematik zu Strassburg; vergl. Bd. 3 meiner Biographieen), Dictionarium mathematicum. Argent. 1573 in 8., — Joh. Gerhard **Voss** (Heidelberg 1577 — Amsterdam 1649; Professor der Eloquenz und Geschichte zu Leyden und Amsterdam), De universa matheseos natura et constitutione liber, qui subjungitur chronologia mathematicorum. Amstelodami 1650 in 4., — Geronimo **Vitale** oder Vitalis (Capua 16.. — Rom 1698; Theatiner-Mönch), Lexicon mathematicum astronomicum geometricum. Parisiis 1668 in 8., — Claude-François Milliet **Deschales** (Chambéry 1621 — Turin 1678; Jesuit, Professor der Hydrographie und Mathematik in Marseille und Lyon), Cursus seu mundus mathematicus. Lugd. 1674, 3 Vol. in fol. (2 ed. 1690, 4 Vol.), — Jacques **Ozanam** (Bouligneux 1640 — Paris 1717; Lehrer der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris; Eloge d. Fontenelle in Mém. de Par. 1717), Dictionnaire mathématique. Paris 1690 in 4., — Bernardino **Baldi** (Urbino 1553 — Urbino 1617; Abt von Guastalla), Cronica de matematici overo epitome dell' istoria delle vite loro. Urbino 1707 in 4., — Christian **Wolf** (Breslau 1679 — Halle 1754; Professor der Mathematik und Physik zu

Halle; Eloge durch Fouchy in Mém. de Par. 1754), Mathematisches Lexikon. Leipzig 1716 in 8. (2. A. 1732), — Chr. **Wolf**, Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. Halle 1710, 4 Bde. in 8. (Noch 1755; Auszug daraus 1717 und in 10 A. 1772), — Chr. **Wolf**, Elementa matheseos universæ. Halæ 1713—1741, 5 Vol. in 4. (Auch Genevæ 1743), — etc."

4. Die neuere Zeit. Sie wurde allseitig durch Euler eingeleitet, indem er nicht nur die mathematischen Kenntnisse seiner Vorgänger zu einem organischen Ganzen umschmolz und weiterführte, sondern auch die ersten Lehrbücher der analytischen Mechanik und Dioptrik schrieb, die von Hugens angedeutete Undulationstheorie und die Möglichkeit des Achromatismus verfocht, und mit seinem Freunde Dan. Bernoulli die mathematische Physik überhaupt zu einer fruchtbaren Disciplin erhob. Auf der so gelegten Basis gelang es sodann den d'Alembert, Clairault, Cramer, Lagrange, Laplace, Legendre, Gauss, Fourier, Poisson, Abel, Cauchy, Sturm, Jacobi, Dirichlet, Riemann, etc. die Analysis zu ihrer jetzigen hohen Blüthe zu bringen, während Monge, Carnot, Poncelet, Steiner, etc., die darstellende und die sog. neuere Geometrie schufen. Nicht weniger entwickelte sich auch die Physik: Young's Entdeckung der Interferenz und die verwandten Arbeiten von Fresnel verhalfen der Undulationstheorie zur unbedingten Herrschaft, — Lavoisier schuf die neuere Chemie, Lambert mit Bouguer die Photometrie, mit Lesage aber die seither durch Fourier, Poisson und die: Mayer, Joule, Clausius, etc. gelungene Einführung der sog. mechanischen Theorie, der Rechnung zugänglich gewordene Wärmelehre, — Chladni entdeckte die Klangfiguren, Montgolfier die Aerostaten, Malus die Polarisation des Lichtes, — Wollaston, Fraunhofer, Daguerre, Kirchhoff, etc., bereicherten und verbesserten die optischen Instrumente, erfanden die Lichtbilder und die Spectralanalyse, etc., — Watt, Fulton, Séguin, Stephenson, etc. construirten auf Grundlage der Ideen Papin's brauchbare Dampfmaschinen und Locomotiven, — Gauss bildete die Theorie des Erdmagnetismus aus, — Galvani und Volta aber gaben durch ihre Entdeckungen der schon von Gray, Dufay und Franklin gepflegten Electricitätslehre eine früher nicht geahnte Bedeutung, welche, seit Oersted, Faradey und Steinheil die Ablenkung der Magnetnadel durch den galvanischen Strom, die Inductionsströme und die Leitungsfähigkeit der Erde auffanden, und für Telegraphie, Chronographie, etc. nutzbar machten, noch mehr gesteigert wurde [XX].

Für weitern historischen Detail nochmals auf die einzelnen Abschnitte verweisend, mag Obigem vorläufig Folgendes beigefügt werden: Leonhard **Euler** (Basel 1707 — Petersburg 1783) war vielleicht der grösste, jedenfalls aber der fruchtbarste Mathematiker des vorigen Jahrhunderts; obschon er 1735 an einem, 1766 auch am zweiten Auge erblindete, würde eine Gesammtausgabe

seiner Werke und Abhandlungen etwa 16000 Quartseiten füllen, und die Sammelwerke „Opuscula varii argumenti, Berol. 1746—1751, 3 Vol. in 4., — Opuscula analytica, Petrop. 1783—1785, 2 Vol. in 4., — Commentationes arithmeticæ, Petrop. 1849, 2 Vol. in 4., — Opera postuma mathematica et physica A. 1844 detecta. Ed. P. H. et N. Fuss. Petrop. 1862, 2 Vol. in 4." enthalten nur einen sehr kleinen Theil der Letztern. Euler stand von 1727 bis 1741 als Academiker und Professor der Mathematik in Petersburg, folgte dann einem Rufe in entsprechende Stellung nach Berlin, kehrte 1766 nach Petersburg zurück, und starb dort mit Hinterlassung dreier, ebenfalls um die mathematischen Wissenschaften ganz verdienter Söhne: Joh. Albrecht (Petersburg 1734 — Petersburg 1800; Secretär der Petersburger-Academie), — Carl (Petersburg 1740 — Petersburg 1790; kaiserl. Leibarzt), — Christoph (Berlin 1743 — ? 1812; General der Artillerie), — so wie des von ihm als Gehülfen von Basel bezogenen, und dann durch Verheirathung mit Joh. Albrechts Tochter Albertine zu seinem Enkel gewordenen Nikolaus **Fuss** (Basel 1755 — Petersburg 1826; Professor der Mathematik und später Secretär der Academie in Petersburg). Vergl. für ihn und die Söhne „Fuss, Eloges de M. Léon. et Jean Alb. Euler (Nov. Act. Petr. 1 u. 15), — Condorcet, Eloge de Léon. Euler (Mém. de Par. 1783), — Fuss, Lobrede auf Euler. Basel 1786 in 8.", sowie Bd. 4 meiner Biographieen; ferner die von Paul Heinrich Fuss (Petersburg 1797 — Petersburg 1855; Sohn von Nikolaus, und Nachfolger desselben als Secretär der Academie) herausgegebene „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18e siècle. Pétersbourg 1843, 2 Vol. in 8." — Jean-le-Rond **d'Alembert** (Paris 1717 — Paris 1783), ein von den Stufen der Kirche Jean-le-Rond in Paris aufgehobenes, und von der Frau eines Glasers Alembert erzogenes Findelkind, schwang sich zum Mitgliede der Academieen in Paris und Berlin, sowie zum Secretär der Erstern und zum Pensionär Friedrichs des Grossen auf. Seine Werke, von welchen hier vorläufig nur die „Opuscules mathématiques. Paris 1761—1780, 8 Vol. in 4." zu nennen sind, haben die mathematischen Wissenschaften allseitig ungemein befördert, und durch die mit Denis **Didérot** (Langres 1713 — Paris 1784; Literat und Pensionär Katharina II. von Russland) herausgegebene „Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Paris 1751—1780, 33 Vol. in fol." ist er auch in den weitesten Kreisen bekannt geworden. Vergl. „Condorcet, Eloge de Mr. d'Alembert (Mém. de Par. 1783), Paris 1784 in 8." — Alexis-Claude **Clairault** (Paris 1713 — Paris 1765) publicirte schon in seinem 18. Jahre seine berühmten „Recherches sur les courbes à double courbure. Paris 1731 in 4.", und wurde darauf hin sofort Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. sein Eloge durch Grandjean de Fouchy in Mém. de Par. 1765. — Gabriel **Cramer** (Genf 1704 — Bagnols bei Nismes 1752) war Professor der Mathematik und Philosophie an der Academie zu Genf. Vergl. für ihn Bd. 3 meiner Biographieen. — Joseph-Louis **Lagrange** (Turin 1736 — Paris 1813) war erst Professor der Mathematik zu Turin, dann Director der mathematischen Classe der Berliner-Academie, zuletzt Professor der Mathematik an der Ecole normale und Ecole polytechnique zu Paris, sowie Mitglied der Academie und des Bureau des longitudes. Vergl. seine von August Leopold **Crelle** (Eichwerder 1780 — Berlin 1855; Oberbaurath und Academiker in Berlin) herausgegebenen „Mathematischen Werke. Berlin 1823—1824, 3 Vol. in 8.", seine von Joseph-Alfrède **Serret** (Paris 1819; Professor der Mathematik und Academiker in Paris) besorgten „Oeuvres. Vol. 1—2. Paris 1867

in 4.“; ferner „Virey et Potel, Précis historique sur la vie et la mort de J. C. Lagrange. Paris 1813 in 4., — Cossali, Elogio de Gius. Luigi Lagrangia. Paris 1813 in 8.“ — Pierre-Simon **Laplace** (Beaumont-en-Auge 1749 — Paris 1827) war erst Lehrer der Mathematik an der Militärschule seiner Vaterstadt, dann in Paris Examinator beim k. Artilleriecorps, und später Professor der Mathematik an der Ecole normale, — daneben Mitglied der Academie und des Bureau des longitudes, auch unter der Consularregierung kurze Zeit Minister des Innern. Vergl. seine „Oeuvres. Paris 1843—1847, 7 Vol. in 4.“ und sein Eloge durch Fourier im Jahrgang 1829 der Revue encyclopédique. — Adrien-Marie **Legendre** (Paris 1752 — Paris 1833) war Professor der Mathematik an der Militärschule und Normalschule in Paris, Examinator an der polytechnischen Schule und Mitglied der Academie. — Karl Friedrich **Gauss** (Braunschweig 1777 — Göttingen 1855) studirte in Braunschweig und Göttingen, privatisirte dann mit Unterstützung seines Herzogs Karl Wilhelm Ferdinand in Braunschweig, bis er 1807 einen Ruf als Professor der Mathematik und Director der Sternwarte nach Göttingen annahm. Vergl. seine seit 1863 von der Göttinger-Academie herausgegebenen, auf 7 Quartbände berechneten „Werke (bis jetzt Bd. 1, 2, 3, 5 vollendet)“, — ferner „Sartorius, Gauss zum Gedächtniss. Leipzig 1856 in 8.“, — und endlich den von Christian August Friedrich **Peters** (Hamburg 1806; erst Observator in Hamburg und Pulkowa, dann Prof. der Astronomie in Königsberg, jetzt Director der Sternwarte in Altona) herausgegebenen „Briefwechsel zwischen K. F. Gauss und H. C. Schumacher. Altona 1860—1862, 6 Bde. in 8.“ — Jean-Baptiste-Joseph **Fourier** (Auxerre 1768 — Paris 1830) war Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule in Paris, folgte Bonaparte nach Egypten, wurde dann Präfekt des Isère-Departements, und zuletzt Secretär der Pariser-Academie. Vergl. sein Eloge in Arago Oeuvres I. — Siméon-Denis **Poisson** (Pithiviers 1781 — Paris 1840) war erst Schüler, dann Lehrer an der Ecole polytechnique, überdiess Professor der Mechanik an der Sorbonne, Mitglied der Academie und des Bureau des longitudes. Vergl. sein Eloge in Arago Oeuvres II. — Niels Henrik **Abel** (Findoë 1802 — Froland 1829) lebte von 1825 bis 1827 auf Kosten der norwegischen Regierung im Auslande, meist in Berlin und Paris, — vicarisirte 1828 für Hansteen in Christiania, und hatte eben einen Ruf nach Berlin in Aussicht, als ihn der Tod ereilte. Vergl. seine „Oeuvres complètes, par Holmboe. Christiania 1839, 2 Vol. in 4.“ — Augustin-Louis **Cauchy** (Paris 1789 — Sceaux 1857) war erst Zögling, dann Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule in Paris, Mitglied des Instituts und Ingénieur-en-chef des ponts-et-chaussées. Nach der Juli-Revolution lebte er längere Zeit als Erzieher des Herzogs von Bordeaux in Oesterreich, kehrte dann nach Paris zurück, und lehrte daselbst im Ordenshause der Jesuiten Mathematik. Vergl. „Valson, Vie et catalogue des ouvrages d'A. Cauchy. Paris 1868, 2 Vol. in 8.“ — Charles-François **Sturm** (Genève 1803 — Paris 1855) war Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris. Vergl. für ihn Bd. 4 meiner Biographien. — Karl Gustav Jakob **Jacobi** (Potsdam 1804 — Berlin 1851) war erst Professor der Mathematik zu Königsberg, und lebte dann später als Mitglied der Academie und königl. Pensionär zu Berlin. Vergl. für ihn seine „Opuscula mathematica. Berolini 1846—1851, 2 Vol. in 4.“, und Dirichlet's Lobrede in Berl. Abhandl. 1852. — Peter Gustav Lejeune **Dirichlet** (Düren bei Aachen 1805 — Göttingen 1859) war folgeweise Professor der Mathematik und Mitglied der Academieen in Berlin und Göttingen, auch auswärtiges

Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. für ihn die 1859 in den Göttinger-Nachrichten und Berliner-Monatsberichten erschienenen Nekrologe. — Georg Friedrich Bernhard **Riemann** (Brestelenz in Hannover 1826 — Intra am Lago maggiore 1866) war Professor der Mathematik in Göttingen. Vergl. den in den Göttinger-Nachrichten erschienenen Nekrolog. — Gaspard **Monge** (Beaune 1746 — Paris 1818) war Professor der Mathematik und Physik in Lyon, Mézières und Paris, — während der Republik Marine-Minister und Director der Gewehrfabriken, — später Professor der Mathematik an der von ihm mitbegründeten Ecole polytechnique und Mitglied der Academie. Vergl. für ihn „Dupin, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de G. Monge. Paris 1819 in 8.“, und Arago Oeuvres II. — Lazare-Nicolas-Marguérite **Carnot** (Nolay en Bourgogne 1753 — Magdeburg 1823) war erst Ingenieur-Capitän, dann Mitglied des Convents und Directoriums, später Kriegsminister und Academiker, zuletzt durch die Bourbonen verbannt. Vergl. für ihn „Serieys: Carnot, sa vie politique et privée. Paris 1816 in 12., — Körte, Leben Carnot's. Leipzig 1820 in 8., — Tissot, Mémoires historiques et militaires sur Carnot. Paris 1824 in 8.“, auch Arago Oeuvres I. — Jean-Victor **Poncelet** (Metz 1788 — Paris 1868) war Schüler der polytechnischen Schule in Paris, machte den russischen Feldzug mit, stieg bis zum Brigadegeneral, und lebte später als Professor der mechanischen Physik, Mitglied der Academie und Commandant der polytechnischen Schule in Paris. — Jakob **Steiner** (Utzistorf im Kanton Bern 1796 — Bern 1863), ein bei Pestalozzi vorgebildeter Bauernknabe, schwang sich zum Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Berlin auf. Vergl. Berliner-Monatsbericht 1863. — Thomas **Young** (Milverton 1773 — London 1829) lebte als praktischer Arzt und Professor der Physik in London, war auch Secretär der Royal Society und auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. die von George **Peacock** (Thornton 1791 — Ely? 1858; Professor der Mathematik zu Cambridge) herausgegebenen „Miscellaneous works of the late Thom. Young. London 1855, 3 Vol. in 8., — Life of Thom. Young. London 1855 in 8.“, und Arago Oeuvres I. — Augustin-Jean **Fresnel** (Broglie im Dép. de l'Eure 1788 — Ville-d'Avray bei Paris 1827) war Schüler der polytechnischen Schule in Paris, und stieg bis zum Ingénieur-en-chef des ponts-et-chaussées. Vergl. seine durch Henri Hureau de **Sénarmont** (Broué 1808; Professor der Mineralogie und Mitglied der Academie in Paris) auf Staatskosten herausgegebenen „Oeuvres complètes. Paris 1866—1868, 2 Vol. in 4.“, und Arago Oeuvres I. — Antoine-Laurent **Lavoisier** (Paris 1743 — Paris 1794) war Mitglied der Pariser-Academie, daneben einer der Generalpächter der Steuern, später Verwalter der k. Pulverfabriken, zuletzt ein Opfer der Schreckensregierung. Vergl. für ihn seine „Oeuvres. Tom. 1—4. Paris 1862—1868 in 4.“, und „Kiréevsky, Histoire des législateurs chimistes: Lavoisier-Bertholet-Humphry Davy. Francfort 1845 in 8.“ — Joh. Heinrich **Lambert** (Mühlhausen 1728 — Berlin 1777) arbeitete sich vom Schneiderlehrjungen zum Academiker und Oberbaurath in Berlin empor. Vergl. seine „Beiträge zur Mathematik und deren Anwendung. Berlin 1765—1772, 3 Vol. in 8.“, — seinen von Johannes III. **Bernoulli** herausgegebenen „Deutschen gelehrten Briefwechsel. Berlin 1782—1784, 5 Bde. in 8.“, — ferner „Formey, Eloge de Lambert (Mém. de Berl. 1778), — Dan. Huber: J. H. Lambert nach seinem Leben und Wirken. Basel 1829 in 8.“, sowie Bd. 3 meiner Biographien. — Pierre **Bouguer** (Croisic 1698 — Paris 1758) war Professor der Hydrographie und Mitglied der Academie in Paris. Vergl. sein Eloge durch Grandjean

de Fouchy in Mém. de Par. 1758. — George-Louis **Lesage** (Genève 1724 — Genève 1803) lebte als Privatgelehrter in Genf. Vergl. für ihn „Prevost, George-Louis Lesage de Genève. Genève 1805 in 8." und Bd. 4 meiner Biographieen. — Julius Robert **Mayer** (Heilbronn 1814) machte früher als Schiffsarzt eine Reise nach Java, und lebt jetzt als Stadtarzt in Heilbronn. — James Prescott **Joule** (Manchester 1818) lebt als Brauer in Salford bei Manchester. — Rudolf Julius Emmanuel **Clausius** (Cöslin in Pommern 1822) war Professor der Physik in Zürich, und ist es jetzt in Würzburg. — Ernst Florens Friedrich **Chladni** (Wittenberg 1756 — Breslau 1827) war fast beständig auf Reisen, aus dem Ertrage seiner Werke und akustischen Vorlesungen lebend. Vergl. für ihn seine, eine Autobiographie enthaltende „Akustik. Leipzig 1802 in 4.", und „W. Bernhardt, Chladni der Akustiker. Wittenberg 1856 in 8.". — Joseph-Michel **Montgolfier** (Vidalon-les-Annonay 1740 — Balaruc 1810) war, wie sein, an allen seinen Arbeiten theilnehmender Bruder Jacques-Etienne (1745 bis 1799) Papierfabrikant zu Annonay, und lebte dann später als Administrator des Conservatoire des arts-et-métiers und Mitglied des Instituts zu Paris. Vergl. sein Eloge durch Delambre in Mém. de l'Inst. IX. — Etienne-Louis **Malus** (Paris 1775 — Paris 1812) war Schüler der polytechnischen Schule, machte als Genieoffizier den Feldzug nach Egypten mit, wurde später Examinator der polytechnischen Schule und auch Mitglied des Instituts. Vergl. Arago Oeuvres III. — William Hyde **Wollaston** (East-Dereham in Norfolkshire 1766 — London 1828) lebte in London, erst als praktischer Arzt, dann als Privatmann aus dem reichen Ertrage seiner Erfindung der Schmiedbarmachung des Platins; er war auch Mitglied der Roy. Society und der Astron. Society. Vergl. für ihn Bd. 4 der Mem. of the Astron. Soc. — Joseph **Fraunhofer** (Straubing 1787 — München 1826) schwang sich vom Glaserlehrling zu einem der berühmtesten Optiker und zum Chef des optischen Instituts in München auf. Vergl. für ihn „Utzschneider, Lebensgeschichte J. v. Fraunhofers. München 1826 in 8., — Jolly, Das Leben Fraunhofers. München 1865 in 8.". — Louis-Jacques-Mandé **Daguerre** (Cormeilles im Dép. Seine-et-Oise 1787 — Bry-sur-Marne 1851) lebte als Decorationsmaler in Paris, und erstellte auch ein erstes Diorama. — Gustav Robert **Kirchhoff** (Königsberg 1824) war früher Professor der Physik zu Breslau, und ist es jetzt zu Heidelberg. — James **Watt** (Greenock in Schottland 1736 — Heathfield bei Birmingham 1819) war erst Universitäts-Instrumentenmacher in Glasgow, — dann Civilingenieur zu Soho bei Birmingham, — auch auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. für ihn „Muirhead, The origin and progress of the mechanical inventions of James Watt. London 1854, 3 Vol. in 8., — Muirhead, Correspondance of James Watt on his discovery of the composition of water. London 1856 in 8., — Williamson, Memorials of the lineage, early life, education and development of the genius of James Watt. London 1856 in 4., — Muirhead, The life of James Watt. London 1858 in 8.", — auch Arago Oeuvres I. — Robert **Fulton** (Little Britain in Pennsylvanien 1765 — New-York 1815) war erst Goldschmied, dann Maler, zuletzt Mechaniker. Vergl. „Colden, Life of Rob. Fulton comprising some account of the invention, progress and etablishment of Steam-Boots. New-York 1817 in 8., — Montgéry, Notice sur la vie et les travaux de Rob. Fulton. Paris 1825 in 8." — Mark **Séguin** ainé (Montbard Côte d'or 1794?), ein Neffe von Montgolfier, lebt als Ingenieur in Montbard und ist Correspondent der mechanischen Section der Pariser-Academie. — George **Stephenson** (Wylam 1781 — Tapton-House bei Chester-

field 1848) schwang sich vom Dampfmaschinenheizer zu einem der berühmtesten Civil-Ingenieure auf. Vergl. „Smiles, Life of George Stephenson. London 1857 in 8.“ — Denis **Papin** (Blois 1647 — Marburg 1714?) war erst Gehülfe von Hugens in Paris und von Boyle in London, und stand sodann längere Zeit als Professor der Mathematik und Physik in Marburg. Vergl. „Bannistre: Papin, sa vie et ses écrits. Blois 1847 in 8.“ — Luigi **Galvani** (Bologna 1737 bis Bologna 1798) war Professor der Medizin und Anatomie in Bologna. Vergl. seine „Opere edite ed inedite. Bologna 1841 in 4. (Aggiunta 1842)“, sowie „Alibert, Eloges de Spallanzani, de Galvani, de Roussel et de Bichat. Paris 1806 in 8.“ — Alessandro **Volta** (Como 1745 — Como 1827) war Professor der Physik in Como und Pavia, später Director der philosophischen Facultät zu Padua. Seine meisten Schriften finden sich in der von V. **Antinori** besorgten „Collezione dell' opere del Caval. A. Volta. Firenze 1816, 3 Vol. in 8.“ Vergl. „Gio. Zuccala, Elogio storico di Aless. Volta. Bergamo 1827 in 8., — A. Seebeck, Gedächtnissrede auf A. Volta. Dresden 1845 in 8.“ — Stephen **Gray** (16.. — London 1736) lebte in London und war Mitglied der Roy. Society. — Charles-François **Dufay** (Paris 1698 — Paris 1739) war Capitän und Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. sein Eloge in Mém. de Par. 1739. — Benjamin **Franklin** (Governors-Island bei Boston 1706 — Philadelphia 1790) war successive Buchdrucker, General-Postmeister der englisch-amerikanischen Colonieen, Vertreter seines nach Unabhängigkeit ringenden Vaterlandes in Paris, Mitunterzeichner der Friedenspräliminarien, und Präsident des Congresses von Pennsylvanien. Vergl. seine durch Jared **Sparks** herausgegebenen „Works. Boston 1840, 10 Vol. in 8.“, die von seinem Enkel William Temple Franklin publicirten „Memoirs of the live and writings of Benjamin Franklin. London 1817—1818, 3 Vol. in 4.“, und „Laboulaye, Correspondance de Benj. Franklin. Paris 1866, 2 Vol. in 8.“ — Hans Christian **Oersted** (Rudkjöbing auf Langeland 1777 — Kopenhagen 1851) war Pharmaceut, dann Professor der Physik zu Kopenhagen, auch Secretär der k. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften und auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie. Vergl. sein Leben von Hauch und Forchhammer (Deutsch von Sebold, Spandau 1853). — Michael **Faradey** (Newington bei London 1791 — London 1867) schwang sich vom Buchbinderlehrling zum Professor der Chemie an der Royal Institution in London und zum auswärtigen Mitgliede der Pariser-Academie auf. Vergl. „De la Rive, Notice sur Michel Faradey, sa vie et ses travaux (Bibl. univ. 1867 X), Genève 1867 in 8.“ — Karl August **Steinheil** (Rappoltsweiler im Elsass 1801) war Professor der Mathematik und Physik in München, und ist jetzt königl. Ministerialrath und Conservator der mathematisch-physikalischen Sammlungen. — Von theils im Allgemeinen, theils speciell für diese neuste Zeit zu berathenden Schriften und Sammelwerken mögen noch folgende Erwähnung finden: „Joh. Christoph **Heilbronner** (Ulm 1706 — Leipzig 1747; Privatlehrer der Mathematik in Leipzig), Versuch einer Geschichte der Mathematik. Frankfurt 1739 in 8., — J. Chr. **Heilbronner**, Historia matheseos universæ a mundo condito ad sæculum post Chr. nat. XVI. Lipsiæ 1742 in 4., — Alexandre **Savérien** (Arles 1720 — Paris 1805; Marine-Ingenieur in Marseille und später Literat in Paris), Dictionnaire universel de mathématiques et de physique. Paris 1752, 2 Vol. in 4., — Jean-Etienne **Montucla** (Lyon 1725 — Versailles 1799; Mitglied der Pariser-Academie), Histoire des mathématiques. Paris 1758, 2 Vol. in 4. (2 éd. par Lalande 1799—1802, 4 Vol.), — Abraham Gotthelf **Kästner** (Leipzig 1719 — Göttingen 1800; Professor

der Mathematik und Physik zu Leipzig und Göttingen; Elogium durch Heyne in Comm. Gotting. 15), Mathematische Anfangsgründe. Göttingen 1766—1791, 10 Bde. in 8., — A. **Savérien.** Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes. Paris 1766 in 8., — Joh. Ephraim **Scheibel** (Breslau 1736 — Breslau 1809; Professor der Mathematik und Physik zu Breslau), Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniss. Breslau 1769—1798, 19 Stücke in 8., — François **Rozier** (Lyon 1734 — Lyon 1793; erst Director der königl. Veterinärschule, dann Pfarrer zu Lyon), Journal de physique. Paris 1773—1823, 96 Vol. in 4. (Später von La Métherie, Blainville, etc. besorgt), — Joh. Samuel Traugott **Gehler** (Görlitz 1751 — Leipzig 1795; Dozent und Rathsherr in Leipzig), Physikalisches Wörterbuch. Leipzig 1785—1795, 5 Bde. in 8. (Neue Bearbeitung von Brandes, Gmelin, Horner, Littrow, Muncke und Pfaff 1825—1845, 11 Bde.), — Antoine-François de **Fourcroy** (Paris 1755 — Paris 1809; Professor der Chemie und Academiker in Paris; vergl. Cuvier Eloges I), Annales de chimie et de physique. Paris 1789—1868, 253 Vol. in 8. (Später von Arago, Gay-Lussac, etc. besorgt), — Friedrich Albert Karl **Gren** (Bernburg 1760 — Halle 1798; Professor der Chemie und Medizin zu Halle), Journal der Physik. Halle 1790—1797, 12 Th. in 8., — Karl Friedrich **Hindenburg** (Dresden 1741 — Leipzig 1808; Professor der Philosophie und Physik zu Leipzig), Archiv der Mathematik. Leipzig 1795—1800, 11 Hefte in 8., — Journal de l'école polytechnique. Paris 1795—1867, 42 Hefte in 4., — Charles **Hutton** (New-Castle 1737 — London 1823; Professor der Mathematik zu Woolwich; vergl. seine Tracts of many interesting parts of mathematical and philosophical sciences, London 1812, 3 Vol. in 8.), Mathematical and philosophical Dictionary. London 1796, 2 Vol. in 4. (2. ed. 1815), — A. G. **Kästner.** Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften. Göttingen 1796 bis 1800, 4 Bde. in 8., — Friedrich Wilhelm August **Murhard** (Cassel 1779 — Cassel 1853; wurde nach grossen Reisen in den Orient Bibliothekar in Cassel), Bibliotheca mathematica. Leipzig 1797—1805, 5 Bde. in 8., — Joh. Karl **Fischer** (Altstädt 1760 — Greifswalde 1833; Professor der Physik und Mathematik zu Dortmund und Greifswalde), Physikalisches Wörterbuch. Göttingen 1798—1805, 7 Bde. in 8. (3 Suppl. 1823—1827), — Ludwig Wilhelm **Gilbert** (Berlin 1769 — Leipzig 1824; Professor der Physik zu Halle und Leipzig), Annalen der Physik und Chemie. Halle 1799 — Leipzig 1868, 210 Bde. in 8. (Seit 1824 durch Poggendorf redigirt), — J. K. **Fischer.** Geschichte der Physik seit Wiederherstellung der Künste und Wissenschaften. Göttingen 1801—1808, 8 Bde. in 8., — Jeremias David **Reuss** (Rendsburg 1750 — Göttingen 1837; Bibliothekar in Göttingen), Repertorium Commentationum a Societatibus literariis editarum. Gottingæ 1801—1821, 16 Vol. in 4., — Ch. **Bossut.** Essai sur l'histoire générale des mathématiques. Paris 1802, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1810; deutsch von Reimer, Hamburg 1804; ital. von G. Fontana, Milano 1802; engl. von Bonnycastle, London 1803), — Georg Simon **Klügel** (Hamburg 1739 — Halle 1812; Professor der Mathematik zu Helmstädt und Halle), Mathematisches Wörterbuch. Leipzig 1803—1831, 5 Bde. in 8. (Beendigt durch Mollweide und Grunert; Supplement von Grunert 1833—1836, 2 Bde.; Supplement für angewandte Mathematik von Jahn 1855, 2 Bde.), — Joseph-Diaz **Gergonne** (Nancy 1771 — Montpellier 1859; Professor der Mathematik in Montpellier), Annales des Mathématiques. Paris 1810—1830, 20 Vol. in 4., — Joh. Wolfgang **Müller** (Nürnberg 1765 — ?; Lehrer der Mathematik und des Französischen zu Nürnberg), Mathematische Bibliothek, Nürnberg 1820 in 8.

(Als Fortsetzung: Repertorium der mathematischen Literatur, Augsburg 1822 bis 1825, 3 Bde. in 8.), — Jean-Guillaume **Garnier** (Wasigny en Picardie 1766 — Ixelles bei Brüssel 1840; Professor der Mathematik zu Colmar, St.-Cyr und Gent) et Lambert-Adolphe-Jacques **Quetelet** (Gent 1796; erst Professor der Mathematik in Gent, dann Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Brüssel, sowie Secretär der dortigen Academie), Correspondance mathématique et physique. Bruxelles 1825—1839, 11 Vol. in 8., — Andreas von **Baumgartner** (Friedberg in Böhmen 1793; erst Professor der Physik zu Ollmütz und Wien, später Minister und Präsident der Academie) und Andreas von **Ettingshausen** (Heidelberg 1796; Professor der Mathematik und Physik zu Wien), Zeitschrift für Physik und Mathematik. Wien 1826 bis 1832, 10 Bde. in 8., — A. L. **Crelle**, Journal für reine und angewandte Mathematik. Berlin 1826—1868, 69 Bde. in 4. (Fortgesetzt von Borchardt, etc.), — Jgnaz **Rogg** (Röthenbach in Würtemberg 1796; Professor der Mathematik zu Ebingen), Handbuch der mathematischen Literatur I. Tübingen 1830 in 8., — Sir David **Brewster** (Sedburgh in Schottland 1781 — Edinburgh 1868; erst Pharmacent, später Professor der Physik zu St.-Andrews), Philosophical Magazine. London 1832—1868, 73 Vol. in 8., — Wilhelm **Engelmann**, Bibliotheca mechanica-technologica. Leipzig 1834—1839, 2 Bde. in 8. (2. A. 1844—1850), — Alexandre-Victor de **Montferrier** (Paris 1792), Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées. Paris 1834—1840, 3 Vol. in 4. (2 éd. 1845), — Joseph **Liouville** (St.-Omer 1809; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris), Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris 1836—1868, 33 Vol. in 4., — William **Whewell** (Lancaster 1794 — Cambridge 1866; Dr. Theol., Professor der Mineralogie und Theologie, sowie Vicekanzler der Universität Cambridge; vergl. Vol. 16 der Proceed. of the Roy. Soc.), History of the inductive sciences. London 1837—1838, 3 Vol. in 8. (3 éd. 1847; deutsch von Littrow, Stuttgart 1840—1841), — Heinrich Wilhelm **Dove** (Liegnitz 1803; Professor der Physik und Academiker in Berlin) und Ludwig Ferdinand **Moser** (Berlin 1805; Professor der Physik in Königsberg), Repertorium der Physik. Berlin 1837—1846, 7 Bde. in 8., — Robert Leslie **Ellis** (Bath 1817? — Cambridge 1859; Fellow des Trinity-College in Cambridge) and W. **Thompson**, Cambridge (später Cambridge and Dublin, — zuletzt Oxford, Cambridge and Dublin), Mathematical Journal. Cambridge 1837—1863, 15 Vol. in 8., — Joh. August **Grunert** (Halle 1797; Professor der Mathematik zu Torgau, Brandenburg und Greifswalde), Lehrbuch der Mathematik und Physik. Leipzig 1841—1850, 5 Bde. in 8., — J. A. **Grunert**, Archiv der Mathematik und Physik. Greifswalde 1841—1868, 48 Bde. in 8., — Olry **Terquem** (Metz 1782 — Paris 1862; erst Professor der Mathematik zu Mainz, später Bibliothekar in Paris) et **Gérono**, Nouvelles Annales de mathématiques. Paris 1842—1868, 27 Vol. in 8. (Seit 1851 mit einem Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique verbunden), — Carlo **Matteucci** (Forli 1811 — Pisa 1868; Professor der Physik in Bologna, Ravenna und Pisa) e **Piria**, Nuovo Cimento. Pisa 1844—1868, 27 Vol. in 8., — Gustav **Karsten** (Berlin 1820; Professor der Physik zu Kiel), Die Fortschritte der Physik in den Jahren 1845—1865. Berlin 1847 bis 1867, 21 Bde. in 8. (Seit 1853 von Beetz, Krönig, etc. fortgesetzt), — Ernst **Zuchold**, Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Gottingæ 1851—1868, 18 Vol. in 8. (Fortgesetzt von Guthe), — A. **Gabba**, Mathematica pura ed applicata. Pavia 1851—1852, 3 Vol. in 8., — François-

Napoleon-Marie **Moigno** (Guémené 1804; erst Lehrer der Mathematik im Ordenshause der Jesuiten zu Paris, seither Literat), Cosmos. Revue encyclopédique des Sciences. Paris 1852—1868, 32 Vol. in 8. (Seit 1863 von Meunier, etc. redigirt), — Ludwig Adolph **Sohncke** (Königsberg 1807 — Halle 1853; Professor der Mathematik zu Halle), Bibliotheca mathematica. Lipsiæ 1854 in 8., — Ernst Ludwig **Schubarth** (Merseburg 1797; Professor und Regierungsrath zu Berlin), Repertorium der technischen Literatur von 1823 bis 1854. Berlin 1854—1856 in 8., — Oscar **Schlömilch** (Weimar 1823; Professor der Mathematik in Jena und Dresden), Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig 1856—1868, 13 Bde. in 8., — Barnaba **Tortolini** (Rom 1808; Professor der Mathematik und Physik zu Rom), Annali di mathematica pura ed applicata. Roma 1858—1865, 7 Vol. in 4. (Seit 1867 geben Brioschi und Cremona zu Mailand eine 2. Serie heraus), — Joh. Christian **Poggendorf** (Hamburg 1796; Professor der Physik und Mitglied der Academie in Berlin), Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig 1863, 2 Bde. in 8., — F. N. M. **Moigno**, Les Mondes. Revue hebdomadaire des sciences. Paris 1863—1868, 18 Vol. in 8., — Louis **Pasteur** (Dôle 1822; erst Préparateur, jetzt Directeur des études an der École normale supérieure zu Paris), Annales scientifiques de l'école normale supérieure. Paris 1864—1868, 5 Vol. in 4., — A. J. **Quetelet**, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges. Bruxelles 1864—1866, 2 Vol. in 8., — Philipp **Carl**, Repertorium für physikalische Technik. München 1866—1868, 4 Bde. in 8., — Hippolyte **Sonnet** (1800; Repetitor der Mechanik an der École centrale des arts-et-manufactures in Paris), Dictionnaire des mathématiques appliquées. Paris 1867 in 8., — Balthasar **Boncompagni** (Rom 1821; Privatgelehrter), Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Roma 1868 in 4., — etc."

II. Die arithmetischen Operationen.

5. Vorbegriffe. Kann man sich von zwei gleichartigen Grössen die eine durch Wiederholung der andern entstanden denken, so heisst die erstere **Vielheit** oder **Ganzes**, je nachdem man sich die letztere als **Einheit** oder **Theil** denkt. Hat man, um die Eine zweier Grössen zu bilden, eine Einheit oder einen Theil gleich oft, öfter oder weniger oft zu wiederholen als zur Bildung der Andern, so heisst die erstere vergleichungsweise **gleich** (=), **grösser** (>) oder **kleiner** (<). Begleitet man die Operation des Wiederholens mit Nennen einer bestimmten Folge von Namen, so heisst diese combinirte Operation **zählen**, und der letzte Name: **Zahl**, wenn man sich eine Einheit, — **Zähler**, wenn man sich einen Theil, — **Nenner**, wenn man sich einen Theil bis zum Entstehen des Ganzen wiederholt denkt. Zähler und Nenner zusammen bilden einen **Bruch**, und zwar einen **ächten**, **unächten** oder **Scheinbruch**, je nachdem der Zähler kleiner als der Nenner, grösser als der Nenner, oder ein Vielfaches des Nenners ist. Als Zahlzeichen bedient man sich bald eigener

Zeichen, sog. **Ziffern,** bald der gewöhnlichen Buchstaben, je nachdem man eine bestimmte oder irgend eine Zahl notiren will.

Das Gleichheitszeichen scheint sich zuerst im zweiten Theile des von Robert **Recorde** (Wales 15.. — London 1558; erst Lehrer der Mathematik in Oxford, dann Arzt in London) herausgegebenen, und vielfach (noch 1623) aufgelegten Werkes „The ground of arts, teaching the perfect work and practice of arithmeticke. London 1549—1557, 2 Vol. in 4.“ zu finden; die Ungleichheitszeichen sollen dagegen zuerst bei **Harriot** (vergl. 3) vorkommen. — Zur Bezeichnung bestimmter Zahlen werden jetzt ausschliesslich (vergl. 12) Ziffern gebraucht, während die von den Griechen und andern alten Völkern ebenso verwendeten Buchstaben jetzt nur noch, nach dem Vorgange von **Vieta** (vergl. 3), Anwendung finden, wenn man irgend eine Zahl durch ein Zeichen darstellen will. So bezeichnen 7, 5, 9,... immer genau dieselben Anzahlen von Einheiten, während z. B. b, α, x,... in verschiedenen Rechnungen ganz verschiedene Werthe haben können; nur werden gewöhnlich die ersten Buchstaben des Alphabets zur Bezeichnung von Bekannten oder Constanten, die Letztern zur Bezeichnung von Unbekannten oder Variabeln angewandt. — Die Griechen unterschieden **Arithmetik** (Ἀριθμητική, Zahlenlehre) und **Logistik** (Λογιστική, praktische Rechenkunst), während wir jetzt unter Arithmetik Beides verstehen. Vieta setzte sodann der als **Ars minor** betrachteten gemeinen Arithmetik oder **Arithmetica numerosa** (durch die eben besprochene Einführung der Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen) als **Ars major** die sog. Buchstabenrechnung oder **Arithmetica speciosa** (auch universalis) gegenüber; später wurde für Letztere häufig der ursprünglich nur auf die Umgestaltung der Gleichungen bezügliche Name **Algebra** (Al-jebr) gebraucht, wohl auch **Arithmetica analytica** oder **Analysis.** — Für reine Mathematik überhaupt, und speciell für Arithmetik, können neben den schon genannten und namentlich noch in 45 zu erwähnenden, z. B. folgende Schriften verglichen werden: „Rainer **Gemma-Frisius** (Dockum in Friesland 1508 bis Löwen 1555; Professor der Medizin zu Löwen), Arithmeticæ practicæ methodus facilis. Antwerpen 1540 in 4. (Auch Viteb. 1548), — Adam **Riese** (Staffelstein bei Bamberg 1489? — Annaberg 1559; Rechenmeister zu Annaberg), Rechenung nach der Lenge, auf der Linihen und Feder, dazu forteil und behendigkeit durch die Proportiones, Practica genennt. St. Annenberg 1550 in 8. (Auch später, z. B. 1595), — Pierre de la Ramée oder **Ramus** (Cuth bei Soissons 1515 — Paris 1572; Professor der Philosophie in Paris, in der Bartholomäusnacht als Hugenott ermordet), Scholarum mathematicarum libri XXXI. Basileæ 1569 in 4., — **Ludolph** van Colen oder Ceulen (Hildesheim 1539 — Leyden 1610; Professor der Mathematik und Kriegsbaukunst in Leyden; vergl. Notice sur Ludolphe van Colen, par G. A. Vorsterman van Oijen in Boncompagni's Bulletino, Maggio 1868), De arithmetische en geometrische fondamenten. Leyden 1595 (Auch 1615; lat. durch Will. Snellius, Lugd. Bat. 1615 in 4., auch Amstel. 1617), — William **Oughtred** (Eaton 1574 — Albury 1660; Pfarrer in Albury in Surrey), Arithmeticæ in numeris et speciebus institutio, quæ tum logisticæ, tum analyticæ, atque totius mathematicæ clavis est. Londini 1631 in 8. (Die: Londini 1648, Oxoniæ 1652, etc. unter dem Titel Clavis mathematica erschienenen Werke sind wahrscheinlich neue Ausgaben), — Caspar **Schott** (Königshofen bei Würzburg 1608 — Würzburg 1666; Jesuit, Professor der Mathematik zu Palermo und Würzburg), Cursus mathematicus.

Herbipoli 1661 in fol. (Auch Frankfurt 1674, Bamberg 1677), — John **Wallis**, Treatise of Algebra both historical and practical. London 1685 in fol., — Jacq. **Ozanam**, Cours de mathématiques. Paris 1693, 7 Vol. in 8., — Jacq. **Ozanam**, Recréations mathématiques. Paris 1694, 2 Vol. in 8. (Nouv. édit. 1724, 4 Vol.; ferner 1735, — umgearbeitet durch Montucla 1778, — engl. durch Ch. Hutton, London 1803), — Leonh. **Euler**, Einleitung zur Rechenkunst. Petersburg 1738—1740, 2 Bde. in 8., — Thomas **Simpson** (Market-Bosworth 1710 — Market-Bosworth 1761; erst Weber und Schulmeister in Derby, zuletzt Professor der Mathematik an der Militärschule zu Woolwich), A Treatise of Algebra. London 1745 in 8., — Wenzeslaus Johann Gustav **Karsten** (Neu-Brandenburg 1732 — Halle 1787; erst Professor der Logik zu Rostock, dann der Mathematik und Physik zu Halle; Grossoheim des in 4 Erwähnten), Mathesis theoretica elementaris atque sublimior. Rostochii 1760 in 8., — Etienne **Bezout** (Nemour 1730 — Gatinois 1783; Examinator und Academiker in Paris; vergl. Eloge in Mém. de Par. 1783), Cours de mathématiques. Paris 1770, 4 Vol. in 8. (2 éd. 1800), — Leonh. **Euler**, Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersburg 1771, 2 Bde. in 8. (holländ., Amsterdam 1773; franz. mit Anmerkungen von Lagrange, Lyon 1794; engl. durch Francis Horner, London 1828), — Georg von **Vega** (Sagoritza 1756 — Wien 1802; Artillerieoberst und Professor der Mathematik in Wien), Vorlesungen über die Mathematik. Wien 1782—1800, 4 Bde. in 8. (Spätere Aufl. von W. Matzka), — Joh. Georg **Prändel** (München 1759 — München 1816; Professor der Mathematik und Physik zu München), Algebra nebst ihrer litterärischen Geschichte. München 1795 in 8., — Sylvestre-François **Lacroix** (Paris 1765 — Paris 1843; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris), Eléments d'algèbre. Paris 1799 in 8. (17 éd. 1842), — Simon-Antoine-Jean **Lhuilier** (Genf 1750 — Genf 1840; erst Informator zu Warschau, dann Privatgelehrter zu Tübingen, zuletzt Professor der Mathematik zu Genf; vergl. Bd. 1 meiner Biographieen), Anleitung zur Elementar-Algebra. Tübingen 1799—1801, 2 Bde. in 8., — Bernhard Friedrich **Thibaut** (Harburg 1775 — Göttingen 1832; Professor der Mathematik in Göttingen), Grundriss der reinen Mathematik. Göttingen 1801 in 8. (5. A. 1831), — Sim. **Lhuilier**, Elémens raisonnés d'algèbre. Genève 1804, 2 Vol. in 8., — Meyer **Hirsch** (Friesack in Mittelmark 1765 — Berlin 1851; Privatlehrer der Mathematik in Berlin), Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung. Berlin 1804 in 8. (8. A. 1853), — Louis-Benjamin **Francœur** (Paris 1773 — Paris 1849; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris), Cours complet de mathématiques pures. Paris 1809, 2 Vol. in 8. (4 éd. 1837; deutsch von Külp, Bern 1842—1846), — A. L. **Cauchy**, Cours d'analyse, Paris 1821 in 8., — Louis-Etienne **Lefébure** de Fourcy (Paris 1785; Professor der Mathematik in Paris), Leçons d'algèbre. Paris 1826 in 8. (5 éd. 1844), — Joseph Johann von **Littrow** (Bischof-Teinitz in Böhmen 1781 — Wien 1840; erst Professor der Astronomie zu Krakau und Kasan, dann Co-Director der Sternwarte zu Ofen, zuletzt Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Wien; vergl. seine, von seinem Sohne und Nachfolger Karl Ludwig, geboren zu Kasan 1811, herausgegebenen und mit einer Biographie versehenen: Vermischten Schriften, Stuttgart 1846, 3 Bde. in 8.), Elemente der Algebra und Geometrie. Wien 1827 in 8., — A. v. **Ettingshausen**, Vorlesungen über die höhere Mathematik. Wien 1827, 2 Bde. in 8., — Ferdinand Rudolf **Hassler** (Aarau 1770 — Boston 1843; Professor der Mathematik zu West-Point und Superintendent der amerikanischen Küsten-

vermessung; vergl. Bd. 2 meiner Biographieen), Elements of Arithmetic theoretical and practical. New-York 1827 in 8. (Stereot.; deutsch Aarau 1834), — Mathias **Mayer**-Dalmbert (1786—1843; Chef einer Vorbereitungsschule auf die École polytechnique) et **Choquet**, Traité élémentaire d'algèbre. Paris 1832 in 8. (5 éd. 1849), — J. J. v. **Littrow**, Anleitung zur höhern Mathematik. Wien 1836 in 8., — Eduard **Heis** (Cöln 1806; Professor der Mathematik, Physik und Astronomie in Cöln, Aachen und Münster), Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Köln 1837 in 8. (20. A. 1868), — J. J. v. **Littrow**, Kurze Anleitung zur gesammten Mathematik. Wien 1838 in 12., — Johann Heinrich Traugott **Müller** (Sorau in der Niederlausitz 1797; erst Lehrer der Mathematik und Physik zu Naumburg, dann Director der Realgymnasien zu Gotha und Wiesbaden), Lehrbuch der Mathematik. Halle 1838—1844, 2 Bde. in 8., — Fr. X. **Pollak**, Professor der Mathematik und Naturgeschichte zu Dilingen: Sammlung mathematischer Aufgaben. Augsburg 1840—1847, 3 Bde. in 8., — Joh. Karl **Tobisch** (Meseritz in Böhmen 1793 — Breslau 1855; Professor der Mathematik zu Breslau), Beiträge zur Vergleichung der Algebra im 16. Jahrhundert mit der in unsern Tagen. Breslau 1846 in 4., — August Christian Wilhelm Hermann **Scheffler** (Braunschweig 1820; früher braunschw. Bauconducteur, jetzt Baurath), Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen. Braunschweig 1846 in 8., — F. E. **Feller** und Carl Gustav **Odermann**, Director der Handelslehranstalt zu Leipzig: Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. Leipzig 1851 in 8. (10. A. 1866), — David **Giffhorn**, Lehrer der Mathematik zu Braunschweig: Sammlung derjenigen elementar mathematischen Aufgaben, welche auf den preussischen Gymnasien in den letzten Jahren als Maturitätsaufgaben den Abiturienten gestellt sind. Braunschweig 1862 in 8., — H. B. **Lübsen**, Lehrbuch der Analysis. Leipzig 1853 in 8. (4. A. 1868), — M. **Cantor**, Elementar-Arithmetik. Heidelberg 1855 in 8., — Johannes **Orelli** (Mettmenstetten 1822; Professor der Mathematik am Schweizerischen Polytechnikum), Algebra. Zürich 1856 in 8., — Charl. **Sturm**, Cours d'analyse. Paris 1857—1859, 2 Vol. in 8. (3 éd. 1868), — Jacques **Babinet** (Lusignan 1794; Professor der Physik und Mitglied der Academie zu Paris) et **Housel**, Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation. Paris 1857 in 8., — Richard **Baltzer**, Professor der Mathematik zu Dresden: Die Elemente der Mathematik. Leipzig 1860—1862, 2 Bde. in 8. (2. A. 1865—1867; ital. durch Cremona, Genua 1868), — Moritz **Stern** (Frankfurt 1807; Professor der Mathematik zu Göttingen), Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1860 in 8., — J. L. A. **Lecointe**, Solutions développées de 300 problèmes proposés pour l'admission au grade de Bachelier. Paris 1865 in 8., — etc."

6. Addition und Subtraction. Eine Zahl, welche entsteht, indem man zu einer Zahl so Einheiten zählt, wie die Einheit gezählt werden musste, um eine andere Zahl zu bilden, heisst **Summe** dieser Zahlen, ihrer **Summanden** (Posten) oder **Glieder**, — die Operation des Summirens **Addition**. Wenn man dagegen Einheiten abzählt (rückwärts zählt), so nennt man die Operation **Subtraction**, ihr Resultat **Differenz** (Rest), — die Zahl, von der man abzählt, **Minuend**, — diejenige, welche man abzählt, **Subtrahend**. — Sind

zwei Operationen, wie Addition und Subtraction, so beschaffen, dass es gleichgültig ist, ob man beide von ihnen in gleichem Maasse, oder keine von ihnen vornimmt, so heissen sie **im Gegensatze stehend**, und es kann dieser Gegensatz auch auf die Grössen übergetragen werden, mit denen sie vorzunehmen sind: So gehen aus additiven und subtractiven Zahlen die **positiven** und **negativen** Zahlen oder die Zahlen mit Vorzeichen hervor, und Summe und Differenz vereinigen sich zur Summe mit Rücksicht auf das Vorzeichen oder zur sog. **algebraischen Summe.** Für Addition und positive Zahl hat man das gemeinschaftliche Zeichen (+), für Subtraction und negative Zahl (—) gewählt, und es erklärt sich hieraus leicht die Bedeutung von $a + b = c$, oder $c - a = b$, — von $a + (b - c) - (d - e) = a + b - c - d + e$, — etc.

Aus den Einheiten von $3 = 1 + 1 + 1$ folgt durch successives
Zuzählen zu 5 . . . . 6 7 $8 = 5 + 3$
Abzählen von 5 . . . . 4 3 $2 = 5 - 3$
Da ferner

$$5 + 3 = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{5} + \underbrace{1 + 1 + 1}_{3}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1}_{3} + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}_{5} = 3 + 5$$

und entsprechend immer

$$a + b = b + a$$

so ist die Grösse einer Summe von der Anordnung der Summanden unabhängig. — Nach Cantor und Baltser wurden in Italien und Frankreich nach dem Vorgange von **Pacioli** (vergl. 2) Addition und Subtraction früher durch p (piu oder plus) und m (meno oder minus) angedeutet, — in Deutschland dagegen (wofür sich Letzterer auf „M. W. Drobisch, De Widmanni compendio arithmetica mercatorum A. 1489 edito. Lipsiæ 1840“ beruft) spätestens nach der Mitte des 15. Jahrhunderts (also etwa zu derselben Zeit, wo sie nach Libri auch in den Schriften von Leonardo da Vinci erscheinen sollen), und jedenfalls allerspätestens durch **Rudolff** mit den Zeichen + und —, die vielleicht aber nur Deformationen jener Buchstaben p und m sein möchten. Wie langsam sich jedoch der Gebrauch dieser Zeichen verbreitete, geht z. B. daraus hervor, dass noch Rudolf von **Graffenried** (Burgdorf 1584 — Dalmatien 1648; Landvogt in Unterseen; vergl. Bd. 1 meiner Biographieen) in seiner „Arithmetica logistica. Bern 1619 in 4“ als Subtractionszeichen nicht —, sondern ÷ brauchte, auch das Gleichheitszeichen noch nicht kannte. — Das Einschliessen von mehrtheiligen Grössen (sog. Binomen, Trinomen oder Polynomen) in Klammern, um dadurch anzuzeigen, dass man sie wenigstens momentan als eintheilige betrachten solle, wurde nach Cantor zuerst von Albert **Girard** (15..—1633, ein als Stevin's Schüler betrachteter flamändischer Mathematiker) in der Schrift „Invention nouvelle dans l'algèbre tant pour la solution des équations que pour recoignoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de cette divine science. Amsterdam 1629“ practicirt.

7. Multiplication und Division. Eine Zahl, welche entsteht, indem man eine Zahl, den sog. **Multiplicand,** so als Summand setzt, wie

eine andere Zahl, der **Multiplicator,** aus der Einheit entstanden ist, nennt man **Product** dieser beiden Zahlen oder **Factoren,** — die Operation **Multiplication,** und ihren Gegensatz **Division,** — den Gegensatz eines Factors **Divisor** oder **Reciproke;** die Operationszeichen sind ($\times$ oder .) und (: oder auch ein sog. Bruchstrich), so dass $a \times b = a \,.\, b = c$ und $c : a = \frac{c}{a} = b$ sich entsprechen, und $\frac{1}{a} \,.\, a = 1$ ist. Die Zahl, welche zählt, wie oft man einen Divisor von einer Zahl, dem **Dividend,** abzählen kann, heisst **Quotient,** — ein allfälliger Ueberschuss der Division **Rest,** so dass, wenn $a \,.\, b + c = d$ und $c < b$, a der Quotient und $c = \left[\frac{d}{b}\right]$ der Rest der Division von d durch b ist. Bezeichnet man unendlich klein und gross mit 0 und ∞, so ist $1 : 0 = \infty$ und $1 : \infty = 0$, dagegen $0 : 0$ unbestimmt, wenn auch (62) zuweilen bestimmbar. Ein Product aus zwei ($a.a = a^2$), drei ($a.a.a = a^3$), etc. gleichen Factoren heisst **Quadrat, Cubus,** etc. Lässt ein Divisor keinen Rest, so heisst er **Theiler,** — eine Zahl, welche keinen Theiler hat, **Primzahl,** während zwei Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, **Primzahlen unter sich,** — zwei Zahlen α und β aber, für welche $\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right] = \left[\frac{\beta}{\gamma}\right]$, **congruent in Beziehung auf den Modulus** γ ($\alpha \equiv \beta\,(\gamma)$ nach Gauss) genannt werden. — Haben die Factoren Vorzeichen, so hat das Product mit dem Multiplicand gleiches oder verschiedenes Zeichen, je nachdem der Multiplicator positiv (durch Wiederholung der Einheit entstanden) oder negativ (durch Wiederholung des Gegensatzes der Einheit entstanden) ist, d. h.: Gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Product.

Nach der gegebenen Definition des Productes folgt z. B. aus

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \quad \textbf{sofort} \quad 7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$

Da ferner

$$39 - 9 - 9 - 9 - 9 = 3 \quad \textbf{oder} \quad 39 - 9 \times 4 = 3 \quad \textbf{oder} \quad 39 = 9 \times 4 + 3$$

so gibt die Division von 39 durch 9 den Quotienten 4 und lässt den Rest 3; es ist somit

$$\frac{39}{9} = 4 + \frac{3}{9} = 4\,{}^3/_9 \qquad \textbf{und} \qquad \left[\frac{39}{9}\right] = 3$$

Analog findet man

$$\frac{21}{9} = 2 + \frac{3}{9} = 2\,{}^3/_9 \qquad \textbf{und} \qquad \left[\frac{21}{9}\right] = 3$$

also ist auch $39 \equiv 21\,(9)$. — In dem Schema

$$\underbrace{\left.\begin{array}{ccccccc} a & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a & a & a & \cdots & \cdots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ a & a & a & a & \cdots & \cdots & a \end{array}\right\} c}_{b}$$

ist jede Horizontalreihe $a \times b$, also, da c solcher Horizontalreihen sind, das Ganze $(a \times b) \times c$; anderseits aber ist jede Verticalreihe $a \times c$, also, da b solcher Verticalreihen sind, das Ganze auch $(a \times c) \times b$, also muss

$$(a \times b) \times c = (a \times c) \times b \qquad \text{und für } a = 1 \qquad b \times c = c \times b$$

sein. Letztere Gleichheit sagt aus, dass Multiplicator und Multiplicand verwechselt werden dürfen, — und da in obigem Schema die Grösse a offenbar $b \times c$ mal erscheint, also der Werth des Ganzen auch $a \times (b \times c) = (b \times c) \times a$ ist, so besteht überdiess auch die Doppelgleichheit

$$(a \times b) \times c = (a \times c) \times b = (b \times c) \times a$$

welche aussagt, dass ein Product aus drei Factoren erhalten werde, wenn man das Product irgend zweier derselben mit dem dritten multiplicire, — etc. — Da $\pm b = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1$, so ist bei Multiplication mit $+b$ die zu multiplicirende Grösse selbst, bei Multiplication mit $-b$ aber ihr Gegensatz zu wiederholen, also ist

$$(\pm a) \times (+b) = \pm a \pm a \pm \ldots \pm a = \pm c \quad \text{oder} \quad (+) \times (+) = +, \quad (-) \times (+) = -$$
$$(\pm a) \times (-b) = \mp a \mp a \mp \ldots \mp a = \mp c \qquad (+) \times (-) = -, \quad (-) \times (-) = +$$

oder es besteht die erwähnte Zeichenregel. — Das Multiplicationszeichen ($\times$) kömmt ausnahmsweise schon bei **Rudolff** vor (vergl. 13), aber in regelmässigen Gebrauch scheint es erst um 1631 durch **Oughtred** (vergl. 5) gekommen zu sein. Die Zeichen (. und :) wurden nach Baltzer in ihrer jetzigen Bedeutung kaum vor **Leibnitz** üblich, während dagegen der Bruchstrich muthmasslich gleichzeitig mit den indischen Zahlzeichen eingeführt wurde, und jedenfalls schon bei **Fibonacci** (vergl. 2) vorkömmt. In der von Joh. Heinrich **Rahn** (Zürich 1622 — Zürich 1676; Landvogt in Kyburg, Zeugherr und Seckelmeister von Zürich; vergl. Bd. 4 meiner Biographieen) bearbeiteten „Teutschen Algebra. Zürich 1659 in 4. (Engl. durch Th. Branker, London 1668 in 4)" erscheinen für Multipliciren und Dividiren noch die Zeichen (✱ und ÷). In diesem überhaupt merkwürdigen Werke (für dessen, früher falsch dargestellte, Geschichte ich auf erwähnten Bd. 4 verweise) findet sich auch die erste etwas ausgedehnte, nämlich eine bis 24000 gehende (in der engl. A. bis 100000 fortgesetzte) Factorentafel. Jetzt besitzt man allerdings durch Joh. Karl **Burckhardt** (Leipzig 1773 — Paris 1825; Nachfolger von Lalande in Direction der Sternwarte auf der École militaire und Mitglied der Academie in Paris) „Tables des diviseurs pour tous les nombres du 1, 2, 3 Million. Paris 1814 bis 1817 in 4."; ferner von Joh. Martin Zacharias **Dase** (Hamburg 1824 — Hamburg 1861; Schnellrechner) „Factoren-Tafeln für alle Zahlen der 7, 8, 9 Million. Hamburg 1862—1865 in 4", — und die Factoren der 4, 5, 6 Million finden sich wenigstens, wie Gauss im Vorwort zu Dase mittheilt, in einem von **Crelle** der Berliner-Academie zur Aufbewahrung übergebenen Manuscripte.

8. Verschiedene betreffende Regeln. Eine Summe wird multiplicirt, indem man jedes Glied multiplicirt; so z. B. ist

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2 \qquad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad \mathbf{1}$$

$$a^2 + b = (a + x)^2 \qquad \text{wenn angenähert} \qquad x = \frac{b}{2a} \qquad \mathbf{2}$$

Werden zwei Factoren und ihr Product, oder Dividend und Divisor, nach derselben Regel (z. B. lexicographisch) geordnet, so ist das erste Glied des Productes oder Quotienten gleich dem Producte oder Quotienten der ersten Glieder der Factoren oder des Dividends und

Divisor's. — Ein Product wird multiplicirt, indem man Einen Factor multiplicirt. Ein Bruch (Quotient) bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder **erweitert**, — wird dagegen multiplicirt, indem man den Zähler multiplicirt oder den Nenner dividirt. — Die kleinste Zahl, in welcher sämmtliche Nenner mehrerer Brüche als Factoren enthalten sind, nennt man kleinsten **gemeinschaftlichen Nenner**.

Hat man nach der im Texte gegebenen, für sich klaren Regel das erste Glied des Quotienten gefunden, so zieht man sein Product mit dem Divisor von dem Dividend ab, sucht aus dem Reste in gleicher Weise das zweite Glied des Quotienten, etc. So findet man z. B. dass

$$\frac{7aab - (\tfrac{1}{2}abb - 4bb - 16aaa) + 8ab}{8aa + 4b - \tfrac{1}{2}ab} = \frac{32a^3 + 14a^2b + 16ab - ab^2 + 8b^2}{16a^2 - ab + 8b}$$
$$= 2a + b$$

Entsprechend findet man

$$\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{b^n}{a^n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{b^{n+1}}{a^n(a+b)} \qquad 8$$

wo dem $(n+1)^{sten}$ Gliede des Quotienten zur nothwendigen Ergänzung ein aus Rest und Divisor gebildeter Bruch beigefügt wurde; hätten wir diess vergessen, so würden wir daraus für $a = 1 = b$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

und dadurch mit Guido **Grandi** (Cremona 1671 — Pisa 1742; Professor der Mathematik zu Pisa) eine Schein-Erklärung dafür gefunden haben, wie Gott die Welt aus Nichts erschaffen konnte. — Da ferner

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b} = \frac{a + a + \ldots + a}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

so wird ein Bruch multiplicirt, indem man den Zähler multiplicirt, — ein Product dividirt, indem man Einen Factor dividirt. — Aus

$$a = b \cdot q \quad \text{folgen} \quad ac = bcq \quad a : c = (b : c)\, q$$

Es sind somit als Werthe von q

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a : c}{b : c}$$

oder es wird der Werth eines Bruches nicht verändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt (erweitert) oder dividirt (abkürzt). — Nach dem Vorhergehenden ist $a : bd$ eine Zahl, welche d mal gesetzt $a : b$ ergibt, also ist

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} + \frac{a}{bd} + \ldots + \frac{a}{bd} = \frac{ac}{bd}$$

oder es wird ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. Hieraus folgt hinwieder

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{cd}{dc} = \frac{cd}{cd} = 1$$

d. h. es stehen $c : d$ und $d : c$ als Factoren im Gegensatze, oder es entspricht dem Factor $c : d$ der Divisor oder die Reciproke $d : c$ und umgekehrt. Es ist daher

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

oder es wird ein Bruch durch einen Bruch dividirt, indem man ihn mit dem

umgestürzten Bruche (d. h. seinen Zähler mit dem Nenner und seinen Nenner mit dem Zähler) multiplicirt. — Um zu einer Reihe von Brüchen, z. B. zu

$$\frac{1}{6} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{3}{8}$$

wir wollen annehmen behuffs ihrer Addition, den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner g zu finden, zerlegt man ihre Nenner n in die Primfactoren p, nimmt von dem ersten alle, von jedem folgenden nur die neuen Factoren, und multiplicirt sie, — wie diess beifolgendes Schema zeigt:

z	n	p	e	z'
1	6	**2** . **3**	60	60
3	4	2 . **2**	90	270
5	12	2 . 2 . 3	30	150
4	9	3 . **3**	40	160
7	10	2 . **5**	36	252
3	8	2 . 2 . **2**	45	135
		$g = 2^3 . 3^2 . 5 =$	$\frac{360}{2}$:	1027
				807

Erweitert man sodann jeden Bruch mit dem Producte e der seinem Nenner fehlenden Factoren, und addirt die so erhaltenen neuen Zähler z', so erhält man als Summe aller Brüche

$$\frac{1027}{360} = 2\ {}^{307}/_{360}$$

Da nach dem Vorhergehenden

$$\frac{a}{b} - \frac{a-c}{b-c} = \frac{a(b-c)}{b(b-c)} - \frac{(a-c)b}{(b-c)b} = \frac{c(b-a)}{b(b-c)}$$

so wird ein Bruch, wenn man seinen Zähler und Nenner um gleich viel vermindert, selbst kleiner oder grösser, je nachdem er ächt oder unächt ist. — Da

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{2mn + (m-n)^2}{mn} = 2 + \frac{(m-n)^2}{mn}$$

so ist die Summe einer Zahl und ihrer Reciproken immer grösser als Zwei. — Soll man eine Zahl suchen, deren Quadrat mit einer gegebenen Zahl übereinstimmt, d. h. eine sog. **Quadratwurzel** ausziehen, so lässt sich nach 2 (unter Voraussetzung vorläufiger Kenntniss der in 12 eingeführten Decimalbrüche) eine dafür gemachte Annahme leicht nach und nach verbessern. Ist z. B.

$a^2 + b$ . . .	$= 17$	so hat man für			$a = 4$
a^2	16				
b	1	folglich $x = b : 2a$	$= 0{,}1$	und	$a' = 4{,}1$
$2ax + x^2$ . .	0,81				
b'	0,19	$x' = b' : 2a'$	$= 0{,}02$		$a'' = 4{,}12$
$2a'x' + x'^2$.	0,1644				
b''	0,0256	$x'' = b'' : 2a''$	$= 0{,}003$		$a''' = 4{,}123$
$2a''x'' + x''^2$.	0,024729				
b'''	0,000871	etc.			

Ist eine Grösse, wie z. B. diese Quadratwurzel von 17, weder durch die Einheit noch durch ihre Unterabtheilungen genau ausdrückbar, so heisst sie **incommensurabel** (irrational, surdisch); da sie aber immer mit jeder beliebigen Annäherung durch eine commensurable Zahl ersetzt werden kann, so darf man von der besondern Behandlung incommensurabler Grössen ganz gut Umgang nehmen. — Ist

$$m = \alpha . 100 + \gamma \qquad n = \beta . 100 + \gamma \qquad a\gamma = \delta . 100 + \varepsilon$$

so hat man offenbar

$$am = (a\alpha + \delta)\, 100 + \varepsilon \qquad an = (a\beta + \delta)\, 100 + \varepsilon$$

d. h. die Gleichvielfachen zweier Decimalzahlen (vergl. 12), deren zwei letzte Stellen übereinstimmen, stimmen in diesen beiden Stellen ebenfalls noch mit einander überein, — oder nach der Ausdrucksweise in 7: Wenn

$$m \equiv n\,(100) \qquad \text{so ist auch} \qquad am \equiv an\,(100) \tag{4}$$

Diese Eigenschaft hat **Crelle** bei Anlage seiner „Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grössern Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Berlin 1820, 2 Vol. in 8. (2. Stereotypausgabe von Bremiker 1864 in fol.)", welche namentlich in Fällen, wo ganze Zahlenreihen mit derselben Zahl zu multipliciren sind, eine ausserordentliche Zeitersparniss gewähren, — in sehr geschickter Weise benutzt. — Wenn ferner

$$\alpha = m\gamma + r \qquad \beta = n\gamma + r \qquad \delta = p\gamma + s \qquad \varepsilon = q\gamma + s$$

so hat man offenbar auch

$$\alpha + \delta = (m + p)\gamma + r + s \qquad \alpha . \delta = (mp\gamma + ms + pr)\gamma + rs$$
$$\beta + \varepsilon = (n + q)\gamma + r + s \qquad \beta . \varepsilon = (nq\gamma + ns + qr)\gamma + rs$$

und es bestehen somit die Lehrsätze: Wenn

$$\alpha \equiv \beta\,(\gamma) \quad \delta \equiv \varepsilon\,(\gamma) \quad \text{so ist auch} \quad \alpha + \delta \equiv \beta + \varepsilon\,(\gamma) \quad \alpha . \delta \equiv \beta . \varepsilon\,(\gamma) \tag{5}$$

folglich auch

$$p\alpha \equiv p\beta\,(\gamma) \qquad \alpha^p \equiv \beta^p\,(\gamma) \tag{6}$$

Es sind diese in 13 zur Verwendung kommenden Sätze, in deren einem 4 als specieller Fall enthalten ist, einige kleine Proben aus den ersten Elementen der sog. **Zahlenlehre**, für welche auf „**Legendre**, Essai sur la théorie des nombres. Paris 1798 in 4. (3 éd. 1830, 2 Vol.), — **Gauss**, Disquisitiones arithmeticæ. Lipsiæ 1801 in 8. (Franz. von Poulet-Delisle, Paris 1807 in 4.), — **Jacobi**, Canon arithmeticus, Berolini 1839 in 4., — H. **Schwarz**, Professor der Mathematik in Halle, Elemente der Zahlentheorie. Halle 1855 in 8., — etc.", und ganz besonders auch auf das von Julius Wilhelm Richard **Dedekind** (Braunschweig 1831; Professor der Mathematik erst am Schweizerischen Polytechnikum, jetzt in Braunschweig) aus dem Nachlasse seines Lehrers herausgegebene Werk „Lejeune-**Dirichlet**, Vorlesungen über Zahlentheorie. Braunschweig 1863 in 8." zu verweisen ist.

9. Elevation und Extraction. Setzt man eine Zahl, die sog. **Basis**, so als Factor zur Einheit, wie eine andere Zahl, der **Exponent**, aus dieser Einheit entstanden ist, so erhält man eine **Potenz** der erstern Zahl, oder hat eine **Elevation** vollzogen, den Gegensatz einer **Extraction**. Bezeichnen a, b, c der Reihe nach Basis, Exponent und Potenz, so schreibt man

$$a^b = c \qquad \text{oder} \qquad a = c^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{c}$$

wo das die Extraction andeutende Zeichen $\sqrt{}$ (mit Index b: b^{te}, ohne Index: zweite) **Wurzel** genannt wird, und es ist nach Definition

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = 1 : a^n \qquad a^{m:n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Gerade Potenzen sind positiv, — ungerade haben das Zeichen der Basis. Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl kann daher

nicht auf die gewöhnliche Einheit reducirt werden, sondern erfordert die neue Einheit $i = \sqrt{-1}$, so dass

$$i^{4n} = +1 \qquad i^{4n+1} = +i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$$

und $a + bi$ eine unmögliche, sog. **complexe** Zahl ist. Aus $a + b.i = c + d.i$ folgt $a - c = (d - b)i$, was nur für $a = c$ und $b = d$ möglich ist.

Die früher allgemein und jetzt noch vielfach gebrauchte Definition „Potenz ist ein Product aus zwei oder mehreren gleichen Factoren“ passt unmittelbar nur für ganze und positive Exponenten, und ist daher zu enge, — während die oben gegebene alle Fälle umfasst: Da z. B. 3 durch eine gewisse Wiederholung der Einheit, dagegen —3 durch entsprechende Wiederholung des Gegensatzes der Einheit, und $^3/_4$ durch ebensolche Wiederholung einer Zahl entsteht, welche selbst 4 mal gesetzt werden muss, um die Einheit hervorzubringen, — da ferner der Gegensatz des Factors 16 der Divisor $^1/_{16}$, 2 aber eine Zahl ist, welche 4 mal als Factor zu 1 gesetzt 16 gibt, — und endlich 0 andeutet, dass die Einheit gar nicht gesetzt werden soll, so hat man nach Definition

$$16^3 = 1.16.16.16 = 4096 \qquad 16^{-3} = 1.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}.\frac{1}{16} = \frac{1}{4096}$$
$$= 2^4.2^4.2^4 = 2^{12} \qquad 16^0 = 1$$
$$= 2^3.2^3.2^3.2^3 = 8^4 \qquad 16^{3/4} = 1.2.2.2 = 8 = \sqrt[4]{16^3}$$

Das Zeichen i, sowie den allgemeinen Gebrauch der complexen Zahlen führte **Gauss** ein, und nannte das Product

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

der beiden conjugirten Zahlen $a + bi$ und $a - bi$ ihre **Norm**, während dagegen **Cauchy** die positive Quadratwurzel aus jenem Producte ihren **Modulus** hiess. — Während oben erst die aus zwei unvereinbaren Theilen a und bi bestehende Zahl **unmöglich** genannt wurde, so bezeichnen Manche schon den zweiten Theil für sich als eine **imaginäre** Zahl, — ja noch Andere haben sich sogar bemüssigt gefunden, auch aus $i^4 = -1$ eine Einheit abzuleiten, deren Vielfache sie dann **wahnsinnige** Zahlen zu nennen vorschlugen. — Schon **Diophant** und seine frühesten Nachfolger nannten eine Rechnungszahl *ἀριθμός*, res, cosa, radix, — ihr Quadrat *δύναμις*, potentia, potestas, census, censo, — ihre dritte Potenz *κῦβος*, cubus, — etc.; bei **Rudolff** heisst die Einheit, zu der die Basis als Factor gesetzt wird, Dragma (φ), die erste Potenz Radix (𝔯), die zweite Census (𝔷), die dritte Cubus (𝔠𝔢), die vierte Zensdezens (𝔷𝔷), etc.; nach Baltzer brauchte der aus Bologna gebürtige Ingenieur Rafaello **Bombelli** in seinem Werke „L'Algebra parte maggiore dell' Aritmetica divisa in tre libri. Bologna 1572 in 4.“ schon in allgemeiner Bedeutung den Namen dignitas, während potestas durch **Vieta** üblich wurde. Die erste Spur von Zahlenexponenten findet sich nach Cantor in dem Werke „Estienne de **La Roche**, Arismétique et géométrie. Lyon 1520“, indem La Roche wenigstens die Exponenten 1, 2, 3 brauche, während er die zweite Wurzel mit R, die dritte mit R^3, etc. bezeichne. **Stevin** schrieb in seiner Algebra von 1585 für die auf einander folgenden Potenzen einer Grösse ①, ②, ③, etc.; für die einer 2., 3., etc. Grösse setzte er diesen Zeichen sec., ter., etc. vor; zweite Wurzeln bezeichnete er mit $\sqrt{}$, dritte mit $\sqrt{③}$, etc., so dass z. B. seine Gleichungen

$$③ = -5② + 6① - 9 \quad \text{mit} \quad x^3 = -5x^2 + 6x - 9$$
$$\sec \sqrt{③} = 4 \sec ① + 7 \qquad \sqrt[3]{y} = 4y + 7$$

etc., gleichbedeutend wären. Pierre **Hérigone** (1... — 16..; Mathematiker in Paris) schlug etwas später in seinem „Cours mathématique demonstré d'une nouvelle, briefve et claire methode, par notes reelles et universelles, qui peuvent estre entendües facilement sans l'usage d'aucune langue. Paris 1634, 6 Vol. in 8." die jetzt gebräuchliche Bezeichnung vor, und diese wurde sodann durch **Descartes** definitiv eingeführt. Immerhin braucht **Rahn** in seiner Algebra (vergl. 7) neben solchen Exponenten für Involviren (Potenziren) und Evolviren (Extrahiren) noch die besondern Zeichen ⓢ und ᴍ, so dass z. B. bei ihm 1ⓢ2 und 4ᴍ3 bedeuten, es solle der erste Ausdruck in's Quadrat erhoben, und aus dem vierten die dritte Wurzel ausgezogen werden.

10. Verschiedene betreffende Regeln. Aus (9) folgen die Regeln

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad a^b : a^c = a^{b-c} \qquad (a^b)^c = a^{b \cdot c} \qquad \mathbf{1}$$

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c \qquad \mathbf{2}$$

Ferner ergibt sich durch beidseitiges Quadriren, dass die Gleichheiten

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}} \qquad \mathbf{3}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}} \qquad \mathbf{4}$$

bestehen.

Die Regeln 1 und 2 gehen unmittelbar aus dem Begriffe der Potenz hervor, und lassen sich ohne Schwierigkeit in Worte umsetzen. Ferner findet man successive

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{[\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}]^2}$$
$$= \sqrt{a + \sqrt{b} + a - \sqrt{b} \pm 2\sqrt{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})}}$$
$$= \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}$$

womit 3 erwiesen ist. Ersetzt man endlich in 3 : a durch $\frac{1}{2}a$ und b durch $\frac{1}{4}(a^2 - b)$, so ergibt sich 4, für deren Anwendung z. B. 412 verglichen werden kann.

11. Die Logarithmen. Ist eine Folge von Zahlen einer Folge von Potenzen einer gewissen Zahl, oder Basis, gleich, so heissen die Exponenten **Logarithmen** der Zahlen in Beziehung auf jene Basis, und anstatt

$$a^b = c \qquad \text{schreibt man} \qquad b = \overset{a}{\log}\, c$$

Hiefür geben aber die Potenzregeln (10 : 1)

$$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b, \quad \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b, \quad \lg(a^b) = b \cdot \lg a \qquad \mathbf{1}$$

und nennt man die halbe Summe zweier Zahlen ihr **arithmetisches**, die zweite Wurzel aus ihrem Producte ihr **geometrisches Mittel**, so ist der Logarithmus des geometrischen Mittels zweier

Zahlen gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Logarithmen. — Setzt man $a : b = x$, so ist

$$\lg(a+b) = \lg a + \lg\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad \lg(a-b) = \lg a - \lg\frac{x}{x-1} \qquad \mathbf{2}$$

und man kann somit aus Tafeln, welche für das Argument $\log x$ die Werthe von $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ und $\log\frac{x}{x-1}$ geben, zu den Logarithmen zweier Zahlen die Logarithmen ihrer Summe und Differenz finden [IV].

In das Verdienst der Erfindung der Logarithmen, durch welche nach 1 gewissermassen jede höhere Rechnungsoperation auf die nächst niedrigere reducirt wird, theilen sich **Napier**, vergl. dessen „Mirifici logarithmorum canonis descriptio. Edinburgi 1614 in 4.", — und **Bürgi**, vergl. dessen „Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen. Prag 1620 in 4."; ja Letzterer wäre nach Keppler's Zeugniss Ersterem lange zuvorgekommen, wenn er nicht mit der Publication seiner Tafeln so über Gebühr gezaudert hätte. Vergl. die in 3 citirten Schriften, sowie „**Gehler**, Historiæ logarithmorum naturalium primordia. Lipsiæ 1776 in 4." — Für die wirkliche Berechnung der Logarithmen nach der erwähnten Beziehung

$$\log\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log(a.b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b) \qquad \mathbf{3}$$

sowie für die Aufzählung der wichtigsten Logarithmentafeln vergl. 14, — für die Berechnung durch Reihen 47 und 48. — Die durch 2 bestimmten Summen- und Differenz-Logarithmen werden auch häufig nach ihrem Erfinder **Gauss** benannt; sie sind in verschiedene der neuern Logarithmentafeln aufgenommen, und auch extra publicirt worden, — vergl. z. B. „Theodor Ludwig **Wittstein** (Münden 1816; Professor der Mathematik in Hannover), Siebenstellige Gaussische Logarithmen. Hannover 1866 in 8."

12. Die Zahlsysteme. Jede ganze oder gebrochene Zahl N lässt sich durch Potenzen irgend einer Zahl k ausdrücken, so dass (wenn α, β, ... kleiner als k)

$$N = \alpha . k^{a} + \beta . k^{a-1} + \ldots + \lambda . k^{1} + \mu + \nu . k^{-1} + \ldots$$

oder, wenn die Potenzen von k nicht geschrieben, sondern der Stelle zugetheilt werden (wobei rechts vom Komma die negativen Potenzen beginnen),

$$N = \alpha\beta\ldots\lambda\mu, \nu \ldots.$$

und es ergibt sich hieraus die Möglichkeit, jede Zahl in Beziehung auf eine Grundzahl k durch (k — 1) mit Stellenwerth versehene Zeichen oder sog. **Ziffern** und das Stellenzeichen 0 auszudrücken. Die meisten Völker haben sich für die Grundzahl Zehn oder das Decimalsystem entschieden.

So z. B. findet man successive

$$284\frac{37}{49} = 47.6 + 2 + \left(\frac{37}{49}.6\right)\frac{1}{6} = (7.6+5)6 + 2 + \left(4\frac{26}{49}\right)\frac{1}{6}$$

$$= [(1.6+1)6+5]6 + 2 + \left[4 + \left(\frac{26}{49}.6\right)\frac{1}{6}\right]\frac{1}{6}$$

oder also

$$284\frac{37}{49}=1.6^3+1.6^2+5.6^1+2.6^0+4.6^{-1}+3.6^{-2}+\ldots$$
$$=1152{,}43\ldots \text{ (Grundzahl 6)}$$

Die Dyadik ($k=2$) sollen die alten Chinesen, die Tetraktik ($k=4$) ein thracisches Volk, die Pentadik ($k=5$) die Grönländer und ein senegambischer Stamm gebraucht haben, — sonst scheint überall, und, wie schon **Aristoteles** betonte, im Zusammenhange mit unsern zwei Paaren fünfästiger Organe, die Dekadik ($k=10$) geherrscht zu haben, und nur bei Eintheilungen in früherer Zeit die duodecimalen oder sogar sexagesimalen den decimalen vorgezogen worden zu sein. — Der Vorzug unsers gegenwärtigen Decimalsystemes beruht übrigens nicht auf der Grundzahl desselben, sondern auf der von den alten Indiern durch Vermittlung der Araber auf uns gekommenen Uebung, Zahlzeichen anzuwenden, welche neben absolutem auch Stellen-Werth haben, — ja wir würden uns, wenn vor alten Zeiten in eben dieser Weise noch zwei Zahlzeichen mehr und damit das Duodecimalsystem eingeführt worden wären, dabei wegen den vermehrten Theilern noch viel besser befinden; aber es jetzt noch einzuführen, wie diess z. B. in dem Werke „Joh. Friedrich Christian **Werneburg** (Eisenach 1777 — Jena 1851; Professor der Mathematik in Weimar und Jena), Teliosadik oder das allein vollkommene unter allen Zahlensystemen, in welchem jede höhere Einheit aus taun (zwölf) nächst niedern Einheiten besteht. Leipzig 1800 in 8.“ befürwortet wurde, dürfte kaum mehr thunlich sein, und wäre wohl höchstens der französischen Schreckensregierung möglich gewesen. — Im Abendlande trat nach Cantor die indische Zahlbezeichnung oder, wie man gewöhnlich kürzer aber auch unrichtiger sagt, das Decimalsystem, zuerst in einer um 1134 von einem gelehrten Juden, Abraham **Savacorda** aus Barcelona, gemachten Uebertragung einer arabischen Schrift in's Lateinische auf; dann aber verbreitete sie sich ziemlich rasch über das Abendland, — ja es erschien die Rechnung mit decadischen Zahlen, der sog. **Algorithmus**, bald als besonderer Lehrgegenstand. Georg von Peurbach oder **Purbach** (Peuerbach in Oberösterreich 1423 — Wien 1461; Professor der Mathematik zu Wien) soll eine Schrift „Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus“ hinterlassen, und sein Schüler **Regiomontan** die von den Griechen her gebräuchlichen Sexagesimalbrüche um 1464 mit Decimalbrüchen vertauscht haben. In allgemeinern Gebrauch kamen Letztere jedoch erst etwa ein Jahrhundert später, — namentlich durch **Stevin**, der 1585 unter dem Titel „La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompus tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes“ auf 7 Folioseiten eine Anleitung zu ihrem Gebrauche gab.

13. Das Decimalsystem. Theilt man eine Decimalzahl $a+b.10+c.10^2+\ldots$ Glied für Glied durch eine Zahl, und addirt die Reste, so ist die erste Zahl durch die zweite theilbar, wenn die Summe der Reste es ist. Hierauf beruhen die sog. **Theilregeln** durch 3, 9, 11, etc. — Ist $A>B$ und $A=Bq_1+r_1$, $B=r_1q_2+r_2$, $r_1=r_2q_3+r_3, \ldots r_{h-1}=r_h.q_{h+1}$, so muss der **grösste gemeinschaftliche Theiler** von A und B auch r_1, also auch $r_2, \ldots$ also auch r_h theilen; folglich ist er r_h. Wird $r_h=1$, so sind A und B unter sich. — Wiederholt sich bei einem Decimalbruche eine

Folge von n Ziffern, eine sog. **Periode**, ohne Aufhören, so berechnet man, um ihn in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, zuerst den $(10^n - 1)$ fachen Werth.

Schon **Rudolff** braucht in seiner „Künstlichen Rechnung" von 1526 (vergleiche 2) für „tausentmaltausent" oder 10^6 den Ausdruck Million; dagegen scheinen Milliarde, Billion, etc. erst in weit späterer Zeit gebräuchlich geworden zu sein, und dabei laufen noch bei verschiedenen Völkern verschiedene Uebungen neben einander, wie folgendes Schema zeigt:

Deutsche, Engländer, Schweden, etc.			Italiener, Franzosen, Spanier, etc.
Million	10^6	. . . Million	
Milliarde . . .	10^9	. . . Billion	
Billion	10^{12}	. . . Trillion	
Billiarde . . .	10^{15}	. . . Quadrillion	
Trillion . . .	10^{18}	. . . Quintillion	
etc.		etc.	

Nach 3 hat man z. B. in Beziehung auf Modulus 3 oder 9

$$1 \equiv 1 \qquad 10 \equiv 1 \qquad \text{also auch} \qquad 10^2 \equiv 1 \qquad 10^3 \equiv 1 \qquad \text{etc.}$$

also für beide Moduln

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \ldots \equiv a + b + c + d + \ldots$$

Ferner in Beziehung auf den Modulus 11

$$1 \equiv 1 \qquad 10 \equiv -1 \qquad \text{also} \qquad 10^2 \equiv 1 \qquad 10^3 \equiv -1 \qquad \text{etc.}$$

also für diesen letztern Modul

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \ldots \equiv a - b + c - d + \ldots$$

etc., woraus die Regeln: Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern (Quersumme) dadurch theilbar ist, — durch 11, wenn die Summe ihrer Ziffern gerader Ordnung von derjenigen der ungeraden um ein Vielfaches von 11 verschieden ist, — etc., hervorgehen. — Auf der bequemen Theilregel für 9 beruhen die sog. **Neunerproben** für Addition, Multiplication, etc., welche bekanntlich darauf basiren, dass Summe, Product, etc. für 9 (wie übrigens für jede andere Zahl nicht weniger) denselben Rest lassen müssen, wie Summe, Product, etc. der Reste der einzelnen Zahlen. Sie werden bereits durch **Rudolff** in dem angeführten Werke mitgetheilt, und er gibt z. B. für Multiplication:

```
„Exempel     5678 ..... 8 }
               65 ..... 2 } 8×2
           ------
            28390
           34068
           ------
 Facit     369070 ..... 7     7    Prob."
```

so dass also (vergl. 7) hier wirklich schon das Multiplicationszeichen $\times$ erscheint. — Auch das im Texte angegebene Verfahren, den grössten gemeinschaftlichen Theiler zu finden, kennt unser **Rudolff**. Bei diesem Verfahren kann man sich übrigens offenbar entweder immer an positive Reste halten, oder auch, wenn negative Reste kleiner werden sollten, diese wählen, um schneller zu kleinern Divisoren zu kommen, also auch wenigerer Divisionen zu bedürfen; so kann man z. B. den grössten gemeinschaftlichen Theiler 54 der beiden Zahlen 1026 und 756 nach jedem der beiden Schemen

	1026	756	1
2	270	216	1
4	54	0	

	1026	756	1
3	270	-54	5
	0		

finden. — Hat man z. B. den periodischen Decimalbruch

$$x = 0,762\ 762\ 762 \ldots\ldots$$

so folgt $\quad 1000\,x = 762,762\ 762\ 762 \ldots\ldots$

also $\quad 999\,x = 762 \quad$ oder $\quad x = \frac{762}{999} = \frac{254}{333}$

Ist M eine m-ziffrige, N eine n-ziffrige Zahl, so hat man offenbar

$$\begin{array}{ll} M \geqq 10^{m-1} & M < 10^{m} \\ N \geqq 10^{n-1} & N < 10^{n} \\ \hline M \,.\, N \geqq 10^{m+n-2} & M \,.\, N < 10^{m+n} \end{array} \quad \text{also}$$

also kann M . N nicht weniger als $m + n - 1$, aber auch nicht mehr als $m + n$ Ziffern enthalten. — Der Hauptvortheil in der Anwendung von Decimalzahlen besteht darin, dass man sie bei allen Operationen wie ganze Zahlen behandeln, und am Ende nach einfachen Regeln das Rechnungsresultat durch Anbringen des Komma's berichtigen kann. Haben z. B. zwei Factoren a und b je m und n Decimalstellen, so multiplicirt man $a \,.\, 10^{m}$ mit $b \,.\, 10^{n}$, erhält so $a \,.\, b \,.\, 10^{m+n}$, und daraus durch Abschneiden von $m + n$ Stellen das richtige Product a . b. Braucht man ein solches Product nur auf eine gewisse Anzahl Stellen zu kennen, so kann man die sog. **abgekürzte Multiplication** (welche, beiläufig bemerkt, Keppler 1623 durch Prätorius kennen gelernt haben soll) anwenden, d. h. die einzelnen Producte nur so weit berechnen, als sie auf diese Stellen noch influiren können; Vortheil und praktisches Verfahren bei derselben zeigt z. B. die Vergleichung der beiden Operationen:

354,24675		354,24675
19,25341		143 5291
354 2467	5	354 2467 . 5
318 8220	75	318 8220 . 7
7 0849	350	7 0849 . 3
1 7712	3375	1 7712 . 3
1062	74025	1062 . 7
141	698700	141 . 7
3	5424675	3 . 5
6820,457	9189175	6820,458

bei deren ersterer die Multiplication ganz ausgeführt ist, während bei der zweiten nur auf drei Decimalen gerechnet, und die Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung so unter den Multiplicand gesetzt wurden, dass die Stelle der Einer unter die dritte Decimale, und damit jede Stelle unter die letzte des Multiplicands zu stehen kömmt, mit welcher sie noch voll zu multipliciren ist. In ähnlicher Weise kann auch die Division bewerkstelligt und abgekürzt werden, — etc. — Als Beispiele von sog. **Rechnungsvortheilen** mögen folgende Multiplicationen und Divisionen Platz finden:

$$\begin{array}{rl} & 3417 \times 299\ (= 300 - 1) \\ & 102\,5100 \\ \hline x = & 102\,1683 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 895 \times 15\ (= 10 + \frac{10}{2}) \\ & 4475 \\ \hline x = & 13425 \end{array}$$

a........ 765 846 × 911 546 (= $91 \,.\, 10^{4} + 10^{3} + 91 \,.\, 6$)

b.... 696 919 86 .... a (100 — 9)

418 151 916 .... b . 6

$x = 698\ 103\ 857\ 916$

$63 \times 57 = (60 + 3)(60 - 3)$

$x = 3591 = (3600 - 9)$

$a \ldots 8765424 : 72 \; (= 9 \times 8)$

$b \ldots 973936 \ldots a : 9$

$x = 121742 \ldots b : 8$

$21264 : 25 \; (= \times 4 : 100)$

$x = 850,56$

$6028 : 125 \; (= \times 8 : 1000)$

$x = 48,224$

etc.

Der Nutzen wird jedoch meistens überschätzt. — Zum Schlusse noch folgendes Curiosum: Die Summe der 9 Ziffern ist 45; wird, statt jede einzeln zu schreiben, eine derselben (b) einer andern (a) vorgesetzt, so gewinnt man $a + b . 10 - (a + b) = b . 9$ oder ein Vielfaches von 9, — also sicher nie 55; es ist daher unmöglich, 100 so in Posten zu zerlegen, dass jede Ziffer Einmal, aber auch nicht mehr als Einmal, zur Verwendung kommt.

14. Die gemeinen Logarithmen. Logarithmen der Basis zehn heissen **gemeine** oder Brigg'sche, und haben den Vorzug, dass sich dieselben für gleiche Ziffernfolgen nur in den Ganzen, der sog. Kennziffer oder **Charakteristik** unterscheiden, nicht aber im Decimalbruche, der **Mantisse**. Steht das Komma nach der ersten Ziffer, so ist die Charakteristik Null, — für jede Stelle, um welche es rechts oder links rückt, nimmt sie um eine Einheit zu oder ab. Statt einer negativen Charakteristik setzt man gewöhnlich ihre Ergänzung zu zehn und streicht diese; statt einen Logarithmus zu subtrahiren, addirt man oft seine (sog. decadische) Ergänzung zu $\log 1 = 0 = 10$.

Die im Texte erwähnte Eigenschaft der häufig nach ihrem ersten Berechner **Briggs** (vergl. 3) benannten Logarithmen der Basis 10, beruht darauf, dass jede zwei sich nur durch die Stellung der Komma's unterscheidende Decimalzahlen a und b eine Gleichheit

$$a = b . 10^n \qquad \text{oder} \qquad \log a = \log b + n \log 10 = n + \log b$$

eingehen, wo n eine ganze Zahl ist. — Sie können durch Verbindung von 11 : 3 mit einer Näherungsregel für das Ausziehen der Quadratwurzel (8 oder 44) leicht näherungsweise berechnet werden. So hat man z. B., von $\log 1 = 0$ und $\log 10 = 1$ ausgehend, successive

$$\log \sqrt{10} = \frac{0 + 1}{2} \qquad \text{oder} \qquad \log 3,162 = 0,5$$

$$\log \sqrt{3,162} = \frac{0 + 0,5}{2} \qquad \log 1,778 = 0,25$$

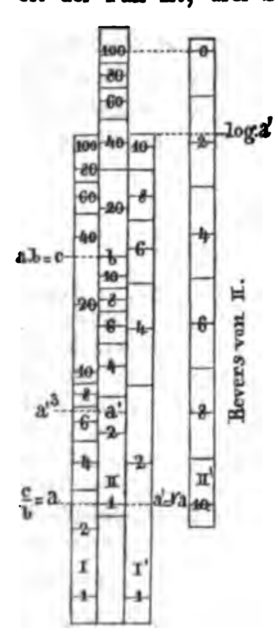
$$\log \sqrt{1,778 \times 3,162} = \frac{0,25 + 0,50}{2} \qquad \log 2,371 = 0,375$$

etc. etc.

In dem Folgenden wird zuweilen eine Zahl durch ihren Logarithmus in der Weise gegeben, dass über den Logarithmus ein Strich gesetzt wird; so würde also z. B. $\overline{0,375}$ die Zahl 2,371 bezeichnen. — Von den zahlreichen Tafeln gemeiner Logarithmen, welche im Laufe der Zeiten erschienen sind, mögen angeführt werden: Die zehnstelligen „G. v. **Vega**, Thesaurus logarithmorum completus. Lipsiæ 1794 in fol.“, — die siebenstelligen „**Vega**, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien 1783 in 8. (Zahlreiche spätere, grössere und kleinere Ausgaben, erst durch ihn selbst, dann durch Hülsse und Bremiker), — François **Callet** (Versailles 1744 — Paris 1798; Professor der Hydro-

graphie zu Vannes und Dünnkirchen, dann Privatlehrer der Mathematik zu Paris), Tables portatives de logarithmes. Paris 1795 in 8. (Stereot.), — Heinrich Ludwig Friedrich **Schrön** (Weimar 1799; Director der Sternwarte in Jena), Siebenstellige Logarithmen der Zahlen, Sinus, etc. Braunschweig 1859 in 8., — etc.", — die sechsstelligen „Carl **Bremiker** (Hagen in der Mark 1804; astronomischer Rechner und Inspector der Plankammer des Handelsministeriums in Berlin), Logarithmorum VI decimalium nova tabula Berolinensis. Berol. 1852 in 8., — Franz **Mocnik**, k. k. Schulrath: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien 1858 in 8., — etc.", — die fünfstelligen „Joseph-Jérome Le Français de **La Lande** (Bourg-en-Bresse 1732 — Paris 1807; Professor der Astronomie und Mitglied der Academie in Paris; vergl. Delambre, Eloge in Mém. de l'Instit. 1807), Tables de logarithmes pour les nombres et pour les Sinus. Paris 1802 in 16. (Stereot.; viele spätere Ausgaben von Marie, Köhler, etc.), — **Wittstein**, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Hannover 1859 in 8., — etc." — Als geschichtliche Notiz ist beizufügen, dass sich Adriaan **Vlacq**, Buchhändler zu Gouda in Holland, das Verdienst erwarb, die bei Briggs (vergl. 3) bestehende Lücke zwischen 20000 und 90000 auszufüllen, und hierauf gestützt unter dem bescheidenen Titel einer zweiten Ausgabe der Arithmetica logarithmica zu Gouda 1628 in fol. eine vollständige Tafel 10stelliger Logarithmen herauszugeben, welche die Grundlage aller spätern Tafeln, und so namentlich auch von Vega's Thesaurus bildete. Zum gewöhnlichen Gebrauche waren jedoch diese Tafeln nur zu ausgedehnt, und so war es wieder ein Verdienst, als Nathaniel **Roe**, Pfarrer zu Benacre in Suffolk, daraus handliche siebenstellige Logarithmen zusammenstellte, welche sodann Edmund **Wingate** (Bedford 1593 — London 1656; Richter in London und Parlamentsmitglied für Bedford) unter dem Titel „Tabulæ logarithmicæ. London 1633 in 8." herausgab, und von welchen eigentlich alle die spätern Tafeln von Sherwin, Gardiner, Vega, Callet, etc. nur neue, aber allerdings revidirte Auflagen sind. Die etwas später durch Abraham **Sharp** (Little-Horton bei Bradford 1651 — Little-Horton 1742; folgeweise Handelslehrling, Schulmeister, Accisebeamter, Gehülfe von Flamsteed, und Privatastronom in Little-Horton) für alle Primzahlen bis 1100 auf 61 Decimalen berechneten und in seiner Schrift „Geometry Improved. London 1717 in 4." publicirten Logarithmen sind ebenfalls in die Tafeln von Sherwin, Callet, etc. aufgenommen worden, — die von **Wolfram**, einem holländischen Artillerieoffizier, auf 48 Stellen berechneten natürlichen Logarithmen aller Primzahlen bis auf 10009 zunächst in die von Joh. Karl **Schulze** (Berlin 1749 — Berlin 1790; Schüler von Lambert, später Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Berlin) herausgegebene „Neue Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauche der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin 1778 in 2 Th. 8.", und aus dieser in Vega und Callet. Die in den Jahren 1792 bis 1794 unter der Leitung von Gaspard-Clair-François-Marie-Riche de **Prony** (Chamlet im Dép. du Rhône 1755 — Asnières bei Paris 1839; Ingénieur-en-chef des ponts-et-chaussées, Director der École des ponts-et-chaussées, Mitglied der Academie und des Bureau des longitudes) durch 7 bis 8 Mathematiker und 60 bis 80 Rechnungsgehülfen berechneten grossartigen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Logarithmen der Zahlen 1—10000 auf 19, 10000—200000 auf 14 Decimalen; natürliche Sinus für jedes Zehntausendtheilchen des Quadranten auf 25, Logarithmen der Sinus für jedes Hunderttausendtheilchen des Quadranten auf 14 Decimalen) endlich, die im

Manuscripte 17 Folianten füllen, und deren bereits begonnener, dann aber wegen Entwerthung der Assignaten wieder aufgegebener Druck auf 1200 Folioseiten berechnet war, sind nur durch Prony's „Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques adaptées au nouveau système métrique décimal. Paris 1824 in 4." allgemeiner bekannt geworden. — Aus den Logarithmentafeln geht hervor, dass für eine Einheit in der 5. Stelle die siebenstellige Mantisse bei 10000 um 434, bei 50000 um 87, bei 99999 um 43, also durchschnittlich etwa um 100 Einheiten zunimmt. Es wird also durchschnittlich eine Einheit in einer gewissen Stelle der Zahl gerade auch einer Einheit in der ebensovielten Stelle der Mantisse entsprechen, — oder man wird im Allgemeinen immer mit soviel-stelligen Logarithmen zu rechnen haben, als man Zahlstellen berücksichtigen muss. — Wenn, wie es für praktische Zwecke oft der Fall ist, drei Stellen genügen, so sind die von Edmund **Gunter** (Herefordshire 1581 — London 1626; Professor der Astronomie in London) etwa 1624 erfundenen, und sodann von Wingate, Scheffelt, Lenoir, etc. nach und nach in ihre gegenwärtige Form gebrachten **Rechenschieber** (Sliding Rule, Règle à calcul) sehr bequem: Trägt man nämlich auf zwei Stäbe I und II, von denen man II in einer Coulisse längs I verschieben kann, je die Logarithmen von 1 bis 100 in einer beliebigen Einheit auf, schreibt zu den erhaltenen Theilstrichen die Zahlen 1 bis 100, und bringt II 1 oder b zu I a oder c, so stellt sich nothwendig II b oder 1 zu I c oder a, wo $c = a \times b$ ist, — man kann also an I $a \times b$ oder $c:b$, d. h. das Product oder den Quotienten zweier Zahlen ablesen. Trägt man auf I' ebenso, aber in doppelter Einheit die Logarithmen von 1 bis 10 auf, und steht a' auf I' neben a auf I, so ist $a'^2 = a$ oder $a' = \sqrt{a}$, und wenn II so gestellt wird, dass sein 1 neben a' auf I' steht, so steht sein a' neben a'^3 auf I; man kann somit zur 2. und 3. Potenz erheben, und umgekehrt auch 2. und 3. Wurzeln ausziehen. Trägt man auf II', der Rückseite von II, in derselben Einheit wie auf I' die Zahlen von 0 bis 10 rückwärts, und so auf, dass, wenn das 1 von II neben dem 1 von I' steht, beim Umwenden gerade das 0 erscheint, so steht, wenn 1 von II neben a' auf I' gestellt wird, beim Umwenden der log a' da; man kann also Logarithmen und Zahlen aufschlagen, mit Hülfe hievon höhere Potenzen und Wurzeln berechnen, etc. Gewöhnlich sind auf II' auch noch die Log. Sin. von 0 bis 90° und Log. Tang. von 0 bis 45° aufgetragen, wodurch trigonometrische Ueberschlagsrechnungen ebenfalls ermöglicht werden, etc. Vergl. für die Rechenschieber „Ph. **Mouzin**, Instruction sur la manière de se servir de la Règle à calcul. 3 éd. Paris 1837, in 8., — Leopold Carl **Schulz** von Strassnitzky (Krakau 1803 — Vöslau 1852; Professor der Mathematik in Wien), Anleitung zum Gebrauche des englischen Rechenschiebers. Wien 1843 in 8., — Quintino **Sella** (Mosso 1827; Professor der Geometrie und Director des mineralogischen Museums zu Turin), Teorica e pratica del regolo calcolatore. Torino 1859 in 12., — Charles **Hoare**, Step by Step, or new and easy lessons on the Sliding Rule. London (1868?)



in 12.", und vor Allem „Karl **Culmann** (Bergzabern 1821; **Professor der** Ingenieurwissenschaften am Schweizer. Polytechnikum), **Der Rechenschieber** und sein Gebrauch (Dünkelberg's Culturingenieur 1868)."

III. Die Gleichungen und Proportionen.

15. Gleichheit und Gleichung. Sind zwei Ausdrücke nur der Form nach verschieden, so bilden sie eine **Gleichheit;** sind sie dagegen nicht wirklich gleich, sondern soll durch Bestimmung einer oder mehrerer der in ihnen enthaltenen Grössen, der gewöhnlich mit den letztern Buchstaben des Alphabetes bezeichneten **Unbekannten,** ihre Gleichheit erst herbeigeführt werden, so bilden sie eine **Gleichung,** und jede Genüge leistenden Werthe der Unbekannten heissen **Wurzeln** derselben. — Gleichheiten und Gleichungen werden nicht gestört, wenn auf beiden Seiten dieselbe Zahl addirt, mit derselben Zahl multiplicirt oder potenzirt, oder von jeder Seite der Logarithmus genommen wird.

So ist z. B. von

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b \qquad \text{und} \qquad a^2 + x^2 = 2ax$$

das erste eine Gleichheit, da jede Werthe von a und b genügen, — das zweite eine Gleichung, da nur $x = a$ die wirkliche Gleichheit herbeiführt. — Die arabischen Mathematiker nannten nach Nesselmann die unbekannte Grösse schai, ihr Quadrat mâl, welche Ausdrücke dann **Fibonacci** und seine Nachfolger durch res oder cosa, und census oder censo wiederzugeben suchten; so entstand die Ars rei et census, oder L'arte della cosa, — aus letzterer Bezeichnung aber die **Coss** der ältern deutschen Mathematiker, und die Unbekannte wurde ziemlich lange Numerus cossicus oder cossische Zahl geheissen, — zuweilen auch, wie z. B. von **Rudolff** und **Graffenried, Radix,** wofür dann abkürzend von Ersterm 1 ℞, von Letzterm Ra geschrieben wurde.

16. Die Gleichungen ersten Grades. Lässt sich eine Gleichung, nachdem man (15) sämmtliche Brüche, Bruchpotenzen, etc., weggeschafft, und alle Glieder auf dieselbe Seite des Gleichheitszeichens gebracht hat, nach den Potenzen der Unbekannten ordnen, so heisst sie **algebraisch,** und die höchste Potenz bestimmt ihren sog. **Grad,** — lässt sie sich nicht ordnen, so heisst sie **transcendent.** So ist jede Gleichung, welche sich auf die Form

$$ax + b = 0 \qquad \text{bringen, somit durch} \qquad x = -\frac{b}{a}$$

auf eine Gleichheit reduciren lässt, eine algebraische Gleichung ersten Grades, und der angegebene Werth von x ihre einzige und reelle Wurzel.

Aus der Gleichung

$$[4x - 3(8 - 8x - (2 - 2\tfrac{1}{2}x))] \cdot \frac{2}{19} = 1$$

folgen successive

$$8x-3[16-6x-(4-5x)]=19 \qquad 8x-3(12-x)=19$$
$$11x-36=19 \qquad 11x-55=0 \qquad x-5=0$$

so dass eine Gleichung ersten Grades vorliegt, welcher der reelle Werth $x=5$ entspricht. — Aus der Gleichung

$$\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}=a$$

folgen dagegen durch Transposition und wiederholtes Quadriren nach und nach

$$\sqrt[4]{x^3}=a-\sqrt{x} \qquad x\sqrt{x}=a^2-2a\sqrt{x}+x$$
$$(x+2a)\sqrt{x}=a^2+x \qquad (x^2+4ax+4a^2)x=a^4+2a^2x+x^2$$
$$x^3+(4a-1)x^2+2a^2x-a^4=0$$

so dass eine algebraische Gleichung dritten Grades vorliegt, für deren Lösung auf 19 verwiesen werden kann. — Die für $x=2$ identisch werdende Gleichung

$$2^x+3x=10$$

endlich ist transcendent.

17. Die Verhältnisse und Proportionen. Ist $a-b=m$ und $a:b=n$, so nennt man m das **arithmetische**, n das **geometrische Verhältniss** der Grössen a und b; durch Gleichsetzung zweier entsprechenden Verhältnisse aber erhält man eine sog. **Proportion.** Vier Zahlen bilden daher eine **arithmetische Proportion**

$$\overset{\text{zu}}{a}.\overset{\text{wie}}{b:c}.\overset{\text{zu}}{d} \qquad \text{wenn} \qquad a+d=b+c \tag{1}$$

eine **geometrische Proportion**

$$\overset{\text{zu}}{a:b}\overset{\text{wie}}{::}\overset{\text{zu}}{c:d} \qquad \text{wenn} \qquad a\times d=b\times c \tag{2}$$

und sind von den 4 Zahlen dreie bekannt, so lässt sich die vierte durch Auflösung einer einfachen Gleichung ersten Grades finden. Beide Proportionen heissen **stetig,** wenn die innern Glieder gleich sind; letztere heissen in diesem Falle **mittlere Proportionalen,** und sind den betreffenden Mitteln (11) der äussern Glieder gleich. — Aus 2 folgen

$$a:c::b:d \qquad b:a::d:c \qquad a:bm::c:dm \qquad a\pm b:b::c\pm d:d \tag{3}$$

Ist ausserdem $e:f::g:h$, so verhält sich auch

$$ae:bf::cg:dh \tag{4}$$

und wenn auch noch $c:d::e:f$, so ist

$$a:b::c\pm e\pm g:d\pm f\pm h \tag{5}$$

Wenn endlich $\qquad a:c::a-b:b-c \qquad$ (6)

so nennt man b **harmonisches Mittel** zwischen a und c.

Um die Richtigkeit von 3 bis 5 nachzuweisen, hat man nur je zu zeigen, dass entsprechend 2 immer noch das Product der innern Glieder gleich dem der äussern ist. So z. B. verhält sich

$$a\pm b:b::c\pm d:d \qquad \text{sobald} \qquad b(c\pm d)=(a\pm b)d$$

d. h. wenn $bc=ad$, was nach 2 wirklich statt hat. Dabei lässt sich jede dieser neuen Proportionen leicht in Worten aussprechen; so sagt z. B. die eben behandelte aus: In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der ersten Glieder zum ersten oder zweiten Gliede, wie sich die

Summe oder Differenz der letzten Glieder zum dritten oder vierten Gliede verhält. — Hat man

$$x . a : a . y \qquad x : g :: g : y \qquad x : y :: x - h : h - y$$

so dass nach Obigem

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad g = \sqrt{x\,y} \qquad h = \frac{2\,x\,y}{x+y} = \frac{g^2}{a} \qquad 7$$

der Reihe nach arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel zwischen x und y sind, so besteht somit auch die stetige Proportion

$$a : g :: g : h \qquad 8$$

Vergl. 93. — Ist $i = \sqrt{-1}$, so verhält sich

$$(+1) : i :: i : (-1)$$

und es heisst darum i, als gewissermaassen der Senkrechten entsprechend, in geometrischer Anschauung eine **laterale** Zahl. — Als Beispiel für zusammengesetzte Proportionen mag Folgendes dienen: „Wie hoch kommt die Berliner-Elle, wenn die Aune (der Stab) 3 Fr. 25 Cts. kostet, und 300 Fr. = 80 Thlr. preuss. Cour. à 30 Silbergroschen, 7 Berliner-Ellen aber gleich 4 Aunes sind?" Man erhält nach der Aufgabe, wenn x den Preis der Berliner-Elle in Silbergroschen bezeichnet, die Proportionen

$$\begin{array}{llll} x\ \text{Sgr.} & : 3^1/_4\ \text{Fr.} & = 4 : 7 & \\ 1\ \text{Fr.} & : 1\ \text{Sgr.} & = 80 . 30 : 300 & \text{also d. Mult.} \\ \hline x & : 13 & = 8 : 7 \quad \text{d. h.} & x = 14^6/_7\ \text{Sgr.} \end{array}$$

oder durch directes Raisonnement

$$x = 3^1/_4 . \frac{80 . 30}{300} . \frac{4}{7} = 14^6/_7\ \text{Sgr.}$$

oder nach der sog. **Kettenregel** den Ansatz:

x Sgr.	1 Berl.-Elle
7 Berl.-Ellen	4 Aunes
1 Aune	$3^1/_4$ Fr.
300 Fr.	80 Thlr.
1 Thlr.	30 Sgr.
7 x	8. 13
x	$14^6/_7$ Sgr.

d. h. oder

nach welchen Mustern man sich leicht in andern Fällen durchhelfen wird.

18. Die Gleichungen zweiten Grades. Jede Gleichung zweiten Grades lässt sich auf die Form

$$x^2 + 2a\,x + b = 0 \qquad 1$$

bringen, und hieraus folgt

$$x^2 + 2a\,x + a^2 = a^2 - b \qquad \text{oder} \qquad x = -a \pm \sqrt{a^2 - b} \qquad 2$$

Sie hat somit zwei reelle, gleiche oder imaginäre Wurzeln, je nachdem $a^2 >, =, < b$; $-2a$ ist gleich der Summe, $+b$ gleich dem Producte beider Wurzeln.

Hat die Gleichung die Form

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \qquad 3$$

so erhält man durch Vergleichung mit 1

$$a = \frac{\beta}{2\alpha} \qquad b = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad \text{also nach 2} \qquad x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad 4$$

Für die trigonometrische Auflösung vergl. 101. — Ist z. B. die Gleichung

$$\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$$

gegeben, so erhält man aus ihr durch Quadriren und Reduciren nach und nach

$$\sqrt{6x^2 - 15x - 126} = x + 6 \qquad \text{und} \qquad 5x^2 - 27x - 162 = 0$$

also eine Gleichung zweiten Grades, und aus dieser nach 4

$$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 + 3240}}{10} = \frac{27 \pm 63}{10} = \begin{cases} +9 \\ -3^3/_5 \end{cases}$$

Einzelne höhere Gleichungen lassen sich durch zweckmässige Substitutionen auf Gleichungen zweiten Grades reduciren, und dadurch lösen. So geht z. B. die Gleichung

$$\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} = 12$$

wenn man $x^{2/3} = y$ setzt, in die quadratische Gleichung

$$y^2 - y - 12 = 0 \quad \text{über, aus der} \quad y = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} +4 \\ -3 \end{cases}$$

folgt, so dass die vier Werthe

$$x = \sqrt{y^3} = +8,\ -8,\ +5{,}196 \,.\, i,\ -5{,}196 \,.\, i$$

der vorgegebenen Gleichung genügen.

19. Die Gleichungen dritten Grades. Jede Gleichung dritten Grades lässt sich auf die Form bringen

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{1}$$

diese durch die Substitution $x = y - \frac{\alpha}{3}$ und allfällige Umsetzung von y in $-y$ auf

$$y^3 + 3ay - 2b = 0 \tag{2}$$

und diese endlich durch die neue Substitution $y = u - \frac{a}{u}$ auf die quadratische Form

$$u^6 - 2bu^3 - a^3 = 0 \quad \text{woraus (18)} \quad u = \sqrt[3]{b \pm \sqrt{b^2 + a^3}} \tag{3}$$

folgt. Da aber

$$x^3 - a = [x - \sqrt[3]{a}]\left[x - \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \,.\, \sqrt[3]{a}\right]\left[x - \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \,.\, \sqrt[3]{a}\right] \tag{4}$$

so hat jede Zahl a drei dritte Wurzeln, und wenn man

$$A = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}} \qquad B = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}} \tag{5}$$

setzt, so erhält man, zunächst A für u einführend, die drei Werthe

$$y_1 = A - \frac{a}{A} = A + B$$

$$y_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} A - \frac{a}{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} A} = -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3} \tag{6}$$

$$y_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} A - \frac{a}{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} A} = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$$

und dieselben Werthe, die zusammen die sog. **Cardanische Formel**

bilden, würden sich auch durch Einführung von B für u ergeben. Ist b^2+a^3 positiv, so ist nur y_1 reell, für Null oder (101) negativ werden es dagegen auch y_2 und y_3.

Führt man in 1 den angegebenen Werth für x ein, so erhält man

$$y^3-\left(\frac{\alpha^2}{3}-\beta\right)y+\left(\frac{2\,\alpha^3}{27}-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma\right)=0$$

also 2, wenn man

$$a=\frac{3\beta-\alpha^2}{9} \qquad b=\frac{9\,\alpha\beta-2\,\alpha^3-27\gamma}{54} \qquad 7$$

setzt. — Die neue Substitution für y gibt direct

$$u^3-\frac{a^3}{u^3}-2\,b=0$$

also 3, sofern mit u^3 multiplicirt wird. — Multiplicirt man in 4 die zwei letzten Factoren rechts, so erhält man das Product

$$x^2+x\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}$$

und durch Zufügen des ersten Factors das neue Product x^3-a, d. h. die Seite links, so dass 4 nachgewiesen ist. Je nachdem für u entsprechend 4 einer der drei Werthe

$$1.A \qquad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.A \qquad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.A$$

eingeführt wird, erhält man endlich für y die drei Werthe 6; so z. B. gibt der erste

$$y_1=A-\frac{a}{A}=A-\frac{aB}{AB}=A-\frac{aB}{\sqrt[3]{b^2-(b^2+a^3)}}=A+B$$

etc. — Ist b^2+a^3 negativ, so werden A und B, und damit scheinbar auch alle drei Werthe von y imaginär, — während gerade in diesem Falle, wie die trigonometrische Lösung in 101 zeigt, alle drei Wurzeln reell sind. — Hat man z. B. die Gleichung

$$x^3-10\,x^2+34\,x-40=0$$

so erhält man nach 1 und 7

$$\alpha=-10 \quad \beta=34 \quad \gamma=-40 \quad a=\frac{2}{9} \quad b=\frac{10}{27} \quad \sqrt{b^2+a^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

also entsprechend 2

$$y^3+\frac{2}{3}\,y-\frac{20}{27}=0$$

und nach 5 und 6 successive

$$A=\sqrt[3]{\frac{10}{27}+\frac{2}{3\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{\sqrt{3}}+3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad B=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad A+B=\frac{2}{3} \qquad A-B=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y_1=\frac{2}{3} \qquad y_2=-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-3}=-\frac{1}{3}+i \qquad y_3=-\frac{1}{3}-i$$

also endlich für die vorgelegte Gleichung die drei Wurzeln

$$x_1=y_1-\frac{\alpha}{3}=\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=4 \qquad x_2=3+i \qquad x_3=3-i$$

Die Auflösung der Gleichung 2 scheint, wenigstens so weit es die reelle Wurzel anbelangt, schon Scipione dal **Ferro** (Bologna 14.. — Bologna 1525; Lehrer der Mathematik in Bologna), — bald nachher und unabhängig von ihm aber auch, in Folge eines Aufgaben-Wettkampfes, **Tartaglia** gefunden

zu haben. Letzterer theilte seine Lösung 1539 **Cardano** auf dessen inständiges Bitten mit, und dieser publicirte sie sodann, zuwider gegebenem Versprechen, aber allerdings unter Beifügen des Beweises und Erweiterung auf 1, in seinem „Artis magnæ sive de regulis Algebræ liber unus. Mediolani 1545 in fol.", worüber sich sodann **Tartaglia** in seinen „Quesiti ed invenzioni diverse. Venezia 1546" mit Recht bitter beklagte; aber die Regel behielt dennoch nach wie vor den Namen der Cardanischen, wie z. B. schon die Titel der Schriften „A. G. **Kästner**, Formula Cardani. Gottingæ 1757 in 4., — E. **Büchner**, Cardanus Formel. Hildburghausen 1857 in 4., — etc.", zeigen.

20. Die Gleichungen höhern Grades. Jede algebraische Gleichung besitzt, wie Gauss, Cauchy, etc. nachgewiesen haben, eine Wurzel der Form $\alpha = a \pm b i$, und lässt sich somit durch $(x - \alpha)$ ohne Rest theilen. Es hat also jede Gleichung vom n^{ten} Grade nothwendig n Wurzeln, unter denen aber paarweise imaginäre vorkommen können. Zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen dienen verschiedene Näherungsmethoden, praktisch wohl am Besten die sog. **Regula Falsi** (132).

Da in den seltenen Fällen, wo praktisch eine höhere, und dann immer nur eine numerische, dagegen gar nicht immer nur eine algebraische Gleichung zur Lösung vorliegt, kaum eine andere Methode als die im Texte erwähnte, alle Fälle beherrschende Regula Falsi (für welche ausser 132, auch 44 und 60 zu vergleichen sind) zur Anwendung kömmt, so mag es hier genügen, die sog. Theorie der höhern Gleichungen mit folgenden historisch-literarischen Notizen zu bedenken: Ludovico **Ferrari** (Bologna 1522 — Bologna 1565; Schüler von Cardano, dann Professor der Mathematik zu Mailand und Bologna) zeigte, dass man zu jeder Gleichung 4ten Grades eine Hülfsgleichung 3ten Grades, die sog. **Resolvente** Euler's, finden könne, aus deren Wurzeln sich ihre Wurzeln leicht darstellen lassen; vergl. **Cardano**'s oben erwähnte Ars magna, — **Euler**'s Abhandlung „De formis radicum æquationum cujusque ordinis conjectatio (Comment. Petrop. VI), — etc. — Alb. **Girard** lehrte in seiner Schrift „Invention nouvelle en l'Algèbre, tant pour la solution des équations, que pour recoignoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science. Amsterdam 1629 in 4.", dass jede algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade auch n Wurzeln habe, und der Coefficient der $(n-h)^{te}$ Potenz der Unbekannten die Summe der Combinationen sämmtlicher Wurzeln zur Classe h enthalte. — **Descartes** fand, dass jede Gleichung höchstens so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel, also z. B. $x^3 + 3x - 5 = 0$ höchstens Eine positive (und, da sie für $x = -y$ in $y^3 + 3y + 5 = 0$ übergeht, keine negative) Wurzel habe. — **Gauss** demonstrirte in seiner Promotionsschrift „Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii 1799 in 4" zum ersten Mal in strenger Weise die Richtigkeit des im Texte gegebenen Satzes. — **Abel** wies durch sein „Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Christiania 1824 (Auch Bd. 1 von Crelle's Journal)" nach, dass man nach dieser Seite zu einem gewissen Abschlusse gekommen sei. — **Sturm** zeigte (vergl. die in 5 citirte Algebra von Mayer et

Choquet), dass, wenn man zu $f(x)$ die erste Ableitung $f_1(x)$ (vergl. 55) aufsuche, — ferner unter $f_2(x)$ den Gegensatz des Restes der Division von $f(x)$ durch $f_1(x)$, — unter $f_3(x)$ den Gegensatz des Restes der Division von $f_1(x)$ durch $f_2(x)$, — etc. verstehe, — dann in diesen Functionen, deren Letzte $f_r(x)$ den constanten Werth a haben möge, x einmal durch α, und ein andermal durch $\beta > \alpha$ ersetze (wo aber weder α noch β Wurzeln von $f(x)$ sein dürfen), — und nun finde, dass die Reihe dieser Functionen für $x = \alpha$ eine gewisse Anzahl n Zeichenwechsel mehr zeige als für $x = \beta$, $f(x)$ nothwendig n reelle Wurzeln zwischen α und β besitze. Nur in dem besondern, das Vorhandensein gleicher Wurzeln andeutenden Falle, wo $a = 0$ werden sollte, also offenbar (vergl. 13) $f_{r-1}(x)$ ein Theiler von $f(x)$ ist, lässt das Verfahren im Stich, — es sei denn, man sondere diesen Theiler ab, und bilde die Reihe der f nochmals. Ist z. B.

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12$$

so erhält man nach obiger Vorschrift die Sturm'sche Reihe

$$f_1(x) = 4x^3 - 24x^2 + 46x - 28$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$
$$f_3(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$$
$$f_4(x) = 0$$

also hat $f(x)$ den Theiler $x - 2$; sondert man diesen ab, so erhält man die neue Reihe

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$f_1(x) = 3x^2 - 12x + 11$$
$$f_2(x) = {}^2/_3 x - {}^4/_3$$
$$f_3(x) = 3$$

und aus dieser erhält man für die Substitutionen

	0	$^1/_2$	1	$^3/_2$	2	$^5/_2$	3	$^7/_2$
$f(x)$	—	—	0	+	0	—	0	+
$f_1(x)$	+	+		—		—		+
$f_2(x)$	—	—		—		+		+
$f_3(x)$	+	+		+		+		+
Wechsel	3	3		2		1		0

also hat die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

zwischen 0 und $^1/_2$ keine, zwischen $^1/_2$ und $^3/_2$ eine (nämlich 1), zwischen $^3/_2$ und $^5/_2$ eine zweite (nämlich 2), und zwischen $^5/_2$ und $^7/_2$ noch eine dritte Wurzel (nämlich 3), und die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0$$

hat ausser diesen drei Wurzeln noch die dem Theiler $x - 2$ entsprechende Zwillingswurzel 2. — Vergleiche ferner „**Lagrange**, Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1798 in 4. (3 éd. 1826), — **Fourier**, Analyse des équations déterminées. Paris 1831 in 4., — Moritz Wilhelm **Drobisch** (Leipzig 1802; Professor der Mathematik und Philosophie zu Leipzig), Lehre von den höhern numerischen Gleichungen. Leipzig 1834 in 8., — Carl Heinrich **Gräffe** (Braunschweig 1799; Professor der Mathematik in Zürich), Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen. Zürich 1837 in 4. (Zusätze 1839; Bearbeitung von Encke in seinem Jahrbuche auf 1841 und in Crelle 22), — Karl **Jelinek** (Brünn 1822; früher Professor der Mathematik in Prag, jetzt

Director der k. k. Centralanstalt für Meteorologie in Wien), Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen. Leipzig 1865 in 4., — etc."

21. Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Hat man n Gleichungen mit n Unbekannten, so können sie auf (n—1) Gleichungen mit (n—1) Unbekannten reducirt werden, indem man mittelst einer derselben eine Unbekannte durch die übrigen ausdrückt und den so gefundenen Werth in alle andern Gleichungen einsetzt. Wendet man dieses **Eliminationsverfahren** an, bis man auf Eine Gleichung mit Einer Unbekannten gekommen ist, so gibt diese den wirklichen Werth derselben, und mit seiner Hülfe lassen sich sodann auch die übrigen Unbekannten definitiv berechnen. So z. B. findet man auf diese Weise aus

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \quad a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \qquad 1$$

wenn man die sog. **Determinante** (vergl. 34)

$$p_1 q_2 r_3 - p_1 q_3 r_2 - p_2 q_1 r_3 + p_2 q_3 r_1 + p_3 q_1 r_2 - p_3 q_2 r_1 = [p, q, r] \qquad 2$$

setzt,

$$x = \frac{[d, b, c]}{[a, b, c]} \qquad y = \frac{[d, c, a]}{[a, b, c]} \qquad z = \frac{[d, a, b]}{[a, b, c]} \qquad 3$$

In speciellen Fällen, und namentlich wenn alle Gleichungen vom ersten Grade sind, lassen sich oft sehr erleichternde Verfahren anwenden. So z. B. findet man aus der halben Summe und der halben Differenz zweier Zahlen durch Addition und Subtraction diese Zahlen selbst. Hat man ferner z. B. zwei Mengen m_1 und m_2 zu den Preisen p_1 und p_2, und bezeichnet m die Gesammtmenge, p aber den Durchschnittspreis, so ist offenbar

$$m \cdot p = m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 \qquad \text{und} \qquad m = m_1 + m_2 \qquad 4$$

und hieraus folgen durch Elimination von m oder m_2

$$m_1 (p - p_1) = m_2 (p_2 - p) \qquad \text{und} \qquad m (p - p_2) = m_1 (p_1 - p_2) \qquad 5$$

wornach sich die Hauptaufgaben der sog. **Alligations-** oder **Mischungsrechnung** lösen lassen. — Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner oder grösser als die Anzahl der Unbekannten, so wird in ersterm Falle die Elimination eine Endgleichung mit mindestens zwei Unbekannten (eine sog. unbestimmte Gleichung, der unendlich viele Systeme von Werthen genügen; s. 22), — in letzterm Falle mindestens Eine Gleichung zwischen Bekannten (eine sog. Bedingungsgleichung; s. 194) ergeben. Vergl. auch 210.

Hat man zwei Gleichungen vom ersten Grade mit zwei Unbekannten, so kann man die Elimination in sehr verschiedener Weise vollziehen: **Entweder** rechnet man aus der Einen die eine Unbekannte aus, wie wenn die andere bekannt wäre, und **substituirt** ihren Werth in die zweite Gleichung; so olgen z. B. aus

$$3x + 15y = 573 \qquad 6x + 4y = 236$$

successive

$$x = \frac{573 - 15y}{3} = 191 - 5y$$

$$6(191 - 5y) + 4y = 236 \qquad 910 - 26y = 0$$

$$y = \frac{910}{26} = 35 \qquad x = 191 - 5 . 35 = 16$$

Oder man rechnet aus beiden Gleichungen dieselbe Unbekannte aus, und **comparirt** durch Gleichsetzung die erhaltenen Werthe; so folgen z. B. aus

$$14x + 5y = 826 \qquad 39x = 14y - 1609$$

successive

$$y = \frac{826 - 14x}{5} \qquad y = \frac{1609 + 39x}{14}$$

$$\frac{826 - 14x}{5} = \frac{1609 + 39x}{14} \qquad 14(826 - 14x) = 5(1609 + 39x)$$

$$3519 = 391 . x \qquad x = 9 \qquad y = \frac{826 - 14 . 9}{5} = 140$$

Oder man sucht die kleinste Zahl, in welcher die Coefficienten der einen Unbekannten in beiden Gleichungen enthalten sind, multiplicirt jede Gleichung mit dem ihr fehlenden Factor, und **eliminirt** durch Subtraction oder Addition der neuen Gleichungen, je nachdem die ausgeglichenen Glieder gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben; so folgen z. B. aus

$$39x - 28y = 32 \qquad 42x + 15y = 486$$

da 39 und 42 in $14 . 39 = 546 = 13 . 42$, 28 und 15 aber in $15 . 28 = 420$ enthalten sind, successive

$$546 . x - 392 . y = 448 \qquad 585 . x - 420 . y = 480$$

$$546 . x + 195 . y = 6318 \qquad 1176 . x + 420 . y = 13608$$

also aus den ersten durch Subtraction

$$587 . y = 5870 \qquad \text{oder} \qquad y = 10$$

und aus den letztern durch Addition

$$1761 . x = 14088 \qquad \text{oder} \qquad x = 8.$$

Oder man multiplicirt nach der, den Namen von Et. **Bezout** (vergl. dessen „Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779“, und verschiedene betreffende Abhandlungen in den Par. Mem.) tragenden Methode die eine Gleichung mit einem vorläufig unbestimmten Factor, addirt sie zu der andern, und bestimmt nun den Factor so, dass die eine oder andere Unbekannte wegfällt; so folgt z. B. aus

$$x + 2y = 10 \qquad 4x + 3y = 20$$

wenn p ein vorläufig unbestimmter Factor ist,

$$(1 + 4p)x + (2 + 3p)y = 10 + 20p$$

also, je nachdem $p = -\frac{1}{4}$ oder $p = -\frac{2}{3}$ gesetzt wird,

$$\frac{5}{4}y = 5 \quad \text{d. h.} \quad y = 4 \quad \text{oder} \quad -\frac{5}{3}x = -\frac{10}{3} \quad \text{d. h.} \quad x = 2.$$

In einzelnen Fällen kann man auch noch besondere Kunstgriffe anwenden: Hat man z. B.

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \qquad \frac{ax - b}{y} = \frac{1}{a}$$

so erhält man, wenn man die erste Gleichung quadrirt und umstürzt, dann mit der zweiten multiplicirt, etc., successive

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \qquad a - \frac{b}{x} = \frac{b^2}{a^3} \qquad a^4x - a^3b = b^2x$$

$$x = \frac{a^3b}{a^4 - b^2} \qquad y = \frac{b^2}{a^2}x = \frac{ab^3}{a^4 - b^2}$$

Hat man 3, 4,... Gleichungen des ersten Grades mit 3, 4,... Unbekannten, so kann man sie in ganz analoger Weise wie 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten behandeln; so z. B. erhält man aus den 3 Gleichungen 1, indem man in Erweiterung von Bezout's Methode die 2. mit p, die 3. mit q multiplicirt, und dann alle drei addirt

$$(a_1+a_2 p+a_3 q)\, x + (b_1+b_2 p+b_3 q)\, y + (c_1+c_2 p+c_3 q)\, z = d_1+d_2 p+d_3 q$$

Setzt man nun zur Bestimmung von p und q die zwei Gleichungen

$$b_1 + b_2 p + b_3 q = 0 \qquad c_1 + c_2 p + c_3 q = 0$$

fest, und addirt sie, nachdem man letztere mit r multiplicirt hat, so erhält man

$$b_1 + c_1 r + (b_2 + c_2 r)\, p + (b_3 + c_3 r)\, q = 0$$

Hieraus folgt aber für

$$r = -\frac{b_3}{c_3} \quad \text{sofort} \quad p = -\frac{b_1 + c_1 r}{b_2 + c_2 r} = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{b_2 c_3 - b_3 c_2}$$

$$r = -\frac{b_2}{c_2} \qquad q = -\frac{b_1 + c_1 r}{b_3 + c_3 r} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_2 c_3 - b_3 c_2}$$

also aus der frühern Gleichung

$$x = \frac{d_1 + d_2 p + d_3 q}{a_1 + a_2 p + a_3 q}$$

$$= \frac{d_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + d_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + d_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

$$= \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 b_3 c_2 - d_2 b_1 c_3 + d_2 b_3 c_1 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}$$

$$= \frac{[d, b, c]}{[a, b, c]}$$

wie in 3, — und ganz entsprechend können die Werthe von y und z erhalten werden. — Auch wenn die gegebenen Gleichungen höhern Grades sind, so lässt sich die Elimination in manchen Fällen noch ganz in ähnlicher Weise vollziehen, besonders wenn wenigstens eine der Gleichungen in Beziehung auf eine der Unbekannten noch vom ersten Grade ist; so folgen z. B. aus

$$2\sqrt{x - 6y} = y + 3 \qquad \sqrt{x - 1} = y + 2$$

successive

$$4(x - 6y) = y^2 + 6y + 9 \qquad x - 1 = y^2 + 4y + 4$$

$$x = \frac{y^2 + 30y + 9}{4} \qquad x = y^2 + 4y + 5$$

$$y^2 + 30y + 9 = 4(y^2 + 4y + 5) \qquad 3y^2 - 14y + 11 = 0$$

und also nach 18:3,4

$$y = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4.3.11}}{2.3} = \frac{14 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3^2/_3 \\ 1 \end{cases} \qquad x = \begin{cases} 33^1/_9 \\ 10 \end{cases}$$

In andern Fällen kann noch ein speciell der Aufgabe angepasster Kunstgriff durchhelfen; so erhält man z. B. aus

$$x^2 + \frac{1}{2} z = a \qquad x^2 + y^2 = b \qquad y^2 + z^2 = c$$

indem man die zweite Gleichung von der Summe der ersten und dritten abzieht, auf einen Schlag

$$z^2 + \frac{1}{2} z = a - b + c$$

In manchen Fällen jedoch lässt sich die Elimination gar nicht durchführen, und man muss neuerdings froh sein, in der Regula Falsi ein Universalmittel zu besitzen, welches auch da (vergl. das in 182 gegebene Beispiel) nicht im Stiche lässt, d. h. bei numerischen Gleichungen ohne vollzogene Elimination

die Unbekannten mit jeder beliebigen Annäherung zu bestimmen erlaubt. — Zum Schlusse mögen noch zur Erläuterung der Mischungsrechnung folgende Beispiele folgen: Hat man 6 Saum Wein à 80 Fr., und will sie mit Hülfe eines 120 Fr. werthen Weines zur Erstellung eines 90 Fr. werthen verwenden, so hat man nach 5 von dem 2. Weine $m_2 = 6\ (90 - 80) : (120 - 90) = 2$ Saum zu nehmen. — Hat man 4 Loth 18-karatiges (auf 24 Gewichtstheile 6 Kupfer haltendes) Gold, oder Gold von 750 Feingehalt (750 Gold auf 1000 Theile) und 2 Loth Gold von 12 Karaten oder 500 Feingehalt, so hält nach 4 die Mischung $(4 . 18 + 2 . 12) : 6 = 16$ Karate $= 666^2/_3$ Feingehalt. — Will man 2 ℔ vierzehnlöthiges (auf 16 Gewichtstheile 2 Kupfer haltendes) Silber mit achtlöthigem Silber mischen, um Silber von 10 Loth oder 625 Feingehalt zu bekommen, so hat man nach 5 von der zweiten Legirung $2\ (10 - 14) : (8 - 10) = 4$ ℔ zu verwenden. — Soll man 3 ℔ sechspfündigen (5 ℔ Zinn auf 1 ℔ Blei haltenden) Zinnes mit einer andern Zinnsorte mischen, so dass man 7 ℔ siebenpfündiges Zinn (Zinn von $^6/_7$ Gehalt) bekömmt, so hat man nach 5 hiefür $p_2 = (7 . {}^6/_7 - 3 . {}^5/_6) : (7 - 3) = {}^7/_8$ oder achtpfündiges Zinn zu nehmen. — Etc.

22. Die unbestimmten Gleichungen. Um z. B. eine unbestimmte Gleichung der Form

$$ax + by = c$$

wo a, b, c ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor, $a < b$ und a prim zu b sein sollen, in ganzen Zahlen aufzulösen, bildet man successive, wenn $q_1\, q_2 \ldots$ Quotienten, $r_1\, r_2 \ldots$ Reste sind, die Hülfsgleichungen

$$x = \frac{c - by}{a} = q_1 - q_2 y + p_1 \qquad \text{wo} \qquad p_1 = \frac{r_1 - r_2 y}{a}$$

$$y = \frac{r_1 - a p_1}{r_2} = q_3 - q_4 p_1 + p_2 \qquad\qquad p_2 = \frac{r_3 - r_4 p_1}{r_2}$$

$$p_1 = \frac{r_3 - r_2 p_2}{r_4} \quad \text{etc.}$$

Setzt man diese Operation fort, bis ein Rest $r_{2n} = 1$ wird, so werden offenbar für jeden beliebigen ganzen Werth von p_n alle frühern p, sowie x und y ebenfalls ganze Zahlen, und man erhält somit im Allgemeinen unendlich viele Auflösungen, — in speciellen Fällen, wo z. B. nur positive Werthe von x und y Bedeutung haben können, jedoch vielleicht auch gar keine.

Ist z. B.

$$5x + 7y = 33$$

so erhält man successive

$$x = \frac{33 - 7y}{5} = 6 - y + p \qquad \text{wo} \qquad p = \frac{3 - 2y}{5}$$

$$y = \frac{3 - 5p}{2} = 1 - 2p + q \qquad\qquad q = \frac{1 - p}{2}$$

$$p = 1 - 2q$$

also

$$y = 5 . q - 1 \qquad\qquad x = 8 - 7 . q$$

wo nun jeder ganze Werth von q auch für x und y ganze Werthe gibt. Für $q = 1$ wird z. B. $y = 4$ und $x = 1$, und diess ist zugleich die einzige Auflösung

in positiven ganzen Zahlen. — Die zu unbestimmten Gleichungen führenden Aufgaben tragen auch oft den Namen von **Diophant**, der sich zuerst mit ihnen befasst zu haben scheint.

23. Transcendente Gleichungen. Einzelne transcendente Gleichungen lassen sich auf algebraische zurückführen; so z. B. können namentlich manche sog. **Exponentialgleichungen**, d. h. Gleichungen, bei denen die Unbekannte als Exponent erscheint, durch Gleichsetzen der Logarithmen beider Seiten oder sog. **Logarithmiren** auf Gleichungen vom ersten Grade reducirt werden (vergl. 26, 27); alle **numerischen** transcendenten Gleichungen aber sind wie die algebraischen mit Hülfe der Regula Falsi (132) löslich.

Ist z. B.

$$\left(\frac{1}{0{,}4}\right)^x = 6{,}25 \qquad \text{oder} \qquad (2{,}5)^x = 2{,}5^2$$

so ergibt sich ohne weiteres $x = 2$. — Ist dagegen

$$a^2 + b^{2x} = 2a \cdot b^x$$

so hat man successive

$$(a - b^x)^2 = 0 \qquad a = b^x \qquad \log a = x \cdot \log b \qquad x = \frac{\log a}{\log b}$$

Ist endlich

$$\left(\frac{8^x}{8}\right)^x = 2^{3x+9} \qquad \text{oder} \qquad \frac{8^{x \cdot x}}{8^x} = 8^{x+3}$$

so findet man nach und nach

$$x^2 \cdot \log 8 - x \log 8 = (x+3) \log 8 \qquad x^2 - x = x + 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4 \qquad x - 1 = \pm\sqrt{4} \qquad x = 1 \pm 2$$

und so fort.

24. Ansatz der Gleichungen. Um die in einer Aufgabe ausgesprochenen Beziehungen zwischen Bekannten und Unbekannten durch Gleichungen auszudrücken, denkt man sich Letztere ebenfalls als bekannt, und rechnet mit ihnen, wie wenn man ihre Richtigkeit prüfen wollte. Stellen z. B. t und T die Zeiten vor, in welchen zwei Punkte einen Umlauf vollenden, und τ die Zeit, in welcher der erstere den andern je einmal überholt, so findet man auf diese Weise

$$\tau \cdot \frac{1}{t} = 1 + \tau \cdot \frac{1}{T} \quad \text{d. h.} \quad \tau = \frac{T \cdot t}{T - t} \quad \text{oder} \quad t = \frac{T \cdot \tau}{T + \tau}$$

und so ähnlich in andern Fällen.

Michael **Stifel** gibt in einem Anhange zu Rudolff's Coss (auf fol. 147 der Ausgabe von 1553) folgende, mit der Obigen übereinstimmende Regel zum Ansatze der Gleichungen: „So dir furkompt etwas zu rechnen, so hab erstlich acht auff das facit, Dafür setz 1 2Q (vergl. 15; für weitere Unbekannte braucht er 1 A, 1 B, etc.) Und lass dir fein langsam, die auffgab widerumb von stuck zu stuck fürgeben, also das du mögest mit deinem facit (das ist 1 2Q) handlen nach allen stucken derselbigen auffgab, so wirstu kommen auff ein vergleychung zweyer zalen, die wol ungleych sind an der verzeychniss, aber doch gleich an werdt der grösse oder vile. Alsdann reducir ein vergleychung in die ander, so lang bis du kompst auff 1 2Q vergleycht einer ledigen zal. So ist denn 1 2Q

resolvirt, und die rechnung gefunden. Und also hastu die Regel", — und zieht dann noch dieselbe in: „Für das facit deiner auffgab setz 1 2℞. Handle damit nach der auffgab, bis du kommest auf ein equatz. Dieselbe reducir, so lang bis du sihest das 1 2℞ resolvirt ist" zusammen. — Setzt man in dem im Text gegebenen Beispiel $t = 1^h$ und $T = 12^h$, so folgt $\tau = 1^h\ 5^m\ 27^s$; d. h. wenn sich Minuten- und Stundenzeiger bei einer gewöhnlichen Uhr um 12^h deckten, so kommen sie wieder um $1^h\ 5^m\ 27^s$, dann um $2^h\ 10^m\ 54^s$, etc., zusammen. — Ein zweites Beispiel entnehme ich **Pollak**: „In einen Brunnen-Kasten, welcher 180 Eimer fasst, münden zwei Röhren. Als die erste 8 und die zweite 5 Stunden lang geöffnet war, hatten sie zusammen bereits zwei Drittel des ganzen Behälters gefüllt; und als die erste 11 und die zweite 8 Stunden geöffnet war, fehlten nur mehr 6 Eimer, bis der Kasten ganz gefüllt gewesen wäre. Wie viele Eimer liefert jede Röhre in einer Stunde?" Bezeichnen wir die beiden gesuchten Mengen mit x und y, so folgen

$$8x + 5y = 180 \cdot \frac{2}{3} = 120 \qquad 11x + 8y = 180 - 6 = 174$$

und hieraus nach 21 : $x = 10$ und $y = 8$. — Ein drittes Beispiel bei **Rudolff** heisst: „Drey machen ein gsellschaft. Legt der erst eyn 100 fl. Der ander 200 fl. Der Dritt 800 fl. Und uber 2 monden legt der erst pfeffer eyn, je 3 ℔ fur 1 fl. Der ander legt uber 4 monden ein eyn stuck sylber ye ein mark fur 7 fl. Nach verschiner jarzeyt haben sye gewunnen 250 fl. Auss solichem gwin gepüren dem ersten 50 fl. Dem andern 110 fl. Dem dritten 90 fl. Ist die frag wie vil des pfeffers und wie viel dess sylbers sey gewesen." Bezeichnet x die Anzahl der Pfunde Pfeffer, y die Anzahl der Mark Silber, und z den monatlichen Gewinn an 1 fl., so hat man

$$(100 \cdot 12 + x \cdot \frac{1}{3} \cdot 10)\, z = 50 \qquad 800 \cdot 12 \cdot z = 90$$

$$(200 \cdot 12 + y \cdot 7 \cdot 8)\, z = 110$$

Aus der dritten Gleichung folgt $z = 1/_{40}$, und hiefür geben sodann die erste und zweite Gleichung $x = 240$ und $y = 35^5/_7$.

IV. Die Progressionen und Kettenbrüche.

25. Die arithmetischen Progressionen. Die n Zahlen

$$\div\ a \,.\, (a + d) \,.\, (a + 2d) \ldots\ldots (a + (n - 1)\, d) \qquad \mathbf{1}$$

von denen (17) jede drei auf einander folgende eine stetige arithmetische Proportion eingehen, bilden eine sog. arithmetische Progression; a heisst **erstes**, $z = a + (n - 1) \cdot d$ **letztes Glied**, d **Differenz**. Da die Summe jeder zwei, von beiden Enden gleich weit entfernten Glieder offenbar gleich gross, so ist die Summe aller n Zahlen

$$s = \frac{2a + (n - 1)\, d}{2} \cdot n = \frac{a + z}{2} \cdot n \qquad \mathbf{2}$$

Selbstverständlich muss hiebei

$$n = \frac{2s}{a + z} = 1 + \frac{z - a}{d} \qquad \mathbf{3}$$

eine ganze Zahl sein, und beispielsweise wird

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad 4$$

gefunden.

Schon **Rudolff** kennt in seiner „Künstlichen rechnung" von 1526 (vergl. 2) die arithmetischen Progressionen, und gibt für ihre Summirung die 2 entsprechende Regel: „Solche zalen kürzlich in ein summa zu bringen, nimm war der stett, dz ist besihe wie vil d'zalen sein, darnach addir die erst zur letsten, dz collect multipicir mit dem halben teil d'stett oder die stett mit dem halben teil des collects nach wolgefallen, das aus solchem multipliciren kommen ist, zeigt alle zallen in einer summa." — Nach 2 ist z. B. die Summe der $(n - m + 1)$ auf einander folgenden ganzen Zahlen $m, (m + 1), \ldots n$

$$s = \frac{(n + m)(n - m + 1)}{2} \quad \text{und speciell für } m = 1 \quad s = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Aus 4 folgen z. B. die von **Nikomachos**, einem etwa zu Tiber's Zeiten lebenden Pythagoräer, entdeckten Gleichheiten

$$1 + 3 = 2^2 \qquad 1 + 3 + 5 = 3^2 \qquad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \qquad \text{etc.}$$

Die arithmetischen Progressionen werden auch wohl **arithmetische Reihen** erster Ordnung genannt; für solche höherer Ordnung vergl. 42.

26. Die geometrischen Progressionen. Die n Zahlen

$$\div\!\div\; a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ldots aq^{n-1} \qquad 1$$

von denen (17) jede drei auf einander folgende eine stetige geometrische Proportion eingehen, bilden eine sog. geometrische Progression; a heisst **erstes**, $z = aq^{n-1}$ **letztes Glied**, q **Quotient**. Die Summe aller n Zahlen ist, wie sich durch Ausführung der Division erproben lässt,

$$s = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1} \qquad 2$$

woraus durch Gleichsetzen der Logarithmen gleicher Zahlen oder sog. Logarithmiren

$$n = \frac{\log[s(q - 1) + a] - \log a}{\log q} \qquad 3$$

folgt, — und beispielsweise, wenn $a > 1$, wird

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots = \frac{1}{a - 1} \qquad 4$$

gefunden.

Auch die geometrischen Progressionen kennt **Rudolff** und gibt für ihre Summation die 2 entsprechende Regel: „Jr aller summa kürzlich zu erfaren, nimm für dich die erst und and' zal, dividir die grösser durch die kleiner, mit dem quocient multiplicir die aller grösst zal so vorhanden, von dem product subtrahir die aller kleinist, behalt das ubrig. Subtrahir darnach 1 von dem vorigen quocient, in das rest teil ab das vorbehalten ubrig, diser quocient zeigt die summa aller zalen." — Für $a = 1$ und $q = 2$ ergibt sich nach 2, dass die Summe

$$s = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \qquad 5$$

ist, woraus speciell für $n = 64$, da die subtractive 1 natürlich in diesem Falle vernachlässigt werden darf, $\log s = 64 . \log 2 = 19{,}2659200$ oder s über 18

Trillionen folgt. Es liegt darin die Lösung der bekannten Aufgabe, die Anzahl der Waizenkörner zu bestimmen, welche der indische Fürst dem Erfinder des Schachspieles zu geben gehabt hätte, um ihm nach dessen Bitte das erste Feld mit 1, das zweite mit 2, das dritte mit 4, das vierte mit 8 Körnern, und so fortan, zu bezahlen; den Scheffel zu 7 Millionen Körner gerechnet, wären es immer noch über $2\frac{1}{2}$ Billionen Scheffel gewesen. — Nach derselben Regel (für $n=32$) wäre folgende bei **Rudolff** vorkommende Aufgabe zu lösen: „Ein ross wirt hingeben in Etschlandt, ist der kauff gestelt auf die 32 huffnegel, also das man für den ersten nagel legen sol 1 pagadeinlein (thun 20 pagadeinlein 1 creutzer), für den andern 2, für den dritten 4, und so fort das ye ein nagel zwiret so tewr zalt werde als der nechst darvor. Ist die frag wie tewr das ross hinkompt. Facit pro 3579139 fl. müntz in Oesterreich.“ — Vernachlässigt man in einer sog. **absteigenden**, d. h. als Quotienten einen ächten Bruch besitzenden, bis in's Unendliche fortlaufenden Progression, die dem n^{ten} Gliede folgenden Glieder, so begeht man offenbar den Fehler

$$f = a\,q^n + a\,q^{n+1} + a\,q^{n+2} + \ldots = \frac{a\,q^n}{1-q} \tag{6}$$

Kennt man in einer geometrischen Progression die Werthe α und β des m^{ten} und n^{ten} Gliedes, d. h. ist

$$a\,.\,q^{m-1} = \alpha \qquad \text{und} \qquad a\,.\,q^{n-1} = \beta \tag{7}$$

also

$$q^{n-m} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{oder} \qquad \log q = \frac{\log\beta - \log\alpha}{n-m} \tag{8}$$

so kann man offenbar jedes andere Glied leicht berechnen, und bei bekannter Anzahl auch die Summe aller Glieder. So lässt sich z. B. hiernach die Aufgabe lösen, die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, deren viertes Glied 6, deren elftes und letztes Glied aber 768 beträgt; denn man hat somit nach 7, 8 und 2 successive

$$a\,.\,q^3 = 6 \qquad a\,.\,q^{10} = 768 \qquad q^7 = 128 \qquad q = 2$$

$$a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad s = \frac{2\,.\,768 - \frac{3}{4}}{2-1} = 1535\frac{1}{4}$$

und ähnlich in andern Fällen.

27. Die Zins- und Rentenrechnung. Ist a ein Kapital, π der Zins von Hundert oder der sog. **Zinsfuss** und somit $p = \frac{\pi}{100}$ der Zins der Einheit oder der **Zinsfactor**, so stellt offenbar $a\,p$ den Jahreszins, $a(1+p)$ den Werth des Kapitals nach Einem und somit $a(1+p)^n$ den Werth nach n Jahren vor. Ist ausserdem b eine jährliche Zulage, und a_n der Werth des Ganzen nach n Jahren, so ist (26)

$$a_n = a(1+p)^n + b(1+p)^{n-1} + b(1+p)^{n-2} + \ldots + b$$
$$= \left(a + \frac{b}{p}\right).(1+p)^n - \frac{b}{p} \tag{1}$$

und hieraus folgt durch Logarithmiren

$$n = \frac{\log(b + p\,.\,a_n) - \log(b + p\,a)}{\log(1+p)} \tag{2}$$

Ist $a_n = 0$ und b negativ, so erhält man für die sog. **Rentenrechnung** (vergl. 40), wo a das eingelegte Kapital und b die Rente bezeichnet,

$$a = b\frac{(1+p)^n - 1}{p(1+p)^n}, \quad b = a\frac{p(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}, \quad n = \frac{\log b - \log(b - ap)}{\log(1+p)} \qquad 3$$

Ist überdiess $b = a(p+q)$, d. h. will man ein Kapital mit Hülfe eines stärkern jährlichen Zinses **amortisiren**, so wird

$$n = \frac{\log(p+q) - \log q}{\log(1+p)} \quad \text{und} \quad q = \frac{p}{(1+p)^n - 1} \qquad 4$$

gefunden. (III).

Für $b = a$ gibt 1

$$a_n = \frac{a}{p}\left[(1+p)^{n+1} - 1\right] \qquad 5$$

und legt somit z. B. ein Vater für seine Tochter bei deren Geburt, sowie nachher an jedem ihrer Geburtstage 100 Fr. zu 4 % an Zinseszinsen, so ist für sie im 25. Jahre eine Aussteuer von

$$\frac{100}{0,04}(1,04^{26} - 1) = 2500\,(2,7725 - 1) = 4431 \text{ Fr.}$$

bereit. — Aus 2 folgt für $b = 0$

$$n = \frac{\log a_n - \log a}{\log(1+p)} \qquad 6$$

wenn also z. B. in einer Stadt von 8000 Einwohnern während einer Reihe von Jahren jährlich auf 25 Seelen eine Geburt und auf 50 Seelen ein Todesfall eintrat, und dadurch die Bevölkerung auf 9751 zunahm, so müssen zwischen den beiden Zählungen, da die jährliche Vermehrung 2 % betrug,

$$x = \frac{\log 9751 - \log 8000}{\log 1,02} = \frac{3,9891 - 3,9031}{0,0086} = 10 \text{ Jahre}$$

verflossen sein. — Soll ein Anleihen von 40000 fl. durch Verpachtung eines jährlich 1800 fl. betragenden Zolles gedeckt werden, so ist der Pachtvertrag bei 4 % nach 3 auf

$$n = \frac{\log 1800 - \log(1800 - 40000 \,.\, 0,04)}{\log 1,04} = \frac{\log 9}{\log 1,04} = 56 \text{ Jahre}$$

abzuschliessen. — Soll ein aufgenommenes Kapital in 20 Jahren amortisirt werden, so ist nach 4 der den üblichen $4\frac{1}{2}$ % entsprechende Zinsfactor um

$$q = \frac{0,045}{1,045^{20} - 1} = \frac{0,045}{2,4117 - 1} = 0,032$$

zu erhöhen, oder es ist das aufgenommene Kapital zu 77 ‰ zu verzinsen. — Sollen von dem ursprünglichen Werthe a eines Inventares jährlich π Procente abgeschrieben werden, so beträgt sein Werth nach n Jahren **entweder**

$$a_n = a(1 - np) \quad \text{so dass} \quad n = (a - a_n) : ap \qquad 7$$

oder nach 1 und 2 für $b = 0$

$$a_n = a(1-p)^n \quad \text{so dass} \quad n = (\log a_n - \log a) : \log(1-p) \qquad 8$$

je nachdem man den jährlichen Abzug auf den ursprünglichen oder auf den jeweiligen Werth basirt. In ersterem Falle ist der Inventarwerth in $n = 1 : p = 100 : \pi$ Jahren vollständig abgeschrieben, — in letzterm Falle eigentlich nie, dagegen kann nach 8 die Anzahl Jahre berechnet werden, wo a_n nur noch eine gegen den ursprünglichen Werth zu vernachlässigende Grösse haben wird. — Ist $b = 0$, so gibt 1

$$a_n = a(1+p)^n \qquad a = a_n(1+p)^{-n} \qquad 9$$

Es stellt also $(1+p)^n$ den Werth der Einheit nach n Jahren, und $(1+p)^{-n}$ den jetzigen Werth einer nach n Jahren zahlbaren Einheit vor. Ist $b = a$ und fällt die Einzahlung am Schlusse des n^{ten} Jahres weg, so ist nach 1

$$a_n = \left(a + \frac{a}{p}\right)(1+p)^n - \frac{a}{p} - a = \frac{a(1+p)}{p}\left[(1+p)^n - 1\right] = a \cdot \Sigma \qquad 10$$

so dass (vergl. 26 : 2)

$$\Sigma = (1+p) + (1+p)^2 + (1+p)^3 + \cdots + (1+p)^n \qquad 11$$

den Werth gibt, welchen eine während n Jahren jährlich einzuzahlende oder als Rente auszubezahlende Einheit schliesslich repräsentirt. Ersetzt man endlich in 3 die Grössen a und b durch a_n und a, so wird

$$a_n = \frac{a}{p}\left[1 - (1+p)^{-n}\right] = a \cdot \Sigma' \qquad 12$$

so dass (vergl. 26 : 2)

$$\Sigma' = (1+p)^{-1} + (1+p)^{-2} + (1+p)^{-3} + \cdots + (1+p)^{-n} \qquad 13$$

den gegenwärtigen Werth bezeichnet, welche eine von nun an während n Jahren jährlich zu bezahlende oder als Rente zu beziehende Einheit repräsentirt. — Zur Bequemlichkeit sind in Tafel III^b für verschiedene p und n die Werthe von $(1+p)^n$, $(1+p)^{-n}$, Σ und Σ' gegeben. So z. B. gibt sie für $p = 0{,}04$ und $n = 20$

$(1+p)^n = 2{,}1911$ $(1+p)^{-n} = 0{,}45639$ $\Sigma = 30{,}9692$ $\Sigma' = 13{,}5903$

also sind bei einem Zinsfusse von 4 % z. B. 1000 Franken nach 20 Jahren 2191 Fr. werth, — 1000 nach 20 Jahren zahlbare dagegen jetzt nur 456, — für jährlich eingezahlte 1000 Franken hat man nach 20 Jahren 30969 Fr. gut zu schreiben, und für eine, während noch 20 Jahren fällige Rente von 1000 Fr. könnte man jetzt 13590 Fr. bezahlen. — So ziemlich als die erste wissenschaftliche Arbeit über Zinsrechnung wird die Abhandlung von **Leibnitz** „Meditatio juridico-mathematica de interusorio simplici (Act. Erud. 1683)" angesehen. Aus neuerer Zeit sind ausser verschiedenen früher genannten Lehrbüchern und einigen bei 40 citirten Werken „Franz Ferdinand **Schweins** (Fürstenberg 1780 — Heidelberg 1856; Professor der Mathematik zu Heidelberg), Zinszinsrechnung. Darmstadt 1812 in 8, — M. **Creizenach**, Anleitung zur höhern Zinsrechnung. Mainz 1825 in 8., — Julius Ambrosius **Hülsse** (Leipzig 1812; Director der polytechnischen Schule zu Dresden), Die einfache und zusammengesetzte Zinsrechnung. Leipzig 1836 in 4., — Albert **Wild**, Politische Rechnungswissenschaft. Bd. 1. München 1862 in 8., — etc." zu vergleichen.

28. Die Kettenbrüche. Wird ein ächter Bruch B : A auf die Form

$$1 : (q_1 + 1 : (q_2 + 1 : (q_3 + \ldots)))$$

gebracht, so heisst er in einen **Kettenbruch** verwandelt; die einzelnen Brüche $1/q_1$, $1/q_2$, ... heissen **Ergänzungsbrüche**, der Werth $B_n : A_n$ aber, auf den sich der Kettenbruch bei Vernachlässigung der dem n^{ten} folgenden Ergänzungsbrüche reducirt, n^{ter} **Näherungsbruch.**

Nach Baltzer machte Lord **Brouncker** zum ersten Male um 1665 von einem Kettenbruche (fractio continue fracta) einen erheblichen Gebrauch (Vergl. Wallis Opera I 469). Für die weitere Ausbildung sind theils die schon in 3—5 erwähnten Opuscula posthuma von Hugens, Beiträge von Lambert und Zusätze von Lagrange zu Euler's Algebra, — theils „Leonh. **Euler**, De fractionibus continuis (Comm. Petr. 9, 11; Act. Petr. 1779; Nov. Comm. Petr. 9), — **Gauss**, Disquisitiones generales circa seriem infinitam (Comm. rec. Gotting. 1811—1813), — August Ferdinand **Möbius** (Schulpforta 1790 —

Leipzig 1868; Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Leipzig), Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen (Crelle's Journal 7 von 1830), — Wilhelm **Scheibner** (Gotha 1826; Professor der Mathematik zu Leipzig), Einige Bemerkungen über recurrirende Reihen, welche auf Kettenbrüche führen (Leipziger-Berichte 1864), — etc." zu vergleichen. — J. H. T. **Müller** schlug vor

$$\frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \frac{1}{q_3} \dot{+} \frac{1}{q_4} \dot{+} \ldots\ldots$$

zu schreiben.

29. Die Näherungsbrüche. Da

$$\frac{B_0}{A_0} = \frac{0}{1} \quad \frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{q_1} \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{1}{q_1 + 1 : q_2} = \frac{B_1 q_2 + B_0}{A_1 q_2 + A_0}$$

$$\frac{B_3}{A_3} = \frac{B_2 q_3 + B_1}{A_2 q_3 + A_1} \cdots\cdots \frac{B_n}{A_n} = \frac{B_{n-1} \cdot q_n + B_{n-2}}{A_{n-1} \cdot q_n + A_{n-2}} \qquad 1$$

so kann jeder Näherungsbruch aus den zwei vorhergehenden leicht abgeleitet werden. Setzt man diese Rechnung fort, bis der letzte Ergänzungsbruch berücksichtigt ist, so erhält man den wahren Werth $B:A$ des Kettenbruches. — Mit Hülfe obiger Werthe von B_n und A_n erhält man die Recursion

$$B_n \cdot A_{n-1} - B_{n-1} \cdot A_n = -(B_{n-1} \cdot A_{n-2} - B_{n-2} \cdot A_{n-1}) \qquad 2$$

folglich, da $B_2 A_1 - B_1 A_2 = -1$ ist,

$$B_n \cdot A_{n-1} - B_{n-1} \cdot A_n = (-1)^{n-1} \qquad 3$$

woraus z. B. folgt, dass Zähler und Nenner jedes Näherungsbruches relative Primzahlen sind. — Da nun ohnehin der Werth eines Kettenbruches nothwendig zwischen zwei auf einander folgende Näherungsbrüche fällt, und nach 3

$$\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{A_n \cdot A_{n-1}} \qquad 4$$

ist, so findet sich der Fehler eines Näherungsbruches in leicht bestimmbare Grenzen eingeschlossen. Sollte $\alpha:\beta$ genauer als der n^{te} Näherungsbruch sein, so müsste

$$\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\pm 1}{A_n \cdot A_{n-1}} \qquad 5$$

werden, was nur für $\beta > A_n$ möglich; es gibt also keinen aus kleinern Zahlen bestehenden Bruch, der so genau als ein Näherungsbruch ist.

Es folgen unmittelbar

$$\frac{B_3}{A_3} = \frac{B_1 (q_2 + 1 : q_3) + B_0}{A_1 (q_2 + 1 : q_3) + A_0} = \frac{(B_1 q_2 + B_0) q_3 + B_1}{(A_1 q_2 + A_0) q_3 + A_1}$$

$$\frac{B_4}{A_4} = \frac{B_2 (q_3 + 1 : q_4) + B_1}{A_2 (q_3 + 1 : q_4) + A_1} = \frac{(B_2 q_3 + B_1) q_4 + B_2}{(A_2 q_3 + A_1) q_4 + A_2}$$

etc., woraus die im Texte gegebenen Ausdrücke 1 hervorgehen. Mit ihrer Hülfe erhält man sodann

$$B_n A_{n-1} - B_{n-1} A_n = (B_{n-1} q_n + B_{n-2}) A_{n-1} - (A_{n-1} q_n + A_{n-2}) B_{n-1}$$
$$= -(B_{n-1} A_{n-2} - B_{n-2} A_{n-1})$$

oder 2. — Offenbar kann 5 oder die Ungleichheit

$$\frac{\beta . B_{n-1} - \alpha . A_{n-1}}{\beta . A_{n-1}} < \frac{\pm 1}{A_n . A_{n-1}}$$

nur bestehen, wenn entweder $\beta . B_{n-1} - \alpha . A_{n-1} < 1$, oder wenn $\beta > A_n$. Nun ist von ganzen Zahlen nur $0 < 1$, und es kann nicht $\beta . B_{n-1} - \alpha A_{n-1} = 0$ sein, da diess die Gleichheit $\alpha : \beta = B_{n-1} : A_{n-1}$ bedingen würde; also muss $\beta > A_n$ sein, wenn 5 richtig sein soll. — Wünscht man z. B. Annäherungswerthe zu der sog. **Ludolph'schen Zahl** $\pi = 3{,}14159$ (vergl. 122) zu erhalten, so verwandelt man nach folgendem Schema den Decimalbruch 0,14159 in einen Kettenbruch

7	14159	100000	
	528	887	15
1	854	33	25
	19		
1	29	4	7
4	1		

$$\cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}}}}}$$

und sucht dann nach der in 1 enthaltenen Regel nach dem neuen Schema die Näherungsbrüche

0		1	$\pi = 3\,^1/_7 = 22:7$ *
1	7	7	
15	15	106	$= 3\,^{15}/_{106} = 333:106$
16	1	113	$= 3\,^{16}/_{113} = 355:113$ *
415	25	2931	
431	1	3044	$= 3\,^{415}/_{2931} = 9208:2931$
3432	7	24239	$=$ etc.
14159	4	100000	

wo z. B. also $3432 = 431 . 7 + 415$, $2931 = 113 . 25 + 106$, etc. Von den Näherungswerthen sind die mit * bezeichneten, welche je einem sog. Sprunge, d. h. einem relativ starken Ansteigen der Werthe von Zähler und Nenner vorhergehen, wie 4 zeigt, die Besten. — Dass schon die Alten eine Kenntniss von den Näherungsbrüchen oder dann wenigstens einen vorzüglichen Takt hatten, geht trotz 28 aus der Thatsache hervor, dass die meisten der von ihnen gebrauchten Annäherungswerthe (vergl. z. B. 359 und 360) wirkliche Näherungsbrüche sind.

30. Die periodischen Kettenbrüche. Bilden bei einem Kettenbruche x die Nenner der Ergänzungsbrüche Perioden, so heisst auch er **periodisch.** Soll sein Werth bestimmt werden, so setzt man für alle der ersten Periode folgenden Perioden x ein, und berechnet dann x aus der entstehenden Gleichung zweiten Grades.

So folgt z. B. aus

$$x = 1:(2 + 1:(2 + 1:(2 + \ldots))) = 1:(2 + x)$$

sofort

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad x = -1 \pm \sqrt{2} = 0{,}414$$

wo das untere Zeichen, als in diesem Falle bedeutungslos, weggeworfen wurde.

V. Die Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

81. Die Variationen. Sollen n Grössen auf alle möglichen Arten je zu h zusammengestellt oder **zur Classe h varirt** werden, so hat man für die erste Stelle n Grössen zur Auswahl, für die zweite (n — 1), ... für die letzte noch (n — h + 1). Es gibt also

$$V(n, h) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1) \qquad 1$$

solcher Variationen. Darf jedes Element beliebig oft erscheinen oder soll **mit Wiederholung** varirt werden, so bleiben auch für das 2., 3., etc. Element immer noch n Elemente zur Auswahl übrig, und es ist daher

$$V(n, h, w) = n^h \qquad 2$$

die Anzahl der Variationen mit Wiederholung.

So z. B. erhält man aus 4 Elementen zur Classe 3 die 24 Variationen

a b c	a b d	a c d	b c d
a c b	a d b	a d c	b d c
b a c	b a d	c a d	c b d
b c a	b d a	c d a	c d b
c a b	d a b	d a c	d b c
c b a	d b a	d c a	d c b

und wenn die Elemente wiederholt werden dürfen, so treten dazu noch die fernern 40 Formen oder Complexionen

a a a	a a b	a a c	a a d
	a b a	a c a	a d a
	b a a	c a a	d a a
a b b	a c c	a d d	b b b
b a b	c a c	d a d	
b b a	c c a	d d a	
b b c	b b d	b c c	b d d
b c b	b d b	c b c	d b d
c b b	d b b	c c b	d d b
c c c	c c d	c d d	d d d
	c d c	d c d	
	d c c	d d c	

Nach Baltzer finden sich schon im 16. Jahrhundert einige Anklänge an die Combinatorik; aber jedenfalls gehört die von Paul **Guldin** (St. Gallen 1577 — Gratz 1643; erst Goldschmied, dann Jesuit, zuletzt Professor der Mathematik in Wien und Gratz) publicirte Abhandlung „Problema arithmeticum de rerum combinationibus. Viennæ 1622", worin er unter Anderm berechnet, dass die aus den 23 Buchstaben zusammensetzbaren Wörter über 25 Trillionen Bände à 1000 Seiten à 100 Zeilen à 60 Buchstaben füllen würden, zu der ältesten betreffenden Literatur. Blaise **Pascal** wurde durch Fragen der sog. Wahrscheinlichkeitsrechnung (vergl. 35—40) auf die Combinationslehre geführt, und behandelte sie sodann in seinem muthmasslich schon 1653 vollendeten, aber erst nach seinem Tode erschienenen „Traité du triangle arithmétique. Paris

1665" im Zusammenhange mit den sog. figurirten Zahlen (vergl. 42). Unter Complexionen: Combinationen (vergl. 33), und unter Variationen: Permutationen (vergl. 32) verstehend, disputirte **Leibnitz** 1666 zu Leipzig „De complexionibus" und schrieb hierauf seine „Ars combinatoria. Lipsiæ 1668 in 4. (2 A. Francof. 1690)", die jedoch nicht gerade viel Neues enthalten soll. Dagegen gab Jakob **Bernoulli** in der nach seinem Tode durch seinen Neffen Nicolaus publicirten „Ars conjectandi. Basileæ 1713 in 4. (Franz. durch Vastel, Caen 1801 in 4.)" eine bereits so ziemlich den heutigen Bestand der Combinationslehre enthaltende Abhandlung, in der auch der Name: Permutationen auftritt. Immerhin sind für die Combinationslehre und ihre Anwendungen auf die Analysis auch die spätern Abhandlungen und Schriften „L. **Euler**, Observationes analyticæ variæ de combinationibus (Comm. Petr. XIII 1751), — K. Fr. **Hindenburg**, Novi systematis permutationum, combinationum et variationum primæ lineæ. Lipsiæ 1781 in 4., — K. Fr. **Hindenburg**, Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. Leipzig 1796—1800, 2 Bde. in 8., — Joh. Christoph **Weingärtner** (Erfurt 1771 — Erfurt 1833; Pfarrer und Oberlehrer der Mathematik zu Erfurt), Lehrbuch der combinatorischen Analysis. Leipzig 1800—1801, 2 Bde. in 8., — A. v. **Ettingshausen**, Combinatorische Analysis. Wien 1826 in 8., — etc." mit Nutzen zu vergleichen.

32. Die Permutationen. Kömmt die Anzahl der Grössen mit dem Classenzeiger h überein, so heissen die Variationen **Permutationen**, und es gibt daher aus h Elementen, wenn das **Facultät** genannte Product

$$1.2.3\ldots.h = h! \quad \text{gesetzt wird,} \quad P(h) = h! \qquad 1$$

Permutationen, — im Kreise geordnet jedoch nur $(h-1)!$ — Sind unter den h Elementen p gleiche, so erscheint jede Permutation $p!$ mal, und es muss daher $P(h)$ mit letzterer Facultät dividirt werden, wenn man nur die Anzahl der verschiedenen Formen erhalten will.

Bestehen die m Elemente aus zwei Sorten p und $m-p$, so ist die Anzahl der Permutationen unter Anwendung des in 33 eingeführten Symboles

$$P = \frac{1.2\ldots p\,(p+1)\ldots(m-p)\,(m-p+1)\ldots m}{1.2\ldots\ldots p \times 1.2\ldots\ldots(m-p)} = \binom{m}{p} = \binom{m}{m-p} \qquad 2$$

Beispiele von Permutationen dreier verschiedener oder nur zum Theil verschiedener Elemente sind in dem Variations-Beispiele von 31 mehrfach gegeben. — Das Anagramm, in welchem Galilei (vergl. 428) seine Entdeckung der Dreigestalt Saturns versteckte, bestand aus den 37 Buchstaben $a^4.b.e^4.g.i^4.l^3.m^5.n^2.o.p.r^2.s^3.t^3.u^2.v^2$, aus denen sich

$$\frac{37!}{(2!)^5.(3!)^2.(4!)^3.(5!)} = 6881 \text{ Quintillionen}$$

Permutationen bilden liessen. Würde ein Schreiber ein Jahr lang so zu sagen Tag und Nacht solche Permutationen aufschreiben, so könnte er nach mässiger Schätzung kaum eine Million fertig bringen, und würde damit etwa 5 Ries Papier bedecken; 1000 Millionen Schreiber würden in 1000 Jahren eine Trillion vollenden, wenn ihnen nicht vorher, auch bei Verwendung aller Lumpen der Welt, das Papier ausginge. — Da $52! = \overline{67,90643}$, so können die 52 Karten eines Spieles auf mehr als 80 Undecillionen Arten geordnet werden, und noch, wenn nicht einmal auf die Verschiedenheit der 13 Karten jeder Farbe, auch nicht auf die Anordnung der Farben, sondern nur auf den Farbenwechsel

gesehen wird, auf $(52!) : [(13!)^4 . 4!] = 2230$ Quadrillionen Arten. Da ein Jahr $\overline{5,72095}$ Minuten hat, so würden 1000 Millionen Menschen, von denen Jeder Tag und Nacht ein anders geordnetes Spiel geben würde, erst in $\overline{12,62823}$ = circa $4\frac{1}{4}$ Billionen Jahren mit den 2230 Quadrillionen fertig werden. — Es zeigen uns diese Beispiele, wie viel leichter es geht, grosse Zahlen zu schreiben, als sich ihre Grösse klar vorzustellen.

33. Die Combinationen. Behält man von allen Variationen, welche die gleichen h Elemente enthalten, je nur Eine, so erhält man die **Combinationen** von n Elementen zur Classe h, und es gibt somit, wenn der Bruch

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, \ldots\ldots \, h} = \binom{n}{h}$$

gesetzt wird,

$$C(n, h) = \binom{n}{h} \qquad 1$$

solcher Combinationen. Sollen n Elemente zur Classe h mit Wiederholung combinirt werden, so vermehrt man gewissermassen die n Elemente um $(h-1)$ neue Elemente, und es ist daher

$$C(n, h, w) = \binom{n+h-1}{h} \qquad 2$$

Variationen, Permutationen und Combinationen zusammen heissen wieder Combinationen.

Für Combinationen ohne und mit Wiederholung vergl. die 31 gegebenen Beispiele, wo die fett gedruckten Complexionen die Combinationen der 4 Elemente zur Classe 3 darstellen, — die übrigen je ihre Permutationen, also alle ihre Variationen sind. — Die Richtigkeit der Formel 2 wird am Leichtesten auf folgende Art erwiesen: Wäre sie bis zur Classe h richtig, so müsste es, da man offenbar alle Combinationen zur Classe $(h+1)$ erhält, wenn man zu a die Combinationen aller Elemente zur Classe h, zu b diejenigen aller Elemente mit Ausnahme von a, zu c diejenigen aller Elemente mit Ausnahme von a und b, etc., setzt

$$\binom{n+h-1}{h} + \binom{n+h-2}{h} + \ldots\ldots + \binom{h+1}{h} + \binom{h}{h}$$

solcher Combinationen zur Classe $h+1$ geben, d. h. es wäre nach 42 : 4, wenn n durch $n+h-1$ ersetzt wird,

$$C(n, h+1, w) = \binom{n+h}{h+1}$$

oder es würde also 2 auch für die nächst höhere Classe bestehen; nun ist 2 offenbar für die erste Classe richtig, — also auch für die zweite, — also auch für die dritte, — etc., also allgemein.

34. Die Inversionen und Determinanten. Verändert man in einer Reihe von Elementen a b c d . . . die ursprüngliche Ordnung durch Permutation, so findet sich je eine bestimmte Anzahl von Paaren gestörter Elemente oder sog. **Inversionen,** und je nachdem diese Anzahl eine gerade (wie z. B. bei a c d b mit den 2 Inversionen c b und d b) oder ungerade (wie z. B. bei b c d a mit den 3 In-

versionen b a, c a, d a) ist, theilt man die betreffende Permutations form einer **ersten** oder **zweiten Classe** zu. Hat man n Reihen von je n Elementen

$$\begin{matrix} a_1\, b_1\, c_1\, d_1 \ldots \\ a_2\, b_2\, c_2\, d_2 \ldots \\ a_3\, b_3\, c_3\, d_3 \ldots \\ a_4\, b_4\, c_4\, d_4 \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots \\ a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{matrix}$$

bildet aus diesen Elementen Producte n^{ten} Grades, indem man je aus jeder Zeile und jeder Columne ein Element verwendet, und legt jedem Producte das Zeichen + oder — bei, je nachdem die in ihm wechselnden Zeiger eine Permutation erster oder zweiter Classe darstellen, so nennt man die bald durch Einschliessen der Elemente in eine Klammer [a, b, c, d,...], bald durch ein Symbol $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} \ldots$ angedeutete Summe aller dieser Producte die **Determinante** (n^{ten} Grades) des Elementensystemes.

Für eine Anwendung der Determinanten auf 21 verweisend, muss ich mich hier auf die historische Notiz beschränken, dass zwar schon **Leibnitz** die Idee hatte, der Algebra durch Bildung combinatorischer, den Determinanten entsprechender Aggregate zu Hülfe zu kommen, — dass es aber erst Gabr. **Cramer** in seiner classischen „Introduction à l'analyse des lignes courbes algèbriques. Genève 1750 in 4." gelang, diese Idee fruchtbringend zu verfolgen. Seither ist sie durch die bedeutendsten Analytiker weiter bearbeitet worden, und besitzt bereits ihre eigene Literatur; so sind ausser den schon früher erwähnten Schriften von Bezout, Lagrange, Gauss, etc. namentlich folgende Abhandlungen und Werke anzuführen: „Charles-Auguste **Vandermonde** (Paris 1735 — Paris 1796; Academiker in Paris; vergl. Lacépède, Notice sur la vie et les ouvrages de Vandermonde in Mém. de l'Inst. Scienc. math. 1), Mémoire sur l'élimination des inconnues dans les équations (Mém. de Par. 1772), — **Cauchy**, Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme (Journ. de l'école polyt. Cahier 17), — C. G. J. **Jacobi**, De formatione et proprietatibus determinantium (Crelle 22), — Arthur **Cayley** (Richmond 1821; Rechtsgelehrter in London), On the Theory of Determinants (Cambridge Transact. VIII 1844), — Fr. **Brioschi**, Teorica dei determinanti. Pavia 1854 in 4. (Deutsch, Berlin 1856), — Rich. **Baltzer**, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig 1857 in 8. (2. A. 1864), — etc."

35. Die Wahrscheinlichkeit. Sind einem Ereignisse unter n gleichmöglichen Fällen m Fälle günstig, so nennt man m:n die **mathematische** Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. So z. B. sind (31) mit zwei gewöhnlichen Würfeln $6^2 = 36$ Würfe möglich; will man damit 5.6 werfen, so hat man zwei Chancen (5.6 und 6.5); also ist die Wahrscheinlichkeit, 5.6 zu werfen, gleich $^2/_{36} = {}^1/_{18} = 0{,}056$, oder man hat den Wurf 5.6 auf 1000 Würfe 56 mal zu erwarten.

— Je nachdem für ein Ereigniss

$$m = 0 \qquad m < \frac{n}{2} \qquad m = \frac{n}{2} \qquad m > \frac{n}{2} \qquad m = n$$

kann man sein Eintreffen als unmöglich, unwahrscheinlich, ungewiss, wahrscheinlich oder gewiss bezeichnen.

Nachdem Fermat, Pascal (vergl. 31), etc. einige Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst hatten, gab **Hugens** in seiner Schrift „De ratiociniis in ludo aleæ (als Anhang zu Schooten's Exercitationum mathematicarum libri quinque, Lugd. Batav. 1657 in 4., erschienen) eine erste, etwas systematische Behandlung und Begründung solcher Berechnungen, und dann folgte bald Jak. **Bernoulli**'s „Ars conjectandi (vergl. 31)", durch welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem eigenen Wissenschaftszweige erhoben wurde, der sich dann allerdings seither noch ausserordentlich ausgebildet, und eine ziemlich umfangreiche Literatur erhalten hat, — vergleiche „Pierre Rémond de Montmort (Paris 1678 — Paris 1719; Canonicus an Nôtre-Dame und Mitglied der Academie in Paris; vergl. sein Eloge durch Fontenelle in Mém. de Par. 1719), Essai d'analyse sur les jeux de hazard. Paris 1708 in 4. (2 éd. 1713), — **Moivre**, De mensura sortis (Phil. Trans. 1711) und: Doctrine of Chances. London 1718 in 4. (3 ed. 1750), — Th. **Simpson**, Treatise on the nature and laws of chance. London 1740 in 4., — Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de **Condorcet** (Ribemont 1743 — Bourg-la-Reine 1794; Mitglied und später Secretär der Pariser-Academie; vergl. seine Oeuvres, Paris 1847—1849, 12 Vol. in 8., und Arago Oeuvres II), Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris 1784 in 4., — **Laplace**, Théorie analytique des probabilités. Paris 1812 in 4. (3 éd. 1820), und: Essai philosophique sur les probabilités. Paris 1814 in 8. (6 éd. 1840; deutsch von Tönnies, Heidelberg 1819), — **Lacroix**, Traité élémentaire des probabilités. Paris 1816 in 8. (4 éd. 1833), — J. J. **Littrow**, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wien 1833 in 8., — Gotthilf Heinrich Ludwig **Hagen** (Königsberg 1797; Oberbaurath und Academiker in Berlin), Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1837 in 8. (2. A. 1867), — **Poisson**, Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris 1837 in 4. (Deutsch von Schnuse, Braunschweig 1841 in 8.), — Jakob Friedrich **Fries** (Barby 1773 — Jena 1843; Professor der Mathematik und Philosophie zu Heidelberg und Jena), Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 1842 in 8., — Jean-Baptiste-Joseph **Liagre** (Tournay 1815; erst Gehülfe an der Sternwarte, später Professor an der Militärschule in Brüssel), Calcul des probabilités et théorie des erreurs. Bruxelles 1852 in 8., — **Quetelet**, Théorie des probabilités. Bruxelles 1853 in 12., — R. **Dedekind**, Ueber die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Zürch. Viertelj. 1860), — J. **Todhunter**, A History of the mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace. Cambridge 1865 in 8., — etc."

36. Einige Grundregeln. Bezeichnen p und q die zwei von einander unabhängigen Ereignissen günstigen, m und n aber die möglichen Fälle, so zählen $pn + qm$ die dem Eintreffen mindestens eines von ihnen, pq die dem Eintreffen beider günstigen Fälle,

während es m n mögliche Fälle gibt, — also bezeichnen

$$\frac{pn+qm}{m.n}=\frac{p}{m}+\frac{q}{n} \quad 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{pq}{mn}=\frac{p}{m}\cdot\frac{q}{n} \quad 2$$

die respectiven Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen des einen Ereignisses oder beider Ereignisse.

Es geht aus 2 hervor, dass, wenn $1:m$ die Wahrscheinlichkeit des einmaligen Eintreffens eines Ereignisses bezeichnet, die n malige Wiederholung nur noch die Wahrscheinlichkeit $1:m^n$ für sich hat, — dass also, weil die höhern Potenzen jedes ächten Bruches immer, und relativ rasch, kleiner werden, jede vielfache Wiederholung unwahrscheinlich wird. Entsprechend würde z. B., wie schon **Laplace** betont hat, einer durch zwanzigmaliges Wiedererzählen überlieferten Thatsache, wenn auch die Glaubwürdigkeit jeder einzelnen Mittheilung 0,9 betragen würde, nur noch die Glaubwürdigkeit $0{,}9^{20}$, d. h. circa $^1/_8$ zukommen. — Befinden sich z. B. in einer Urne a weisse, b schwarze und c rothe Kugeln, und ist $a+b+c=n$, so ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Zug eine weisse Kugel zu erhalten $a:n$. Je nachdem man sodann die Kugel wieder hineinwirft oder nicht, ist die Wahrscheinlichkeit, auch beim zweiten Zuge eine weisse Kugel zu nehmen, entweder noch $a:n$ oder $(a-1):(n-1)$, — also die Wahrscheinlichkeit, zwei weisse Kugeln nach einander zu ziehen $(a:n)^2$ oder $a(a-1):n(n-1)$, — etc., endlich die Wahrscheinlichkeit, in a Zügen auch a weisse Kugeln zu erhalten

$$\left(\frac{a}{n}\right)^a \qquad \text{oder} \qquad \frac{a(a-1)\ldots 1}{n(n-1)\ldots(n-a+1)}=1:\binom{n}{a} \quad 3$$

und zwar ist nach 8, da $a<n$, die zweite Wahrscheinlichkeit kleiner als die erste. Halten wir nur den zweiten Fall fest, so ist entsprechend die Wahrscheinlichkeit, nachher erst alle schwarzen und zuletzt alle rothen Kugeln zu ziehen,

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{a-1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-a+1}\times\frac{b}{n-a}\cdot\frac{b-1}{n-a-1}\cdots\frac{1}{c+1}\times\frac{c}{c}\cdot\frac{c-1}{c-1}\cdots\frac{1}{1} \quad 4$$
$$=a!\,b!\,c!:(a+b+c)!$$

Dieselbe Formel kann man aber auch auf folgende Weise erhalten: Die n Kugeln lassen sich nach 32 offenbar auf $(a+b+c)!:a!\,b!\,c!$ Arten permutiren, und von diesen möglichen Fällen ist nur Eine Anordnung für den Zug der Reihe nach günstig, also ist die Wahrscheinlichkeit dafür

$$1:\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}=\frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c)!}$$

wie oben in 4. Hat man z. B. 2 rothe, 3 schwarze und 2 weisse Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, sie nach dieser Folge zu ziehen, $^1/_{210}$. — In dem eben besprochenen zweiten Falle ist das folgende Ereigniss von dem vorhergehenden nicht ganz unabhängig; aber es konnte dieser Abhängigkeit durch eine nach Eintritt des ersten Ereignisses vorgenommene Veränderung der Wahrscheinlichkeit Rechnung getragen werden.

37. Die relative Wahrscheinlichkeit. Unter der relativen Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss eher als ein anderes eintreffe, versteht man den Quotienten, den man erhält, wenn man seine absolute Wahrscheinlichkeit durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden zu vergleichenden Ereignisse theilt. So z. B. geben von

den 36 Würfen 6 (1.6, 2.5, 3.4, 4.3, 5.2, 6.1) 7 Augen, und nur 3 (1.3, 2.2, 3.1) 4 Augen, also ist die relative Wahrscheinlichkeit eher 7 als 4 zu werfen $\frac{6}{36} : (\frac{6}{36} + \frac{3}{36}) = 6 : (6 + 3) = \frac{2}{3}$.

Wenn zwei Ereignisse **conträr** sind, d. h. wenn Eines von ihnen eintreffen **muss**, so ergänzen sich ihre Wahrscheinlichkeiten nothwendig zur Einheit, — es tritt also einerseits für diese beiden Fälle zusammen **Gewissheit** ein, und anderseits kömmt die relative Wahrscheinlichkeit jedes derselben mit seiner absoluten Wahrscheinlichkeit überein. So z. B. sind es zwei conträre Ereignisse, mit zwei gewöhnlichen Würfeln einen paaren Wurf (Pasch) oder einen unpaaren Wurf zu machen. Das erstere Ereigniss hat (35) die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, das letztere $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$, so dass $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$; die relative Wahrscheinlichkeit, eher einen unpaaren Wurf als einen Pasch zu erhalten, ist somit $\frac{5}{6} : (\frac{5}{6} + \frac{1}{6}) = \frac{5}{6}$.

38. Die Erfahrungswahrscheinlichkeit. Wird die Anzahl der günstigen und die der möglichen Fälle durch die Anzahl der günstigen und die der sämmtlichen Versuche ersetzt, so erhält man die sog. Erfahrungswahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese). So z. B. warf ich mit zwei gewöhnlichen Würfeln unter 100000 Versuchen 5928 mal 5.6, also ist die betreffende Erfahrungswahrscheinlichkeit 0,05928, was sehr nahe mit der mathematischen (35) stimmt.

Meine schon im Texte erwähnten zahlreichen „Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit (Bern. Mitth. 1849 bis 1853)“ ergaben, wie ich glaube, einige nicht uninteressante Resultate. Die ausgedehnteste meiner Versuchsreihen bestand darin, dass ich 1850 mit zwei ganz gewöhnlichen (absichtlich nicht mit zwei zu diesem Zwecke besonders sorgfältig construirten, und auch nicht mit zwei ganz schlechten oder gar gefälschten) Würfeln 1000 mal so lange würfelte, bis je jeder mögliche Wurf wenigstens Ein Mal zum Vorschein gekommen war, und mir jeden Wurf notirte, — schliesslich die hiefür nothwendig gewordenen 97899 Würfe noch bis auf 100000 ergänzte. Ich erhielt so die umstehend mitgetheilte Tafel, in Beziehung auf welche ich vorläufig (einige weitere Betrachtungen werden in 208 folgen) aufmerksam mache, **dass** die in ihr enthaltenen Reihen auf den ersten Blick zeigen, wie nahe schon die aus relativ wenigen Versuchen abgeleitete Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit übereinstimmt, so dass z. B. aus ihnen für einen unpaaren Wurf schon aus 100 Versuchen die Wahrscheinlichkeit

$$0{,}88 \quad \text{statt nach 35:} \quad \frac{5}{6} = 0{,}83333 \quad \text{d. h. ein um } 5{,}6\ \%$$

zu grosser Werth folgt, — **dass** die Uebereinstimmung allerdings mit der Anzahl der Versuche zunimmt, indem 1000 Versuche

$$0{,}836 \quad \text{oder einen nur noch um} \quad 0{,}32\ \%$$

zu grossen Werth ergeben, — **dass** dann aber später in Folge der nunmehr in's Gewicht fallenden Unvollkommenheit der Versuche (hier zunächst der Würfel) ein Stagniren eintritt, und so z. B. 10000 Versuche

$$0{,}8351 \quad \text{oder einen immer noch um} \quad 0{,}21\ \%$$

Wurf	Es erschien unter den Würfen 1 bis							Unter 1000 Versuchen als	
	100	1000	10000	100000					
				im Ganzen	hintereinander 2 mal	3 mal	4 mal	erster Wurf	letzter Wurf
1 . 1	2 mal	23	241	2455	39	1	0	25	139
1 . 2	5	71	539	5656	264	12	1	56	14
1 . 3	4	46	487	4631	192	11	1	46	32
1 . 4	6	53	515	5245	214	12	1	55	24
1 . 5	5	53	566	5737	273	11	0	58	16
1 . 6	6	54	512	5004	283	21	2	58	26
2 . 2	0	34	330	3253	73	2	0	30	34
2 . 3	9	54	568	5597	268	11	1	52	14
2 . 4	9	57	618	6197	334	19	2	60	7
2 . 5	6	70	639	6529	401	28	0	59	11
2 . 6	9	63	599	5869	299	18	0	66	16
3 . 3	1	20	231	2179	23	0	0	21	131
3 . 4	9	51	531	5140	269	17	2	56	20
3 . 5	3	45	549	5377	243	15	1	51	29
3 . 6	2	45	508	5001	209	10	0	46	18
4 . 4	6	33	292	2930	63	1	0	31	97
4 . 5	5	61	612	6186	357	18	0	58	14
4 . 6	7	63	588	5436	258	6	0	64	19
5 . 5	1	32	286	2982	77	1	0	22	101
5 . 6	3	50	570	5928	297	19	1	65	20
6 . 6	2	22	269	2668	53	1	0	26	118
paar	12	164	1649	16467	823	6	0	155	720
unpaar	88	836	8351	83533	4151	223	12	845	280

ja 100000 Versuche

0,83533 oder einen sogar um 0,24 %

zu grossen Werth finden lassen, — dass ferner bei einer bestimmten Anzahl von Versuchen die sich daraus ergebende Erfahrungswahrscheinlichkeit um so weniger von der mathematischen Wahrscheinlichkeit abweicht, je grösser letztere ist, indem z. B. aus je 10000 Versuchen die Wahrscheinlichkeit, einen unpaaren Wurf zu werfen

0,8351 statt $^5/_6 = 0{,}83333$ also nur um 0,21 %

diejenige einen paaren Wurf zu werfen

0,1649 statt $^1/_6 = 0{,}16667$ also schon um 1,06 %

diejenige denselben unpaaren Wurf zweimal nach einander zu werfen

0,0027 statt $(^1/_{18})^2 = 0{,}00309$ also sogar um 12,64 %

etc., unrichtig gefunden wurde, — dass also, um eine bestimmte Genauigkeit zu erhalten, in entsprechendem Maasse wie die Wahrscheinlichkeit abnimmt, die Anzahl der Versuche zunehmen muss, — etc. — Wie schon oben angegeben, waren durchschnittlich 97,899 Würfe nöthig, um jeden möglichen Wurf mindestens einmal zu erhalten. Es mag diesem Resultat beigefügt werden, dass, während theoretisch genommen jene Zahl zwischen 21 und ∞ schwanken könnte, sie factisch bei allen 1000 Versuchen nie unter 34 und nie über 341, ja nur 114 mal unter 60 und nur 147 mal über 140 ging. Es

geht hieraus hervor, wie selten extreme Fälle eintreten, jedoch darf man sie nicht als quasi unmöglich betrachten: So z. B. ist beim Austheilen eines Spieles von 52 Karten unter 4 Spieler nach 32 unter 2230 Quadrillionen möglicher Fälle nur Ein Fall vorhanden, in dem jeder Spieler nur Eine Farbe erhält, und doch soll sich dieser Fall (vergl. Grunerts Archiv 47, pag. 457) vor Kurzem in Husum wirklich ereignet haben, — dürfte nun aber allerdings binnen Tausenden von Jahren nicht wieder vorkommen.

39. Die Wetten und Hazardspiele. Bei einer Wette oder einem Spiele sollen sich offenbar die Einsätze (P, Q) ebenso wie die Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen (p, q) verhalten, d. h. es soll

$$P:Q = p:q \qquad \text{oder} \qquad p.Q = q.P$$

sein. Das Product, aus der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und dem zu hoffenden Gewinn nennt man **Erwartung** (Lucrum, espérance mathématique), und es ist somit eine Wette oder ein Spiel nur **ehrlich**, wenn beide Parteien gleiche Erwartung haben können. Bei den aus 90 Nummern bestehenden Zahlenlotterien z. B. werden nun je 5 Nummern gezogen, und damit also z. B. $\binom{5}{2} = 10$ Amben, während es im Ganzen $\binom{90}{2} = 4005$ Amben gibt, — also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewisse Ambe herauskomme, $^{10}/_{4005}$, diejenige, dass sie nicht herauskomme, $^{3995}/_{4005}$, — also sollten sich Einsatz und möglicher Gewinn wie 10 : 3995 verhalten, oder $Q = 399{,}5 . P$ sein. Bei dem französischen und dem Berliner Lotto wurde aber für eine gewonnene Ambe nur das 270fache der Einlage bezahlt, somit nur das 269fache als Gewinnst, — also waren die Spielenden bedeutend übervortheilt.

In Beziehung auf die Ehrlichkeit der öffentlichen Spiele sagte schon George-Louis Leclerc de **Buffon** (Montbard 1707 — Paris 1788; Director des Naturaliencabinets und Mitglied der Academie zu Paris; vergl. sein Eloge in Mém. de Par. 1788): „Le banquier n'est qu'un fripon avoué et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne pas se moquer.“ — In einem sonst sehr müssigen Schriftchen „Manuel de la loterie nationale de France ou livre des songes. Nouv. ed. Paris An VI in 12.“ sind die beim französischen Lotto von 1758 bis 1793 gezogenen Nummern vollständig verzeichnet. Auf 628 Ziehungen von je 5 Nummern erschien

Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal
1	30	9	38	17	42	25	28	33	32	41	29
2	36	10	36	18	38	26	35	34	29	42	42
3	38	11	34	19	30	27	42	35	40	43	25
4	31	12	29	20	35	28	31	36	48	44	37
5	39	13	20	21	42	29	27	37	48	45	27
6	39	14	31	22	49	30	40	38	38	46	25
7	39	15	35	23	28	31	38	39	36	47	38
8	28	16	32	24	27	32	44	40	38	48	39

Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal	Nr.	mal
49	31	56	28	63	45	70	32	77	28	84	39
50	38	57	35	64	41	71	41	78	37	85	30
51	37	58	26	65	24	72	28	79	28	86	39
52	37	59	37	66	35	73	42	80	36	87	32
53	37	60	30	67	36	74	35	81	28	88	50
54	35	61	35	68	32	75	44	82	48	89	30
55	32	62	42	69	23	76	42	83	38	90	40

Während also gemäss der $^5/_{90} = {}^1/_{18}$ betragenden Wahrscheinlichkeit aus Einer Ziehung hervorzugehen, durchschnittlich jede Nummer in sämmtlichen Ziehungen $628 : 18 = 34^8/_9$ mal erscheinen sollte, wurde im Min. Nr. 13 nur 20, im Max. Nr. 88 aber 50 mal gezogen, und dabei ist merkwürdig, dass das Mittel dieser extremen Werthe 35, oder also so zu sagen die obige Mittelzahl ergibt, und dass sich gegen diese letztere überhaupt Alles hindrängt, indem

20—26	27—31	32—37	38—42	43—50	mal
7	22	30	23	8	Nummern

gezogen wurden.

40. Die Mortalität. Bezeichnet (m) die Anzahl der Personen aus einer abgeschlossenen Bevölkerung, welche das Alter von m Jahren überschreiten, und ist (m + 1), (m + 2), etc. die Anzahl der Individuen derselben Personengruppe, welche das höhere Alter m + 1, m + 2, etc. erreichen, so finden sich die Wahrscheinlichkeiten für die angenommenen Alter je das nächste Jahr zu durchleben

$$p_m = \frac{(m+1)}{(m)} \qquad p_{m+1} = \frac{(m+2)}{(m+1)} \qquad p_{m+2} = \frac{(m+3)}{(m+2)} \cdots \qquad 1$$

Ferner finden sich die Wahrscheinlichkeiten für den m-jährigen successive die nächsten 1, 2, 3,... Jahre zu durchleben

$$\frac{(m+1)}{(m)} = p_m, \quad \frac{(m+2)}{(m)} = p_m \cdot p_{m+1}, \quad \frac{(m+3)}{(m)} = p_m \cdot p_{m+1} \cdot p_{m+2}, \ldots \qquad 2$$

Multiplicirt man diese letztern Wahrscheinlichkeitswerthe sämmtlich mit ein und derselben grossen Zahl, z. B. mit 10000, so erhält man die Werthe, die in den gebräuchlichen Mortalitätstafeln (III) für die verschiedenen Alter als **Anzahl der Lebenden** angegeben sind, und als Grundlage der Renten- und Versicherungsrechnungen dienen. Diese Werthe sind natürlich nicht mit den **wirklich** in den verschiedenen Altersklassen Lebenden einer bestimmten Bevölkerung zu verwechseln. — Trägt man die Alter m als Abscissen und die Anzahlen (m) der Lebenden nach der Mortalitätstafel als Ordinaten auf, so erhält man die sog. **Mortalitätscurve,** welche beim höchsten Alter m' durch die Abscissenaxe geht. Theilt man den Inhalt der von dieser Curve, der Ordinate (m) und dem Stücke m' — m der Abscissenaxe bestimmten Fläche durch (m), so erhält man die sog.

mittlere Lebensdauer, während die Anzahl der Jahre, welche die in dem Alter m noch Lebenden auf die Hälfte reducirt, die **wahrscheinliche Lebensdauer** dieses Alters genannt wird.

Die obigen Auseinandersetzungen sind den neusten Ansichten, und namentlich denjenigen entsprechend, welche mein lieber Freund Gustav **Zeuner** (Chemnitz 1828; Professor der Mechanik am schweizerischen Polytechnikum) demnächst in einer eigenen Schrift zu entwickeln gedenkt. Früher legte man sich diese Verhältnisse in ungenauerer Auffassung gewöhnlich in folgender Weise zurecht: Bezeichnet N_0 die Anzahl der jährlichen Geburten (Geburtsregister), L_n die Anzahl der Individuen von n Jahren (Volkszählung), G_n die Anzahl der zwischen n und (n + 1) Jahren Gestorbenen (Todtenregister) und N_n die Anzahl der von den N_0 Geborenen nach n Jahren noch Lebenden, so stellt angenähert $G_n : L_n$ die Mortalität zwischen n und (n + 1) Jahren dar, und man hat

$$N_0 - N_1 = G_0 \qquad N_1 - N_2 = N_1 \frac{G_1}{L_1} \cdots \qquad N_n - N_{n+1} = N_n \cdot \frac{G_n}{L_n} \qquad \mathbf{3}$$

woraus sich successive $N_1, N_2, \ldots$ berechnen, und ebenfalls zu einer Art Mortalitätstafel zusammenstellen lassen. Bezeichnet B die Bevölkerung eines Landes zu einer gewissen Zeit, G die Anzahl der jährlichen Geburten, T diejenige der Todesfälle, — sind ferner $B' G' T'$, $B'' G'' T''$, etc., dieselben Grössen für folgende Jahre, — und setzt man die Anzahl der Geburten und Todesfälle der Bevölkerung proportional, so hat man

$$B' = B + G - T = B\,(1 + g - t) = B \cdot r$$
$$B'' = B' + G' - T' = B'\,(1 + g - t) = B' \cdot r = B \cdot r^2$$

etc., oder es steigt in diesem Falle die Bevölkerung nach geometrischer Progression. **Liagre** fand, dass man für Belgien $r = 1{,}0062$ setzen dürfe, während $r = 1$ offenbar einer stationären Bevölkerung entsprechen würde. — Wäre die Bevölkerung eines Landes zu einer gewissen Zeit a, und würde sie entsprechend obiger Annahme nach 1, 2, ... n Jahren $a \cdot r$, $a \cdot r^2, \ldots A = a \cdot r^n$ betragen, so hätte man

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log r} \qquad \text{oder} \qquad \log r = \frac{\log A - \log a}{n} \qquad \mathbf{4}$$

und hiernach ergäbe sich z. B. für $a = 2$ und $A = 1000$ Millionen, wenn man $r = 1{,}0062$ setzen würde, $n = 3240$, — und, wenn man $n = 6000$ setzen würde, $r = 1{,}0033$, — an welche Zahlen sich allerlei naheliegende Betrachtungen anknüpfen lassen, auf welche ich schon Ende der 50er Jahre bei eintretender Discussion über die Möglichkeit der Abstammung aller Menschen von Einem Elternpaare hinwies. — Vergl. im weitern für Mortalitätsbestimmungen, Rentenermittlungen und Verwandtes „Joh. Peter **Süssmilch** (Berlin 1707 — Berlin 1767; Oberconsistorialrath und Academiker in Berlin), Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben. Berlin 1740 in 8. (4. A. durch Chr. Jak. Baumann, Berlin 1775—1787, 3 Bde.), — Th. **Simpson**, The Doctrine of Annuities and Reversions. London 1742 in 8. (New. ed. 1775), — Francis **Baily** (Newbury 1774 — London 1844; Geldmäkler in London und Präsident der Roy. Astronom. Soc.), The Doctrine of Interest and Annuities analytically investigated and explained. London 1808 in 4. (Deutsch von Schnuse, Weimar 1839 in 8.), — Joh. Heinrich **Meyer**, Etatsrath und Director der Wittwencasse zu Kopenhagen: Anleitung zur Berechnung der Leibrenten

und Anwartschaften. Kopenhagen 1823, 2 Bde. in 8., — J. J. v. **Littrow**, Anleitung zur Berechnung der Lebensrenten. Wien 1829 in 8., — G. **Hubbard**, De l'organisation des sociétés de prévoyance ou de secours mutuels. Paris 1852 in 8., — Th. **Wittstein**, Mathematische Statistik und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft. Hannover 1867 in 4., — **Bailleux** de Marisy, Des Assurances sur la vie (Revue des deux mondes, Fevrier 1867), — G. F. **Knapp**, Vorstand des statistischen Bureau's zu Leipzig: Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik. Leipzig 1868 in 8., — etc."

VI. Der binomische Lehrsatz.

41. Begriff des binomischen Lehrsatzes. Multiplicirt man n Binome (a + b), (a + c), a + d), ... mit einander, und setzt sodann b = c = d = ..., so erhält man (33)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + b^n$$

oder den sog. binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten.

Bezeichnet man eine Summe von Producten, welche den Combinationen von n Elementen b, c, d, ... zur Classe h entsprechen, mit C^h (b, c, d, ...), so erhält man offenbar durch einfache Multiplication der n im Texte erwähnten Binome

$$a^n + C^1(b, c, d, \ldots) a^{n-1} + C^2(b, c, d, \ldots) a^{n-2} + \\ + C^3(b, c, d, \ldots) a^{n-3} + \ldots + C^n(b, c, d, \ldots)$$

und hieraus für b = c = d = ... nach 33 unmittelbar den im Texte enthaltenen, auch unter der Form

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{b^1}{1!} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{b^2}{2!} + \ldots + \frac{b^n}{n!}$$

darstellbaren Satz, der zugleich begründet, warum das Symbol $\binom{n}{h}$ zumeist unter dem Namen **Binomialcoefficient** bekannt ist. Die Folge der Binomialcoefficienten wird für

n =	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
:	: :

und diese von **Pascal** als Triangulus arithmeticus bezeichnete Zahlenfolge, deren Bildungsgesetz in 42:1,2 enthalten ist, — und damit die erste Spur des binomischen Lehrsatzes, der dann allerdings erst durch **Newton** in allgemeiner Form aufgestellt wurde, findet sich schon in der 1544 durch **Stifel** (vergl. 2) herausgegebenen „Arithmetica integra". — Bildet man successive das Product $(a + b + c + \ldots)^n$, so erkennt man leicht, dass seine Glieder die Variationen der Elemente a, b, c, ... zur Classe n mit Wiederholung darstellen, und dass jedes Glied

$$a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \ldots \qquad \text{wo} \qquad \alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$$

ist, so oft erscheint, als sich die Complexion

$$\underbrace{a.a\ldots a}_{\alpha}\,.\,\underbrace{b.b\ldots b}_{\beta}\,.\,\underbrace{c.c\ldots c}_{\gamma}\ldots\ \text{permutiren lässt, d. h.}\ \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$$

mal. Man kann also

$$(a+b+c+\ldots)^n = \Sigma\,\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$$

setzen, und in dieser Gleichheit besteht der sog. **polynomische Lehrsatz.**

42. Eigenschaften des Symboles n über h. Das (33) eingeführte Symbol $\binom{n}{h}$ hat verschiedene merkwürdige Eigenschaften. Sind n und h ganze Zahlen, so ist

$$\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h} \quad \text{so z. B.} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad 1$$

und wenn auch nur h einen ganzen Werth hat

$$\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} = \binom{n}{h} = \binom{n+1}{h} - \binom{n}{h-1} \qquad 2$$

$$\binom{m+n}{h} = \binom{m}{0}\binom{n}{h} + \binom{m}{1}\binom{n}{h-1} + \cdots + \binom{m}{h}\binom{n}{0} \qquad 3$$

Es können z. B. diese Beziehungen zur Summation der sog. **figurirten** Zahlen verwendet werden.

Die Beziehungen 1 und 2 verificiren sich leicht; um dagegen 3 zu erhalten, versichert man sich erst der Gleichheit

$$\frac{m+n-h+1}{h}\binom{n}{k}\binom{m}{h-k-1} = \left(\frac{m-h+k+1}{h} + \frac{n-k}{h}\right)\binom{n}{k}\binom{m}{h-k-1}$$

$$= \frac{h-k}{h}\binom{n}{k}\binom{m}{h-k} + \frac{k+1}{h}\binom{n}{k+1}\binom{m}{h-k-1}$$

schreibt sodann diese für $k = 0, 1, 2, \ldots (h-1)$ auf, und erhält nun als Summe die Recursionsformel

$$\frac{m+n-h+1}{h}\left[\binom{n}{0}\binom{m}{h-1} + \binom{n}{1}\binom{m}{h-2} + \binom{n}{2}\binom{m}{h-3} + \cdots + \binom{n}{h-1}\binom{m}{0}\right] =$$

$$= \binom{n}{0}\binom{m}{h} + \binom{n}{1}\binom{m}{h-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{h-2} + \cdots + \binom{n}{h}\binom{m}{0} \qquad 4$$

durch deren successive Anwendung für $h = 2, 3, 4, \ldots$ man endlich zum Ziele gelangt. — Da nach 1, wenn h eine ganze Zahl ist,

$$\binom{h}{h} + \binom{h+1}{h} = 1 + \binom{h+1}{1} = \binom{h+2}{1} = \binom{h+2}{h+1}$$

und nach 2

$$\binom{h+2}{h+1} + \binom{h+2}{h} = \binom{h+3}{h+1}, \quad \binom{h+3}{h+1} + \binom{h+3}{h} = \binom{h+4}{h+1}, \quad \text{etc.}$$

so erhält man durch Addition

$$\binom{h}{h} + \binom{h+1}{h} + \binom{h+2}{h} + \cdots + \binom{n}{h} = \binom{n+1}{h+1} \qquad 5$$

und daher mit Hülfe von 54 : 1

$$\begin{array}{rlllll}
a + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = & a & & & & \\
+ & a & + \Delta a & & & \\
+ & a & + \binom{2}{1}\Delta a & + \binom{2}{2}\Delta^2 a & & \\
+ & a & + \binom{3}{1}\Delta a & + \binom{3}{2}\Delta^2 a & + \binom{3}{3}\Delta^3 a & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
+ & a & + \binom{n}{1}\Delta a & + \binom{n}{2}\Delta^2 a & + \cdots + \Delta^n a & \\
\end{array}$$

$$= \binom{n+1}{1} a + \binom{n+1}{2}\Delta a + \binom{n+1}{3}\Delta^2 a + \cdots + \Delta^n a \qquad 6$$

Wird $\Delta^m a$ constant, so heisst die Reihe der Zahlen a **arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung**, und so sind z. B. die aus einander durch Addition abgeleiteten Reihen

1	1	1	1	1	1	1	......	der 0ten
1	2	3	4	5	6	7	.....	1
1	3	6	10	15	21	28	....	2
1	4	10	20	35	56	84	...	3
1	5	15	35	70	126	210	.	4
....								etc.

Ordnung. Sie heissen **figurirte Zahlen**, — speciell die der zweiten Ordnung, deren n erste nach 6 die Summe

$$s_2 = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+2}{3} \qquad 7$$

haben, **Trigonalzahlen**, da eine ihnen gleiche Anzahl von Punkten je in ein gleichseitiges Dreieck eingeordnet werden kann, — die der dritten Ordnung, deren n erste nach 6 die Summe

$$s_3 = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+3}{4} \qquad 8$$

haben, **Tetraedralzahlen**, da eine ihnen gleiche Anzahl von Kugeln sich je zu einem regelmässigen Tetraeder aufhäufen lässt, — etc.

43. Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes. Durch Multiplication erhält man (42:3), wenn m und n ganz beliebige Zahlen sind, und h unter dem Summenzeichen Σ alle Ganzen von 0 bis ∞ durchläuft,

$$\Sigma\binom{m}{h} a^{m-h} . b^h \times \Sigma\binom{n}{h} a^{n-h} . b^h = \Sigma\binom{m+n}{h} a^{m+n-h} . b^h \qquad 1$$

d. h. das Product zweier, folglich auch mehrerer solcher Reihen, ist wieder eine Reihe derselben Form, und zwar ist der Zeiger $(m+n+\ldots)$ des Productes gleich der Summe der Zeiger $(m, n, \ldots)$ der Factoren. Hiernach ist z. B.

$$\Sigma\binom{n}{h} a^{n-h} . b^h \times \Sigma\binom{-n}{h} a^{-n-h} . b^h = \Sigma\binom{0}{h} a^{-h} b^h = 1 \qquad 2$$

$$\left[\Sigma\binom{m/n}{h} a^{\frac{m}{n}-h} . b^h\right]^n = \Sigma\binom{m}{h} a^{m-h} . b^h = (a+b)^m \qquad 3$$

folglich hat man

$$\Sigma\binom{-n}{h} a^{-n-h} . b^h = (a+b)^{-n}, \qquad \Sigma\binom{m/n}{h} a^{\frac{m}{n}-h} . b^h = (a+b)^{\frac{m}{n}} \qquad 4$$

oder es dehnt sich der binomische Lehrsatz auch auf negative und gebrochene Exponenten aus, nur dass in diesen beiden Fällen die Reihe nicht abbricht.

Durch Multiplication von

$$a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \binom{m}{3} a^{m-3} b^3 + \ldots$$
$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

erhält man unmittelbar

$$a^{m+n} + \left[\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\right] a^{m+n-1} b + \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^{m+n-2} b^2 +$$
$$+ \left[\binom{m}{3} + \binom{m}{2}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right] a^{m+n-3} b^3 + \ldots$$

und hieraus mit Hülfe von 42:3 unsere 1. — Der hier durchgeführte allgemeine Beweis des binomischen Lehrsatzes ist dem durch **Lhuilier** in seiner Algebra (vergl. 5) Gegebenen nachgebildet.

44. Einige Anwendungen. Mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes erhält man z. B.

$$(1 \pm a)^n = 1 \pm \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} a^2 \pm \binom{n}{3} a^3 + \ldots \qquad 1$$

$$(1 \pm a)^{-n} = 1 \mp \binom{n}{1} a + \binom{n+1}{2} a^2 \mp \binom{n+2}{3} a^3 + \ldots \qquad 2$$

$$(1 \pm a)^{\frac{1}{n}} = 1 \pm \frac{a}{n} - \frac{n-1}{1.2}\left(\frac{a}{n}\right)^2 \pm \frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3}\left(\frac{a}{n}\right)^3 - \ldots \qquad 3$$

$$\sqrt[n]{a^n \pm b} = a\left[\begin{array}{l} 1 \pm \frac{b}{n.a^n} - \frac{n-1}{2}\left(\frac{b}{n.a^n}\right)^2 \pm \\ \pm \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3}\left(\frac{b}{n.a^n}\right)^3 - \ldots \end{array}\right] \qquad 4$$

wo 4 Anleitung gibt, wie man aus einer Zahl durch Zerfällen in zwei Theile, von denen der erste eine ihr möglichst nahe n^{te} Potenz, der zweite eine kleine Correction ist, leicht die n^{te} Wurzel ziehen kann.

So z. B. ist nach 4

$$\sqrt[3]{6857} = \sqrt[3]{19^3 - 2} = 19\left[1 - \frac{2}{3.6859} - \left(\frac{2}{3.6859}\right)^2 - \ldots\right]$$
$$= 19\,[1 - 0{,}0000\ 9720 - 0{,}0000\ 0001]$$
$$= 18{,}9981580$$

während Vega-Hülsse (vergl. 14) 18,9981581 gibt. — Wird einer Gleichung

$$0 = a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots + p x + q$$

durch zwei Annahmen α_1 und α_2 für x so nahe Genüge geleistet, dass ihre Substitution zwar nicht Null, aber doch ganz kleine Werthe δ_1 und δ_2 ergibt, so darf man offenbar annehmen, dass die Fehler $f_1 = \alpha_1 - x$ und $f_2 = \alpha_2 - x$ der gemachten Annahmen klein genug seien, um ihre zweiten und höhern Potenzen ohne grossen Schaden vernachlässigen zu dürfen. Man hat alsdann mit Hülfe von 41 und 43

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= a.\alpha_1^n + b.\alpha_1^{n-1} + c.\alpha_1^{n-2} + \ldots + p.\alpha_1 + q \\
&= a.(x + f_1)^n + b(x + f_1)^{n-1} + \ldots + p(x + f_1) + q \\
&= a(x^n + n.x^{n-1} f_1) + b(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} f_1) + \ldots + q \\
&= a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots + p x + q + \\
&\quad + [a n x^{n-1} + b(n-1)x^{n-2} + \ldots + p] f_1 \\
&= [a n x^{n-1} + b(n-1) x^{n-2} + \ldots + p] f_1 \\
\delta_2 &= [a n x^{n-1} + b(n-1) x^{n-2} + \ldots + p] f_2
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha_1 - x}{\alpha_2 - x} \quad \text{oder} \quad x = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\delta_1 - \delta_2} . \delta_1 \qquad 5$$

Entspricht dem nach dieser Formel, der sog. **Regula Falsi**, berechneten Werthe von x bei Substitution in die vorgelegte Gleichung noch ein merklicher Werth δ_3, so betrachtet man ihn als eine neue Annahme α_3, sucht zu

dieser und der bessern der frühern Annahmen nach 5 nochmals einen neuen Werth, etc. Vergl. für eine andere, auch transcendente Gleichungen umfassende, Ableitung 60, — für eine ebenso allgemeine, und noch einfachere Ableitung, sowie für Anwendungen aber 132.

VII. Die Lehre von den Reihen.

45. Die sog. Functionen. Um die Abhängigkeit einer Grösse x von andern Grössen y, z, ... im Allgemeinen auszudrücken, nennt man sie eine Function derselben, und schreibt, je nachdem die betreffende Beziehung nach x aufgelöst ist oder nicht,

$$x = f(y, z, \dots) \qquad \text{oder} \qquad F(x, y, z, \dots) = 0$$

wo jedoch, um gleichzeitig verschiedene Functionen bezeichnen zu können, f und F auch Zeiger oder Stellvertreter erhalten dürfen. — Entsprechend den Gleichungen (s. 16) werden die Functionen in **algebraische** und **transcendente** getheilt, — wobei erstere noch in **rationale** und **irrationale** zerfallen, je nachdem die Variabeln nur mit ganzen, oder auch mit Bruch-Exponenten behaftet sind.

Für die mit diesem Abschnitte beginnende höhere Arithmetik und ihre successive Entwicklung können ausser den vielen schon in 3, 4, 5 etc. genannten Werken z. B. noch Folgende verglichen werden: „Guillaume François de **l'Hospital** (Paris 1661 — Paris 1704; Schüler von Joh. Bernoulli und Ehrenmitglied der Academie; vergl. sein Eloge durch Fontenelle in Mém. de Par. 1704), Analyse des infiniment petits. Paris 1696 in 4 (2 éd. 1715, 4 éd. 1768; Commentaire von Crousaz 1721, von Varignon 1725), — **Newton**, Arithmetica universalis. Ed. Wilh. Whiston. Cambridge 1707 in 8. (2. ed. 1722; engl. von Rulphson, London 1728 in 8.; lat. mit Commentar von Joh. Castillion, Amstel. 1761, 2 Vol. in 4.; franz. von N. Beaudeux, Paris 1802, 2 Vol. in 4.), — **Newton**, Method of Fluxions and infinite Series. Ed. J. Colson. London 1736 in 4. (franz. durch Buffon, Paris 1740 in 4.), — Colin **Maclaurin** (Kilmoddan 1698 — York 1746; Professor der Mathematik in Aberdeen und Edinburgh), Treatise of Fluxions. Edinburgh 1742, 2 Vol. in 4. (franz. durch Pezenas, Paris 1749, 2 Vol. in 4.), — Maria Gaetana **Agnesi** (Mailand 1718 — Mailand 1799; 1750 zum Professor der Mathematik in Bologna ernannt, zog sie sich schon 1751 nach dem Tode ihres Vaters in ein Kloster zurück; vergl. ihr von Frisi herausgegebenes „Elogio, Milano 1799"), Istituzione analitiche ad uso della gioventu italiana. Bologna 1748, 2 Vol. in 4. (engl. durch Colson, London 1801, 2 Vol. in 4.; der zweite Band franz. durch Bossut als: Traité de calcul différentiel et intégral, Paris 1775 in 8.), — **Euler**, Introductio in Analysin infinitorum. Lausannæ 1748, 2 Vol. in 4. (deutsch von Michelsen, Berlin 1788—1791, 3 Bde. in 8.; franz. durch Labey, Paris 1796 bis 1797, 2 Vol. in 4.), — **Euler**, Institutiones calculi differentialis. Petropoli 1755 in 4. (2. ed. Ticini 1787, 2 Vol. in 4.; deutsch von Michelsen und Grüson, Berlin 1790—1798, 4 Bde. in 8.), — **Euler**, Institutiones calculi integralis. Petropoli 1768—1770, 3 Vol. in 4. (3. ed. Petropoli 1824—1845, 4 Vol. in 4.; deutsch von Salomon, Wien 1828—1830, 4 Bde. in 8.), — **Lhuilier**, Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin 1786 in 4., —

Legendre, Mémoire sur les transcendantes elliptiques. Paris 1794 in 4., — **Lhuilier,** Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingæ 1795 in 4., — Jacques-Antoine-Joseph **Cousin** (Paris 1739 — Paris 1800; Professor der Mathematik und Academiker in Paris), Leçons de calcul différentiel et intégral. Paris 1777, 2 Vol. in 8. (Traité 1796, 2 Vol. in 4.), — **Lacroix,** Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Paris 1797—1800, 3 Vol. in 4. (2 éd. 1810—1819), und: Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral. Paris 1797 in 8. (7 éd. par Hermite et Serret 1867; deutsch von Fr. Baumann, Berlin 1830—1831, 3 Bde. in 8.), — **Lagrange,** Théorie des fonctions analytiques. Paris 1797 in 4. (3 éd. par Serret 1847), und: Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. édit. Paris 1806 in 8. (die erste Auflage erschien 1801 in den Séances de l'école normale und 1804 im Journ. de l'école polyt.), — Joh. Gottlieb Friedrich von **Bohnenberger** (Simmozheim im Schwarzwald 1765 — Tübingen 1831; Professor der Mathematik und Astronomie zu Tübingen), Anfangsgründe der höhern Analysis. Tübingen 1811 in 8., — **Legendre,** Exercices de calcul intégral. Paris 1811—1817, 3 Vol. in 4., — Meier **Hirsch,** Integraltafeln. Berlin 1810 in 8., — **Legendre,** Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. Paris 1825—1828, 3 Vol. in 4., — **Cauchy,** Exercices de mathématiques. Paris 1826—1830, 51 Livrs. in 4. (Als Fortsetzungen: Nouveaux exercices de Mathématiques, Prague 1835—1836, 8 Cah. in 4.; Exercices d'analyse et de physique mathématiques, Paris 1840—1847, 4 Vol. in 4.), — **Jacobi,** Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum. Regiomonti 1829 in 4., — Joseph Ludwig **Raabe** (Brody in Gallizien 1801 — Zürich 1859; Professor der Mathematik in Zürich; vergl. Bd. 2 meiner Biographien), Die Differenzial- und Integralrechnung. Zürich 1839—1847, 3 Vol. in 8., — **Cauchy,** Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Rédigées par Moigno. Paris 1840 bis 1844, 2 Vol. in 8., — Claude-Louis-Marie-Henry **Navier** (Dijon 1785 — Paris 1836; Ingénieur des ponts-et-chaussées, Professor der Analysis und Mechanik, sowie Academiker in Paris), Leçons d'analyse, avec des notes de Liouville. Paris 1840, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1856; deutsch von Wittstein, Hannover 1848—1849 und 1854), — A. A. **Cournot,** Théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. Paris 1841, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1857; deutsch von Schnuse, Darmstadt 1845 in 8.), — O. **Schlömilch,** Höhere Analysis. Braunschweig 1843 in 8. (2. Ausg. in 2 Bdn. 1862—1866), — C. H. **Schnuse,** Sammlung ausgewählter Formeln, Beispiele und Aufgaben aus der Differenzialrechnung und deren Anwendung auf Geometrie. Braunschweig 1844 in 8., — Ferdinand Gotthold Max **Eisenstein** (Berlin 1823 — Berlin 1852; Mitglied der Berliner-Academie; vergl. Monatsberichte 1853), Mathematische Abhandlungen aus dem Gebiete der höhern Arithmetik und der elliptischen Functionen. Berlin 1847 in 4., — **Serret,** Cours d'algèbre supérieure. Paris 1849 in 8. (3 éd. in 2 Vol. 1866; deutsch von Wertheim, Leipzig 1868), — **Sohnke,** Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Halle 1850 in 8., — Aloys **Mayr** (Stadtamhof bei Regensburg 1807; Professor der Mathematik und Astronomie zu Würzburg), Theorie des Differenzial-Calculs. Regensburg 1854 in 8., — **Gerhardt,** Die Entdeckung der höhern Analysis. Halle 1855 in 8., — Jean-Marie-Constant **Duhamel** (St. Malo 1797; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris), Calcul infinitésimal. Paris 1856, 2 Vol. in 8. (deutsch von Wagner, Braunschweig 1855—1856), — H. **Weissenborn,** Die Principien der höhern Analysis in ihrer historischen Entwicklung.

Halle 1856 in 8., — **Sturm**, Cours d'analyse, publ. par E. Prouhet. Paris 1857—1859, 2 Vol. in 8., — G. **Salmon**, Lessons introductory to the modern higher Algebra. Dublin 1859 in 8. (2. ed. 1866; franz. durch Bazin mit Noten von Hermite, Paris 1868), — Joh. Heinrich **Durège** (Danzig 1821; Professor der Mathematik in Zürich und Prag), Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1861 in 8. (2. A. 1868), — Joseph-Louis-François **Bertrand** (Paris 1822; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris), Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Vol. 1. Paris 1864 in 4., — **Durège**, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Leipzig 1864 in 8., — Karl Heinrich **Schellbach** (Eisleben 1805; Professor der Mathematik und Physik in Berlin), Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. Berlin 1864 in 8., — Fr. **Autenheimer**, Elementarbuch der Differenzial- und Integralrechnung. Weimar 1865 in 8., — F. **Frenet**, Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal. Paris 1866 in 8., — B. **Riemann**, Ueber die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Göttingen 1867 in 4., — **Serret**, Cours de calcul différentiel et intégral. Paris 1868, 2 Vol. in 8., — O. **Schlömilch**, Uebungsbuch zum Studium der höhern Analysis. Bd. 1. Leipzig 1868 in 8., — Eugen **Lommel** (1837; Professor der Mathematik und Physik in Schwyz, Zürich und Hohenheim), Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig 1868 in 8., — etc." Vergl. auch 55.

46. Die Exponentialreihe. — Setzt man

$$A = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots \qquad 1$$

so hat man für jeden Werth von x und n (43)

$$a^x = [(1+(a-1))^n]^{\frac{x}{n}} = [1+n(A+nf(a,n))]^{\frac{x}{n}}$$

oder (43), da diese Gleichheit, weil n links nicht erscheint, nur bestehen kann, wenn sich auch rechts die Glieder mit n heben,

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \cdots \qquad 2$$

d. h. die sog. Exponentialreihe.

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned}[1+(a-1)]^n &= 1+\binom{n}{1}(a-1)+\binom{n}{2}(a-1)^2+\binom{n}{3}(a-1)^3+\cdots \\ &= 1+\frac{n}{1}(a-1)+\frac{n^2-n}{1.2}(a-1)^2+\frac{n^3-3n^2+2n}{1.2.3}(a-1)^3+\cdots \\ &= 1+n\left[\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\right]+ \\ &\quad + n^2\left[\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{n-3}{6}(a-1)^3+\cdots\right] \\ &= 1+n[A+nf(a,n)]\end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned}[1+n[A+nf(a,n)]]^{\frac{x}{n}} &= 1+\frac{x}{n}.n[A+nf(a,n)]+ \\ &+\frac{x(x-n)}{1.2.n^2}.n^2[A+nf(a,n)]^2+ \\ &+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1.2.3.n^3}.n^3[A+nf(a,n)]^3+\cdots\end{aligned}$$

also $$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + n F(a, n, x)$$
eine Gleichheit, welche nur für F (a, n, x) = 0 bestehen kann, d. h. wenn die Reihe 2 statt hat, welche **Newton** zuerst aufgestellt haben soll, während man **Lagrange** die eben gegebene einfache Entwicklung zu verdanken hat.

47. Die logarithmische Reihe. Ist

$$a^x = y \qquad \text{oder} \qquad x = \overset{a}{\log} y \qquad \mathbf{1}$$

so erhält man durch (46 entsprechende) Entwicklung der identischen Gleichheit

$$[1 + (a-1)]^{nx} = [1 + (y-1)]^n$$

wenn für A noch 46:1 besteht,

$$\overset{a}{\log} y = \frac{1}{A}\left[\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots\right] \qquad \mathbf{2}$$

d. h. die sog. logarithmische Reihe.

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man

$$[1 + (a-1)]^{nx} = 1 + \frac{nx}{1}(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{1.2}(a-1)^2 + $$
$$+ \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \ldots$$
$$= 1 + nAx + n^2 \varphi(a, n, x)$$

und ferner

$$[1 + (y-1)]^n = 1 + n\left[\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots\right] + n^2 \psi(n, y)$$

also durch Gleichsetzung

$$Ax + n\varphi(a, n, x) = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots + n\psi(n, y)$$

woraus für n = 0 sofort 2 hervorgeht. — Man verdankt diese einfache Ableitung der logarithmischen Reihe ebenfalls **Lagrange**; dagegen ist die Reihe selbst viel früher, und zwar zuerst in der 48:6 gegebenen Form siemlich gleichzeitig theils von Nicolaus **Mercator** in der 3 angegebenen Schrift bekannt gemacht worden, theils von James **Gregory** (Aberdeen 1638 — Edinburgh 1675; Professor der Mathematik in St. Andrews und Edinburgh) in seinen „Exercitationes geometricæ. London 1668 in 4." Letzterer ist nicht zu verwechseln mit seinem Neffen David Gregory (Aberdeen 1661 — Maidenhead 1710; Professor der Mathematik in Edinburgh und der Astronomie in Oxford), dem Grossvater oder wohl eher Urgrossvater von Duncan Farquharson Gregory (Edinburgh 1813 — Cambridge 1844; Examinator der Mathematik in Cambridge; vergl. dessen „Mathematical writings with biography by R. Leslie, Cambridge 1865 in 8."), einem der Gründer des Cambridge Mathematical Journal.

48. Die natürlichen Logarithmen. Für $x = 1/A$ gibt die Exponentialreihe 46:2

$$a^{1/A} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 2{,}71828\ 18285 = e$$

Für A = 1 wird somit a = e, und heisst dann Basis der natürlichen oder Neper'schen Logarithmen. Bezeichnet man daher letztere

schlechtweg mit log., so hat man (46, 47)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots \qquad 1$$

$$\log y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \cdots \qquad 2$$

$$A = \log a \qquad \overset{a}{\log} y = \frac{1}{A} . \log y \qquad 3$$

$$a^x = 1 + x . \log a + \frac{x^2}{1.2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3} (\log a)^3 + \cdots \qquad 4$$

oder, wenn in 4 successive $x = 1$ und $a = x$ gesetzt wird,

$$x = 1 + \log x + \frac{1}{1.2} (\log x)^2 + \frac{1}{1.2.3} (\log x)^3 + \cdots \qquad 5$$

Für $y = 1 \pm z$ erhält man nach 2

$$\log (1 \pm z) = \pm z - \frac{1}{2} z^2 \pm \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \pm \cdots \qquad 6$$

und hieraus

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2 \left[z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \cdots \right] \qquad 7$$

Die letztere Reihe gibt für $z = 1/3,\ 2/4,\ 3/5, \ldots$ die natürlichen Logarithmen von 2, 3, 4, etc.

Weitere Decimalen von e, der gemeine Logarithmus dieser Zahl und seine Vielfachen finden sich in IV. Letztere dienen (vergl. 49), da nach 3

$$\overset{a}{\log} e = \frac{1}{A} . \log e = \frac{1}{A} \quad \text{also} \quad \overset{a}{\log} y = \overset{a}{\log} e . \log y \qquad 8$$

zum Umsetzen der natürlichen in gemeine Logarithmen. — Bezeichnet man die Werthe, welche die Exponentialfunction

$$y = a . e^{px} + b . e^{-px} \qquad 9$$

für $x = x_1,\ x_1 + i,\ x_1 + 2i$ annimmt, mit $y_1,\ y_2,\ y_3$, so hat man

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = \frac{a e^{px_1} . e^{2pi} + b e^{-px_1} . e^{-2pi} + a e^{px_1} + b e^{-px_1}}{a e^{px_1} . e^{pi} + b e^{-px_1} . e^{-pi}} \qquad 10$$

$$= e^{pi} + e^{-pi}$$

so dass dieses Verhältniss von den Constanten a und b unabhängig wird.

49. Die gemeinen Logarithmen. Hat man von einer Reihe von Zahlen die natürlichen Logarithmen berechnet, so hat man sie (48:3) zur Reduction auf eine andere Basis a nur mit dem sog. **Modulus** $1 : \log a$ zu multipliciren, so z. B. um sog. gemeine oder Brigg'sche Logarithmen zu erhalten, mit

$$1 : \log 10 = 0{,}43429\ 44819$$

Setzt man $z = \delta : (2y + \delta)$, so erhält man (48:7)

$$\overset{a}{\log} (y + \delta) = \overset{a}{\log} y + \frac{2}{\log a} \left[\frac{\delta}{2y + \delta} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{2y + \delta} \right)^3 + \cdots \right]$$

d. h. eine ganz bequeme logarithmische Interpolationsformel.

Weitere Decimalen des Modulus, sein reciproker Werth, und ihre Vielfachen finden sich in IV, unterhalb der zehnstelligen natürlichen und gemeinen Logarithmen aller Primzahlen von 1 bis 1000, mit deren Hülfe jeder Logarithmus nach der soeben gegebenen Interpolationsformel leicht gefunden werden kann. So z. B. ist $48624 = 486{,}24 . 100 = 100\,(2 . 3^5 + 0{,}24)$, also

$$\begin{aligned}\overset{10}{\log} 48624 &= 2 + \overset{10}{\log} 2 + 5 \overset{10}{\log} 3 + \frac{2}{\log 10} \cdot \frac{0{,}24}{972{,}24} \\ &= \quad 2{,}00000\ 00000 \\ &\quad + 0{,}30102\ 99957 \\ &\quad + 2{,}38560\ 62735 \ \ldots\ 5 . 0{,}47712\ 12547 \\ &\quad + 0{,}00021\ 44136 \ \ldots\ \frac{48}{\log 10} : 97224 \\ &= \quad 4{,}68685\ 06828\end{aligned}$$

was mit der Angabe des Thesaurus bis auf eine Einheit in der 10ten Decimale übereinstimmt.

50. Die goniometrischen Reihen. Setzt man mit Euler

$$\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \operatorname{Sin} x \qquad \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \operatorname{Cos} x \tag{1}$$

oder

$$e^{\pm xi} = \operatorname{Cos} x \pm i . \operatorname{Sin} x \tag{2}$$

so folgen

$$\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1 \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{Cos} x = \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x} \tag{3}$$

$$(\operatorname{Cos} x \pm i \operatorname{Sin} x)^n = \operatorname{Cos} n x \pm i . \operatorname{Sin} n x \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}(x \pm y) &= \operatorname{Sin} x . \operatorname{Cos} y \pm \operatorname{Cos} x . \operatorname{Sin} y \\ \operatorname{Cos}(x \pm y) &= \operatorname{Cos} x . \operatorname{Cos} y \mp \operatorname{Sin} x . \operatorname{Sin} y\end{aligned} \tag{5}$$

etc., und nach 48

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin} x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots \\ \operatorname{Cos} x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\end{aligned} \tag{6}$$

Entwickelt man in 4, dem sog. **Moivre'schen Lehrsatze** (vergl. 99), die Seite links nach 43, so findet man, dass die Gleichheiten

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin} n x &= \binom{n}{1} \operatorname{Cos}^{n-1} x . \operatorname{Sin} x - \binom{n}{3} \operatorname{Cos}^{n-3} x . \operatorname{Sin}^3 x + \cdots \\ \operatorname{Cos} n x &= \operatorname{Cos}^n x - \binom{n}{2} \operatorname{Cos}^{n-2} x . \operatorname{Sin}^2 x + \cdots\end{aligned} \tag{7}$$

bestehen müssen, dass so z. B.

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin} 2x &= 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x &\qquad \operatorname{Sin} 3x &= 3 \operatorname{Sin} x - 4 \operatorname{Sin}^3 x \\ \operatorname{Cos} 2x &= 2 \operatorname{Cos}^2 x - 1 &\qquad \operatorname{Cos} 3x &= 4 \operatorname{Cos}^3 x - 3 \operatorname{Cos} x\end{aligned} \tag{8}$$

Setzt man ferner $\operatorname{Sin} x : \operatorname{Cos} x = \operatorname{Tg} x$, so folgt

$$\operatorname{Tg} x = \frac{e^{2xi} - 1}{i\,(e^{2xi} + 1)} \qquad \text{oder} \qquad e^{2xi} = \frac{1 + i . \operatorname{Tg} x}{1 - i . \operatorname{Tg} x} \tag{9}$$

und mit Hülfe von 3,6 und 43:4

$$\mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Sin}\,x\,(1-\mathrm{Sin}^2 x)^{-1/2}$$
$$= \mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}^3 x + \frac{3}{8}\mathrm{Sin}^5 x + \frac{5}{16}\mathrm{Sin}^7 x + \cdots \qquad \mathbf{10}$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

Und so weiter.

Die Gleichheiten 8 bis 10 verificiren sich mit Hülfe von 1 bis 2, und überhaupt auf die im Texte angegebene Weise sehr leicht; so z. B. ist

$$\mathrm{Sin}\,x\,.\,\mathrm{Cos}\,y + \mathrm{Cos}\,x\,.\,\mathrm{Sin}\,y = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\cdot\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2} + \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\cdot\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}$$
$$= \frac{e^{(x+y)i}-e^{-(x+y)i}}{2i} = \mathrm{Sin}\,(x+y)$$

etc. — Aus 5 folgt auch mit Hülfe der Tangentendefinition

$$\mathrm{Tg}\,(x \pm y) = \frac{\mathrm{Tg}\,x \pm \mathrm{Tg}\,y}{1 \mp \mathrm{Tg}\,x\,.\,\mathrm{Tg}\,y} \qquad \mathbf{11}$$

und entsprechend 10 erhält man

$$\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Tg}\,x\,(1+\mathrm{Tg}^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{Tg}\,x - \frac{1}{2}\mathrm{Tg}^3 x + \frac{3}{8}\mathrm{Tg}^5 x - \frac{5}{16}\mathrm{Tg}^7 x + \ldots \qquad \mathbf{12}$$

Setzt man

$$\mathrm{Cos}\,x + i\,\mathrm{Sin}\,x = u \qquad \mathrm{Cos}\,x - i\,\mathrm{Sin}\,x = v \qquad \mathbf{13}$$

und somit

$$U = 2\,.\,\mathrm{Cos}\,x = u + v \qquad V = 2i\,.\,\mathrm{Sin}\,x = u - v \qquad 1 = u\,.\,v \qquad \mathbf{14}$$

so erhält man, wenn m eine positive ganze Zahl ist, nach dem Binomischen Lehrsatze und unter Berücksichtigung theils von 4, theils der aus 6 folgenden Gleichheiten $\mathrm{Sin}\,(-x) = -\mathrm{Sin}\,x$ und $\mathrm{Cos}\,(-x) = \mathrm{Cos}\,x$,

$$U^m = u^m + m\,u^{m-1}\,v + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-2}\,v^2 + \ldots + v^m$$
$$= u^m + m\,u^{m-2} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-4} + \ldots + u^{-m}$$
$$= \mathrm{Cos}\,m\,x + m\,\mathrm{Cos}\,(m-2)\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\mathrm{Cos}\,(m-4)\,x + \ldots + \mathrm{Cos}\,m\,x$$
$$+ i\,[\mathrm{Sin}\,m\,x + m\,\mathrm{Sin}\,(m-2)\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\mathrm{Sin}\,(m-4)\,x + \ldots - \mathrm{Sin}\,m\,x]$$

$$V^m = u^m - m\,u^{m-1}\,v + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-2}\,v^2 - \ldots + (-1)^m\,v^m$$
$$= u^m - m\,u^{m-2} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-4} - \ldots + (-1)^m\,u^{-m}$$
$$= \mathrm{Cos}\,m\,x - m\,\mathrm{Cos}\,(m-2)\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\mathrm{Cos}\,(m-4)\,x - \ldots + (-1)^m\,\mathrm{Cos}\,m\,x$$
$$+ i\,[\mathrm{Sin}\,m\,x - m\,\mathrm{Sin}\,(m-2)\,x + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\mathrm{Sin}\,(m-4)\,x - \ldots - (-1)^m\,\mathrm{Sin}\,m\,x]$$

Beachtet man, dass in beiden Entwicklungen rechts die symmetrischen Glieder gleich gross sind, aber bald gleiches, bald entgegengesetztes Zeichen haben, so ergeben sich, je nachdem man für m den geraden Werth 2 n oder den ungeraden Werth 2 n + 1 einführt, die vier wichtigen Reihen

$$\text{Cos}^{2n} x = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n} + $$
$$+ \frac{2}{4^n} \left[\begin{array}{l} \text{Cos}\, 2nx + 2n\,\text{Cos}\, 2(n-1)x + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \text{Cos}\, 2(n-2)x + \\ \dots\dots\dots + \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{1.2\dots(n-1)} \text{Cos}\, 2x \end{array} \right] \quad 15$$

$$\text{Cos}^{2n+1} x = \frac{1}{4^n} \left[\begin{array}{l} \text{Cos}(2n+1)x + (2n+1)\text{Cos}(2n-1)x + \frac{(2n+1)2n}{1.2} \text{Cos}(2n-3)x + \\ \dots\dots\dots + \frac{(2n+1)2n\dots(n+2)}{1.2\dots n} . \text{Cos}\, x \end{array} \right] \quad 16$$

$$\text{Sin}^{2n} x = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n} + $$
$$+ \frac{2}{(-4)^n} \left[\begin{array}{l} \text{Cos}\, 2nx - 2n\,\text{Cos}\, 2(n-1)x + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \text{Cos}\, 2(n-2)x - \\ \dots\dots + (-1)^{n-1} . \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{1.2\dots(n-1)} \text{Cos}\, 2x \end{array} \right] \quad 17$$

$$\text{Sin}^{2n+1} x = \frac{1}{(-4)^n} \left[\begin{array}{l} \text{Sin}(2n+1)x - (2n+1)\text{Sin}(2n-1)x + \frac{(2n+1)2n}{1.2} \text{Sin}(2n-2)x - \\ \dots\dots + (-1)^n \frac{(2n+1)2n\dots(n+2)}{1.2\dots n} \text{Sin}\, x \end{array} \right] \quad 18$$

zur Umsetzung der Potenzen von Sinus und Cosinus in Sinus und Cosinus der Vielfachen. — Die beiden Reihen 6 soll schon **Newton** aufgestellt, und sodann **Moivre** in seinen „Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini 1730 in 4.“ die Formeln

$$\text{Cos}\, x\, y = \frac{(\text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x)^y + (\text{Cos}\, x - i\,\text{Sin}\, x)^y}{2}$$
$$\text{Sin}\, x\, y = \frac{(\text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x)^y - (\text{Cos}\, x - i\,\text{Sin}\, x)^y}{2i} \quad 19$$

gegeben haben, welche allerdings die seinen Namen tragende 4 in sich fassen; aber eigentlich soll 4 selbst erst bei **Euler**, dem wir auch 1 und 2 verdanken, vorkommen. Es mag dabei noch bemerkt werden, dass man 4 auch die Form

$$(\text{Cos}\, x \pm i\,\text{Sin}\, x)^y = (\text{Cos}\, y \pm i\,\text{Sin}\, y)^x \quad 20$$

geben kann.

51. Die umgekehrten Reihen. Setzt man (50:2,9)

$$e^{2yi} = \text{Cos}\, 2y + i . \text{Sin}\, 2y = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{oder} \quad z = \frac{e^{2yi}-1}{e^{2yi}+1} = i . \text{Tg}\, y$$

so erhält man durch Logarithmiren (48:7)

$$y = \frac{1}{2i} \log \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{i}[z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \dots]$$
$$= \text{Tg}\, y - \frac{1}{3} \text{Tg}^3 y + \frac{1}{5} \text{Tg}^5 y - \frac{1}{7} \text{Tg}^7 y + \dots \quad 1$$

oder mit Hülfe von 50:10

$$y = \text{Sin}\, y + \frac{1}{6} \text{Sin}^3 y + \frac{3}{40} \text{Sin}^5 y + \frac{5}{112} \text{Sin}^7 y + \dots \quad 2$$

Und so weiter.

Statt 2 kann man auch schreiben

$$y = \mathrm{Sin}\, y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{Sin}^3 y}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\mathrm{Sin}^5 y}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\mathrm{Sin}^7 y}{7} + \ldots$$

und wenn daher $\frac{1}{2}\pi$ eine Zahl bezeichnet, deren Sinus gleich der Einheit ist, so folgt

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots \qquad 3$$

eine Reihe, welche jedoch für wirkliche Berechnung von π zu langsam convergirt. Setzt man dagegen $\mathrm{Sin}\, x = \frac{1}{2}$, so wird nach 50:8

$$\mathrm{Sin}\, 3x = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 \qquad \text{also} \qquad x = \frac{\pi}{6}$$

und man hat daher die weit rascher convergirende Reihe

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{128} + \ldots \qquad 4$$

deren erste 6 Glieder

$$\pi = 3{,}14159$$

ergeben. — Aus $\mathrm{Sin}\, \frac{\pi}{2} = 1$ folgen nach 50:3, 5, 8

$$\mathrm{Sin}\, \frac{\pi}{2} = 1 \qquad \mathrm{Sin}\, \pi = 0 \qquad \mathrm{Sin}\, \frac{3}{2}\pi = -1 \qquad \mathrm{Sin}\, 2\pi = 0$$

$$\mathrm{Cos}\, \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \mathrm{Cos}\, \pi = -1 \qquad \mathrm{Cos}\, \frac{3}{2}\pi = 0 \qquad \mathrm{Cos}\, 2\pi = 1$$

und so fortan.

52. Weitere Entwicklungen. Ist

$$\mathrm{Tg}\, x = a \,.\, \mathrm{Tg}\, y \qquad \text{und} \qquad \frac{a-1}{a+1} = b \qquad 1$$

so folgt (48, 50)

$$x = y + b \,.\, \mathrm{Sin}\, 2y + \frac{b^2}{2} \mathrm{Sin}\, 4y + \frac{b^3}{3} \mathrm{Sin}\, 6y + \ldots \qquad 2$$

Setzt man dagegen

$$\mathrm{Tg}\, y = \frac{a \,.\, \mathrm{Sin}\, x}{1 - a \,.\, \mathrm{Cos}\, x} = a\, \mathrm{Sin}\, x\, (1 + a\, \mathrm{Cos}\, x + a^2 \mathrm{Cos}^2 x + \ldots) \qquad 3$$

so ergibt sich (51:1 und 50:8)

$$y = a \,.\, \mathrm{Sin}\, x + \frac{a^2}{2} \mathrm{Sin}\, 2x + \frac{a^3}{3} \mathrm{Sin}\, 3x + \ldots \qquad 4$$

Setzt man (50:2)

$$y = \mathrm{Cos}\, x + i\, \mathrm{Sin}\, x = e^{xi} \qquad \text{oder} \qquad \log y = xi$$

so folgt (50:1, 9)

$$\log y = i \,.\, \mathrm{Arc\, Sin} \frac{y^2 - 1}{2yi} = i \,.\, \mathrm{Arc\, Cos} \frac{y^2 + 1}{2y} = 2i\, \mathrm{Arc\, Tg} \frac{i(1-y)}{1+y} \qquad 5$$

Ueberdiess hat man

$$\log \sqrt{1 + 2a\, \mathrm{Cos}\, x + a^2} = a\, \mathrm{Cos}\, x - \frac{a^2}{2} \mathrm{Cos}\, 2x + \frac{a^3}{3} \mathrm{Cos}\, 3x - \ldots \qquad 6$$

Ferner, wenn π eine Zahl bezeichnet, für welche $\mathrm{Sin}\, \frac{\pi}{2}$ gleich 1 ist,

$$\text{Sin } x = x\left[1-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right].\left[1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].\left[1-\left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right]\dots$$
$$\text{Cos } x = \left[1-4\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right].\left[1-4\left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right].\left[1-4\left(\frac{x}{5\pi}\right)^2\right]\dots \qquad 7$$

und zur Bestimmung von π aus der erstern dieser Factorenfolgen

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\dots.}{1.3.3.5.5.7.7.9\dots.} \qquad 8$$

Endlich

$$\frac{1}{\text{Sin } x} = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)}{1.2}B_1 x + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4}B_2 x^3 + \frac{2(2^5-1)}{1.2.3.4.5.6}B_3 x^5 + ..$$
$$\frac{1}{\text{Cos } x} = 1 + \frac{1}{1.2}E_1 x^2 + \frac{1}{1.2.3.4}E_2 x^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}E_3 x^6 + .. \qquad 9$$
$$\text{Tg } x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6}B_3 x^5 + ..$$
$$\frac{1}{\text{Tg } x} = \frac{1}{x} - \frac{2^2}{1.2}B_1 x - \frac{2^4}{1.2.3.4}B_2 x^3 - \frac{2^6}{1.2.3.4.5.6}B_3 x^5 + .. \qquad 10$$

wo in der ersten und vierten Reihe $x < \pi$, in der zweiten und dritten Reihe $x < \frac{\pi}{2}$, und wo die sog. **Bernoulli'schen Zahlen**

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad B_2 = \frac{1}{30} \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad B_4 = \frac{1}{30} \quad B_5 = \frac{5}{66}$$
$$\dots.B_m = 1.2.3\dots 2m \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \sum_1^\infty \frac{1}{r^{2m}} \qquad 11$$

und die sog. **Euler'schen Zahlen**

$$E_1 = 1 \quad E_2 = 5 \quad E_3 = 61 \quad E_4 = 1385 \quad E_5 = 50521$$
$$\dots.E_m = 1.2.3\dots 2m \frac{2}{(^1/_2\pi)^{2m+1}} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{2m+1}} \qquad 12$$

sind.

Aus 1 folgt zunächst nach 50 : 9

$$e^{2xi} = \frac{1+a\,i\,\text{Tg}\,y}{1-a\,i\,\text{Tg}\,y} = \frac{1-a+(1+a)e^{2yi}}{1+a+(1-a)e^{2yi}} = e^{2yi}.\frac{1-b\,e^{-2yi}}{1-b\,e^{2yi}}$$

hieraus durch Logarithmiren mit Hülfe von 48 : 6

$$2xi = 2yi - (b\,e^{-2yi} + \frac{b^2}{2}e^{-4yi} + \frac{b^3}{3}e^{-6yi} + \dots)$$
$$+ (b\,e^{2yi} + \frac{b^2}{2}e^{4yi} + \frac{b^3}{3}e^{6yi} + \dots)$$

und hieraus 2 nach 50 : 1. — Aus 50 : 1, 9 folgen

$$\text{Sin } x = \frac{y - \frac{1}{y}}{2i} = \frac{y^2-1}{2yi} \qquad \text{Cos } x = \frac{y+\frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2+1}{2y} \qquad \text{Tg}\frac{x}{2} = \frac{y-1}{i(y+1)} = i\frac{1-y}{1+y}$$

und hieraus die 5. — Nach 48:6 findet man

$$\log\sqrt{1+2a\,\mathrm{Cos}\,x+a^2}=\frac{1}{2}\log[1+(2a\,\mathrm{Cos}\,x+a^2)]=$$
$$=\frac{1}{2}[(2a\,\mathrm{Cos}\,x+a^2)-\frac{1}{2}(2a\,\mathrm{Cos}\,x+a^2)^2+\frac{1}{3}(2a\,\mathrm{Cos}\,x+a^2)^3-\ldots]$$
$$=a\,\mathrm{Cos}\,x-\frac{a^2}{2}(2\,\mathrm{Cos}^2x-1)+\frac{a^3}{3}(4\,\mathrm{Cos}^3x-3\,\mathrm{Cos}\,x)-\ldots$$

woraus 6 mit Hülfe von 50:8 hervorgeht. — Für die Ableitung von 7—12 halte ich mich an den von **Raabe** im ersten Hefte seiner „Mathematischen Mittheilungen. Zürich 1857—1858, 2 Hefte in 8." eingeschlagenen Weg: Aus 50:6 folgt

$$\mathrm{Sin}\,x=x\left[1-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}-\ldots\right]$$

ein Ausdruck, welcher nach 51 Null werden muss, theils wenn x den Werth 0, theils wenn x einen der Werthe $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$,... annimmt. Es müssen also $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$,... Wurzeln des Ausdruckes in der Klammer sein. Setzt man in demselben $x=\frac{1}{y}$ und multiplicirt mit y^n, so erhält man

$$y^n-\frac{y^{n-2}}{1.2.3}+\frac{y^{n-4}}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

mit den Wurzeln

$$\frac{1}{\pi}\quad \frac{1}{2\pi}\quad \frac{1}{3\pi}\ldots,\qquad -\frac{1}{\pi}\quad -\frac{1}{2\pi}\quad -\frac{1}{3\pi}\ldots$$

also kann man

$$y^n-\frac{y^{n-2}}{1.2.3}+\frac{y^{n-4}}{1.2.3.4.5}-\ldots=\left(y-\frac{1}{\pi}\right)\left(y+\frac{1}{\pi}\right)\left(y-\frac{1}{2\pi}\right)\left(y+\frac{1}{2\pi}\right)\cdots$$
$$=\left(y^2-\frac{1}{\pi^2}\right)\left(y^2-\frac{1}{4\pi^2}\right)\cdots$$

setzen, oder mit y^n dividirend, und $\frac{1}{y}$ wieder durch x ersetzend,

$$1-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}\cdots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

d. h. es besteht die erste der Reihen 7. Die zweite wird ganz entsprechend gefunden, indem man 51 entnimmt, dass Cos x für $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$,... verschwinden muss. — Aus 7 folgt für $x=\frac{\pi}{2}$

$$1=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{4}\right]\left[1-\frac{1}{16}\right]\left[1-\frac{1}{36}\right]\cdots\left[1-\frac{1}{4n^2}\right]\cdots$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2}\right]\left[1+\frac{1}{2}\right]\left[1-\frac{1}{4}\right]\left[1+\frac{1}{4}\right]\cdots\left[1-\frac{1}{2n}\right]\left[1+\frac{1}{2n}\right]\cdots$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

und somit 8. — Aus 7 folgt ferner

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x}=\frac{1}{x\cdot\frac{\pi-x}{\pi}\cdot\frac{\pi+x}{\pi}\cdot\frac{2\pi-x}{2\pi}\cdot\frac{2\pi+x}{2\pi}\cdots\frac{r\pi-x}{r\pi}\cdot\frac{r\pi+x}{r\pi}\cdots}$$

oder mit Benutzung der in 66 näher besprochenen Methode des Zerlegens in sog. Partialbrüche

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha_1}{\pi - x} + \frac{\beta_1}{\pi + x} + \frac{\alpha_2}{2\pi - x} + \frac{\beta_2}{2\pi + x} + \cdots$$
$$= \frac{\alpha}{x} + \Sigma \frac{\alpha_r}{r\pi - x} + \Sigma \frac{\beta_r}{r\pi + x}$$

wo die α und β sofort näher zu bestimmende, von x unabhängige oder constante Grössen sind, und das Summenzeichen von $r = 1$ bis $r = \infty$ zu nehmen ist, — oder

$$1 = \alpha . \frac{\operatorname{Sin} x}{x} + \Sigma \alpha_r . \frac{\operatorname{Sin} x}{r\pi - x} + \Sigma \beta_r . \frac{\operatorname{Sin} x}{r\pi + x} \qquad 13$$

Setzen wir hier für x eine ohne Ende abnehmende Grösse w, so reducirt sich das erste Glied rechts auf $\alpha w : w = \alpha$, während alle übrigen Glieder mit w verschwinden; es ist also $\alpha = 1$. Setzen wir dagegen $x = r\pi - w$ oder $x = -r\pi + w$, so reducirt sich, da nach 50 : 5 und 51

$$\operatorname{Sin}(r\pi - w) = -\operatorname{Cos} r\pi . \operatorname{Sin} w = (-1)^{r-1} . w$$
$$\operatorname{Sin}(w - r\pi) = \operatorname{Cos} r\pi . \operatorname{Sin} w = (-1)^r . w$$

ist, 13 im ersten Fall auf $\alpha_r = (-1)^{r-1}$ und im zweiten Falle auf $\beta_r = (-1)^r$, und man hat daher statt 13

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{r\pi - x} + \frac{(-1)^r}{r\pi + x} + \cdots$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} + \cdots + (-1)^{r-1} . \frac{2x}{(r\pi)^2 - x^2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{x} + 2x \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{(r\pi)^2 - x^2} \qquad 14$$

oder, wenn man x durch $\frac{\pi}{2} - x$ ersetzt,

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{\frac{2r-1}{2}\pi + x} + \frac{(-1)^r}{\frac{2r+1}{2}\pi - x} + \cdots$$
$$= \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \cdots + (-1)^{r-1} . \frac{(2r-1)\pi}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2} + \cdots$$
$$= \pi \Sigma (-1)^{r-1} . \frac{2r-1}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2} \qquad 15$$

Für alle Werthe von x, welche numerisch kleiner als $r\pi$, oder, da r die untere Grenze 1 erreichen kann, kleiner als π sind, hat man aber die Gleichheit

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r\pi)^2 - x^2} = \frac{(-1)^{r-1}}{r^2\pi^2} \left[1 + \left(\frac{x}{r\pi}\right)^2 + \left(\frac{x}{r\pi}\right)^4 + \cdots\right]$$

und entsprechend für alle Werthe von x, welche numerisch kleiner als $\frac{2r-1}{2}\pi$, oder also kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, die Gleichheit

$$\frac{(-1)^{r-1}}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2} = \frac{4.(-1)^{r-1}}{(2r-1)^2\pi^2} \left[1 + \left(\frac{2x}{(2r-1)\pi}\right)^2 + \left(\frac{2x}{(2r-1)\pi}\right)^4 + \cdots\right]$$

also kann man 14 und 15 durch

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{r^2} + \frac{2x^3}{\pi^4} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{r^4} + \cdots$$
$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \frac{2^2}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} + \frac{2^4 x^2}{\pi^3} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^3} + \frac{2^6 x^4}{\pi^5} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^5} + \cdots$$

ersetzen. Da endlich letztere Gleichheit für $x = 0$

$$1 = \frac{2^2}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{16}$$

d. h. die schon von **Leibnitz** für π aufgestellte Reihe gibt, und

$$\Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{r^{2m}} = \frac{1}{1^{2m}} - \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} - \frac{1}{4^{2m}} + \cdots$$

$$= \Sigma \frac{1}{r^{2m}} - 2\left(\frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{6^{2m}} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right) \Sigma \frac{1}{r^{2m}}$$

ist, so erhält man die zwei Reihen

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)x}{2\pi^2} \Sigma \frac{1}{r^2} + \frac{2(2^3-1)x^3}{2^3\pi^4} \Sigma \frac{1}{r^4} + \cdots \tag{17}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} = 1 + \frac{2^4 x^2}{\pi^3} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^3} + \frac{2^6 x^4}{\pi^5} \Sigma \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^5} + \cdots \tag{18}$$

welche, unter Einführung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen nach 11 und 12, sofort in die beiden Reihen 9 übergehen. Um letztere Zahlen bequem berechnen zu können, lassen sich leicht Recursionen aufstellen: Man hat hiefür nur jede der beiden Reihen 9 mit der betreffenden der Reihen 50 : 6 zu multipliciren, wodurch sich zwei neue Gleichheiten ergeben, welche links 1, und rechts ausser 1 je eine nach den geraden Potenzen von x fortschreitende Reihe enthalten, also für jeden Werth von x nur dann bestehen können, wenn die einzelnen Factoren dieser Potenzen für sich Null sind, d. h. wenn

$$\frac{2(2-1)}{2!} B_1 - \frac{1}{3!} = 0 \qquad \frac{2(2^3-1)}{4!} B_2 - \frac{2(2-1)}{3!\,2!} B_1 + \frac{1}{5!} = 0$$

$$\frac{2(2^5-1)}{6!} B_3 - \frac{2(2^3-1)}{3!\,4!} B_2 + \frac{2(2-1)}{5!\,2!} B_1 - \frac{1}{7!} = 0 \qquad \text{etc.} \tag{19}$$

und

$$E_1 - 1 = 0 \qquad E_2 - \binom{4}{2} E_1 + \binom{4}{4} = 0$$

$$E_3 - \binom{6}{2} E_2 + \binom{6}{4} E_1 - \binom{6}{6} = 0 \qquad \text{etc.} \tag{20}$$

sind. — Durch Logarithmiren der Gleichheiten 7 erhält man

$$\log \operatorname{Sin} x = \log x + \Sigma \left[\log\left(1 + \frac{x}{r\pi}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{r\pi}\right)\right] \tag{21}$$

$$\log \operatorname{Cos} x = \Sigma \left[\log\left(1 + \frac{2x}{(2r-1)\pi}\right) + \log\left(1 - \frac{2x}{(2r-1)\pi}\right)\right] \tag{22}$$

Wird in diesen Gleichheiten x durch $x + w$ ersetzt, und je von der so erhaltenen neuen die alte abgezogen, so erhält man

$$\log \frac{\operatorname{Sin}(x+w)}{\operatorname{Sin} x} = \log\left(1 + \frac{w}{x}\right) + \Sigma \left[\log\left(1 + \frac{w}{r\pi + x}\right) + \log\left(1 - \frac{w}{r\pi - x}\right)\right]$$

$$\log \frac{\operatorname{Cos}(x+w)}{\operatorname{Cos} x} = \Sigma \left[\log\left(1 + \frac{2w}{(2r-1)\pi + 2x}\right) + \log\left(1 - \frac{2w}{(2r-1)\pi - 2x}\right)\right]$$

Da aber für einen kleinen Werth von w

$$\frac{\operatorname{Sin}(x+w)}{\operatorname{Sin} x} = 1 + \frac{w}{\operatorname{Tg} x} \qquad \frac{\operatorname{Cos}(x+w)}{\operatorname{Cos} x} = 1 - w \operatorname{Tg} x$$

so folgen unter Anwendung von 48:6 aus diesen Reihen

$$\frac{w}{Tg\,x} - \frac{1}{2}\frac{w^2}{Tg^2\,x} + \dots = \frac{w}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{x^2} + \dots$$

$$+\Sigma\left[\begin{array}{l}\frac{w}{r\pi+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{(r\pi+x)^2} + \dots \\ -\frac{w}{r\pi-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{(r\pi-x)^2} - \dots\end{array}\right]$$

$$-w\,Tg\,x - \frac{1}{2}w^2\,Tg^2 x - \dots = \Sigma\left[\begin{array}{l}\frac{2w}{(2r-1)\pi+2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2w}{(2r-1)\pi-2x}\right)^2 + \dots \\ -\frac{2w}{(2r-1)\pi-2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2w}{(2r-1)\pi-2x}\right)^2 - \dots\end{array}\right]$$

oder, wenn man beidseitig durch w dividirt, und dann w verschwinden lässt,

$$\frac{1}{Tg\,x} = \frac{1}{x} + \Sigma\left[\frac{1}{r\pi+x} - \frac{1}{r\pi-x}\right] = \frac{1}{x} - \Sigma\frac{2x}{(r\pi)^2 - x^2}$$

$$Tg\,x = \Sigma\left[\frac{2}{(2r-1)\pi-2x} - \frac{2}{(2r-1)\pi+2x}\right] = \Sigma\frac{2x}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2}$$

Da endlich entsprechend oben

$$\frac{2x}{(r\pi)^2 - x^2} = \frac{2x}{(r\pi)^2}\left[1 + \frac{x^2}{(r\pi)^2} + \frac{x^4}{(r\pi)^4} + \dots\right]$$

$$\frac{2x}{\left(\frac{2r-1}{2}\pi\right)^2 - x^2} = \frac{2^2 x}{(2r-1)^2\pi^2}\left[1 + \frac{2^2 x^2}{(2r-1)^2\pi^2} + \dots\right]$$

und

$$\Sigma\frac{1}{(2r-1)^{2n}} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots$$

$$= \Sigma\frac{1}{r^{2n}} - \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}}\dots\right)$$

$$= \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}\Sigma\frac{1}{r^{2n}}$$

so gehen die letzten Reihen in

$$\frac{1}{Tg\,x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2}\Sigma\frac{1}{r^2} - \frac{2x^3}{\pi^4}\Sigma\frac{1}{r^4} - \dots \qquad \mathbf{93}$$

$$Tg\,x = \frac{2.3.x}{\pi^2}\Sigma\frac{1}{r^2} + \frac{2.3.5.x^3}{\pi^4}\Sigma\frac{1}{r^4} + \dots \qquad \mathbf{94}$$

über, und diese stimmen unter Berücksichtigung von 11 mit 10 zusammen.

53. Convergenz und Divergenz. Wenn die Summe der n ersten Glieder einer ins Unendliche fortlaufenden Reihe sich immer mehr einem Grenzwerthe nähert, je grösser n wird, so heisst die Reihe **convergent**, sonst **divergent**; so ist z. B. die Reihe 26:4 für $a > 1$ convergent, sonst divergent, da nach 26:2

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^n(a-1)} \qquad \mathbf{1}$$

ist, und $1 : a^n(a-1)$ sich beim Wachsen von n der Grenze 0

oder ∞ nähert, je nachdem $a > 1$ ist oder nicht, — und jede Reihe, deren Glieder von einem bestimmten Gliede hinweg, kleiner oder grösser als ihre Glieder im ersten oder zweiten Falle sind, ist ebenfalls convergent oder divergent. — Bezeichnen t Zahlen, die mit zunehmendem Index sich Null nähern, so ist

$$t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - t_5 + \ldots < t_0 - t_1 + \ldots + t_{2n} > t_0 - t_1 + \ldots - t_{2n-1} \quad \mathbf{2}$$

Es weicht also die Summe der 2 n ersten Glieder von der Summe aller Glieder nicht um das erste der vernachlässigten Glieder ab, und die Reihe ist daher convergent; so z. B. ist die Reihe 48:6 für log $(1 + z)$ convergent, sobald $z < 1$. — Ist in einer Reihe $t_0 + t_1 + t_2 + \ldots$ vom n^{ten} Gliede hinweg das Verhältniss jedes Gliedes zum vorhergehenden kleiner als $r < 1$, so ist die Reihe convergent, da in diesem Falle $t_{n+1} < r.t_n$, $t_{n+2} < r.t_{n+1} < r^2.t_n$, $\ldots$, also

$$t_0 + t_1 + t_2 + \ldots < t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1} + \frac{t_n}{1-r} \quad \mathbf{3}$$

So z. B. ist die Reihe 48:6 für log $(1 - z)$ convergent, sobald $z < 1$; ebenso 48:1, da n immer so gewählt werden kann, dass das Verhältniss $\frac{x}{n} < 1$. — Die Grösse n kann immer gross genug angenommen werden, damit $x^n : (1.2\ldots n)$ kleiner als eine beliebige Grösse wird, da für $x < p < n$

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n} = \frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p+1} \cdots \frac{x}{n} < \frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} \cdot \left(\frac{x}{p}\right)^{n-p+1} \quad \mathbf{4}$$

So z. B. convergiren die Reihen 50:6 von einem gewissen Gliede hinweg.

In einzelnen Fällen kann man allerdings fast auf den ersten Blick erkennen, ob eine unendliche Reihe convergirt oder divergirt, — in andern Fällen könnte man sich dagegen ohne genauere Prüfung leicht täuschen. So z. B. könnte man leicht glauben, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

eine convergente Reihe sei; nun ist aber offenbar

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \left(\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\right)$$

und setzen wir hier, um die unendliche Reihe zu erhalten, $n = \infty$, so wird, da $\sqrt{\infty} = \infty$, und grösser als ∞ gewiss zum mindesten auch ∞ ist,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots = \infty$$

Es ist also nicht ohne Nutzen, Regeln, wie die beispielsweise im Texte

Gegebenen, aufzustellen, nach denen man eine Reihe auf Convergenz prüfen kann, und es hat sich nach dieser Richtung besonders **Cauchy** entschiedene Verdienste erworben. — Die in 3 liegende Regel folgt aus der in sich selbst klaren Ungleichheit

$$t_0+t_1+\cdots+t_{n-1}+t_n+t_{n+1}+t_{n+2}+\cdots<t_0+t_1+\cdots t_{n-1}+t_n+r.t_n+r^2.t_n+\cdots$$

in Verbindung mit der Gleichheit

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+\cdots$$

die aber selbst wieder nur unter der bereits gestellten Bedingung $r<1$ richtig ist. — Setzt man die in 4 vorkommende Grösse

$$\frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}\cdot\left(\frac{x}{p}\right)^{n-p+1}=\frac{x^n}{1.2\ldots(p-1).p^{n-p+1}}=\alpha$$

so erhält man durch Logarithmiren in Beziehung auf n eine Gleichung vom ersten Grade, aus welcher man somit n für gegebene Werthe von x, p und α berechnen kann.

54. Die Interpolation. Hat man eine Reihe von Zahlen $a_{-n}\ldots a_{-1}\ a\ a_1\ldots a_n$, und bildet aus ihnen, indem man jede Zahl von der Folgenden abzieht, sog. **erste Differenzen** Δa, aus diesen durch entsprechende Operation sog. **zweite Differenzen** $\Delta^2 a$, etc., die in der durch die Figur angegebenen Weise mit Indices versehen werden mögen, so ergibt sich leicht, **dass** jede Zahl der Tafel erhalten wird, indem man zu der über ihr stehenden die rechts oben von ihr stehende addirt, — **dass** überhaupt, wenn irgend eine Zahl der Tafel aus andern nach einem bestimmten Gesetze erhalten werden kann, auch jede andere nach demselben Gesetze aus entsprechenden erhältlich ist, — und **dass** namentlich

$$\begin{aligned}a_n&=a+\binom{n}{1}\Delta a+\binom{n}{2}\Delta^2 a+\binom{n}{3}\Delta^3 a+\cdots\\&=a+n\left[\Delta a+\frac{n-1}{2}\left[\Delta^2 a+\frac{n-2}{3}(\Delta^3 a+\ldots)\right]\right]\end{aligned}\qquad 1$$

ist. Die praktische Anwendung dieser sog. **Newton'schen Interpolationsformel** setzt dann allerdings noch voraus, dass das durch sie ausgedrückte Gesetz auch für Zwischenglieder gelte, und dass die höhern Differenzen Null zur Grenze haben. Statt den Differenzen I kann man ferner die zunächst über oder unter II stehenden Zahlen zur Interpolation benutzen, wenn man 1 durch

$$\begin{aligned}a_n&=a+\binom{n}{1}\Delta a+\binom{n}{2}\Delta^2 a_{-1}+\binom{n+1}{3}\Delta^3 a_{-1}+\binom{n+1}{4}\Delta^4 a_{-2}+\cdots\\&=a+n\left[\Delta a+\frac{n-1}{2}\left[\Delta^2 a_{-1}+\frac{n+1}{3}\left(\Delta^3 a_{-1}+\frac{n-2}{4}\Delta^4 a_{-2}+\ldots\right)\right]\right]\end{aligned}\qquad 2$$

ersetzt. Die hier erscheinenden geraden Differenzen liegen mit a auf derselben Horizontalen III, die ungeraden unterhalb. Führt man, um auch Letztere auf III zu bringen, noch die Mittel aus

ihnen und den ungeraden oberhalb ein, und bezeichnet sodann alle diese Differenzen mit δ, so hat man endlich

$$\begin{aligned} a_n = a + n\ & \left[\delta a - \frac{1}{6}\delta^3 a + \frac{1}{30}\delta^5 a - \frac{1}{140}\delta^7 a + \ldots\right] \\ + \frac{n^2}{2} & \left[\delta^2 a - \frac{1}{12}\delta^4 a + \frac{1}{90}\delta^6 a + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ + \frac{n^3}{6} & \left[\delta^3 a - \frac{1}{4}\delta^5 a + \frac{7}{120}\delta^7 a - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ + \frac{n^4}{24} & \left[\delta^4 a - \frac{1}{6}\delta^6 a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ + \frac{n^5}{120} & \left[\delta^5 a - \frac{1}{3}\delta^7 a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ + \frac{n^6}{720} & \left[\delta^6 a - \ldots\ldots\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad 3$$

welche Reihe in dem Falle grosse Vorzüge hat, wo a_n gleichzeitig für verschiedene Werthe von n berechnet werden muss.

Da nach den ausgesprochenen Grundsätzen aus

a	Δa	$\Delta^2 a$	$\Delta^3 a$	$\Delta^4 a$	
−2		−3		−4	
	−2		−3		
−1		−2		−3	
	−1		−2		
0		1		2	III
	0		−1		II
1		0		−1	
	1		0		
2		1		0	I

$$a_1 = a + \Delta a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{nothwendig}$$
$$\Delta a_1 = \Delta a + \Delta^2 a \ \ldots\ldots\ \text{folgt, also}$$
$$a_2 = a + 2\Delta a + \Delta^2 a \ \ldots\ldots\ \text{also auch}$$
$$\Delta a_2 = \Delta a + 2\Delta^2 a + \Delta^3 a \ .\ \text{folglich}$$
$$a_3 = a + 3\Delta a + 3\Delta^2 a + \Delta^3 a \ .\ \text{etc.}$$
$$\vdots \qquad \text{also muthmasslich}$$
$$a_n = a + \binom{n}{1}\Delta a + \binom{n}{2}\Delta^2 a + \ldots \ \text{und dann jedenfalls}$$
$$\Delta a_n = \Delta a + \binom{n}{1}\Delta^2 a + \ldots \ \text{folglich auch}$$
$$a_{n+1} = a + \binom{n+1}{1}\Delta a + \binom{n+1}{2}\Delta^2 a + \ldots$$

so ist 1 durch Induction erwiesen. Die Ableitung von 2 aus 1 wird durch

$$a_n = a + \binom{n}{1}\Delta a + \binom{n}{2}(\Delta^2 a_{-1} + \Delta^3 a_{-1}) + \binom{n}{3}(\Delta^3 a_{-1} + \Delta^4 a_{-1}) + \cdots$$

vermittelt, — die von 3 aus 2 durch

$$\Delta a = \frac{\Delta a + \Delta a_{-1} + \Delta^2 a_{-1}}{2} = \delta a + \frac{1}{2}\delta^2 a, \quad \Delta^3 a_{-1} = \delta^3 a + \frac{1}{2}\delta^4 a, \quad \text{etc.}$$

und

$$a_n = a + \binom{n}{1}\left(\delta a + \frac{1}{2}\delta^2 a\right) + \binom{n}{2}\delta^2 a + \binom{n+1}{3}\left(\delta^3 a + \frac{1}{2}\delta^4 a\right) + \cdots$$

Da z. B. nach IV

log		Δa	$\Delta^2 a$	$\Delta^3 a$	$\Delta^4 a$	$\Delta^5 a$	$\Delta^6 a$
101	= 2,0043213738						
		+42787980					
102	086001718		−417451				
		2370529		+8068			
103	128372247		409383		−233		
		1961146		7835		+10	
104	170333393		401548		223		−1
		1559598		7612		9	
105	211892991		393936		214		
		1165662		7398			
106	253058658		386538				
		0779124					
107	293837777						

so hat man nach 1 für $n = 0{,}43$

$$\log 101{,}43 = \log 101 + 0{,}43 \left[42787980 - \frac{0{,}57}{2} \left[-417451 - \frac{1{,}57}{3} (8068 - \ldots) \right] \right]$$
$$= 2{,}0061664253$$

Ferner gibt z. B. das Berliner-Jahrbuch für die Rectascension des Mondes

1848 VII 12, 0^h	$16^h\ 14^m\ 26^s{,}38$				
		$+25^m\ 3^s{,}99$			
12	16 39 30,32		$+23^s{,}75$		
		25 27,74		$-1^s{,}39$	
13, 0	17 4 58,06		22,36		$-0^s{,}85$
		25 50,10		2,24	
12	17 30 48,16		20,12		
		26 10,22			
14, 0	17 56 58,38				

also hat man, wenn in 3

$a = 17^h 4^m 58^s{,}06$, $\delta a = +25^m 38^s{,}92$, $\delta^2 a = +22^s{,}36$, $\delta^3 a = -1^s{,}81$, $\delta^4 a = -0^s{,}85$

gesetzt werden, für $n = \frac{1}{12}\, t$

$$a_n = 17^h 4^m 58^s{,}06 + 128^s{,}2683 \,.\, t - 0^s{,}07792 \,.\, t^2 - 0^s{,}000174\, t^3 - 0^s{,}000002 \,.\, t^4$$

wornach z. B. die Æ des Mondes 1848 VII 13 für alle Stunden von Mittag bis Mitternacht leicht berechnet werden kann, indem man einfach t successive die Werthe 1, 2, … 11 gibt.

VIII. Die Differential- und Integral-Rechnung.

55. Begriff der Differentialrechnung. Nimmt in $y = f(x)$ die unabhängige Variable x einen bestimmten Zuwachs Δx an, so erhält auch die abhängige Variable y einen bestimmten Zuwachs Δy. Das Verhältniss $\Delta y : \Delta x$ dieser Zunahmen hängt einerseits mit der Natur der Function f und der Grösse von x zusammen, ist aber anderseits auch von der Grösse von Δx abhängig, sobald die Function in Beziehung auf x nicht vom ersten Grade ist. Um diesen Einfluss von Δx zu entfernen, lässt man dasselbe unendlich abnehmen, wodurch sich $\Delta y : \Delta x$ einem bestimmten Werthe, der sog. Limes $(\Delta y : \Delta x)$, nähert, den man mit $dy : dx$ bezeichnet, und **Differentialquotient**, oder **Fluxion**, oder **erste Ableitung** nennt. Da somit nothwendig

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + w$$

wo w eine mit Δx verschwindende Grösse bezeichnet, so folgt

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + w \right) \Delta x \qquad \text{und somit} \qquad dy = \frac{dy}{dx} \,.\, dx$$

d. h. das sog. **Differential** einer abhängigen Variabeln ist gleich dem Differentialquotienten multiplicirt mit dem Differential der unabhängigen Variabeln. Die allgemeine Vorschrift zur Auffindung dieser Differentialquotienten aber liegt in den Gleichheiten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

wie wir unter den folgenden Nummern sehen werden.

Die ganze Entwicklung der Mathematik und speciell der Curvenlehre, drängte nach der Mitte des 17. Jahrhunderts zur Entdeckung der Differentialrechnung hin, und es ist daher begreiflicher, dass Letztere nahe gleichzeitig durch Mehrere der damals lebenden grossen Mathematiker gemacht wurde, als dass sich diese durch unerquickliche Prioritätsstreitigkeiten das Leben verbittern mochten. Ohne genauer auf den mit grosser Heftigkeit geführten langen Kampf einzugehen, dürften am Besten (entsprechend 8) Leibnitz und Newton gemeinschaftlich als Entdecker genannt, dagegen **Leibnitz** als derjenige bezeichnet werden, der einen bequemen Algorithmus für die neue Rechnung fand, — **Newton** als derjenige, der zuerst grossartige Anwendungen derselben machte, — während Jakob und Johann **Bernoulli** der Ruhm bleiben würde, sich des neuen Hülfsmittels sofort bemächtigt, und dasselbe rasch in ausgezeichneter Weise ausgebildet zu haben. Für den genannten Streit selbst sind ausser einigen schon in 8 erwähnten Schriften z. B. noch zu vergleichen: „John **Collins** (Wood-Eaton bei Oxford 1625 — Malmsbury 1683; erst Buchhändlerlehrling, dann Civilingenieur und Secretär der Roy. Society) et aliorum, Commercium epistolicum de analysi promota. Lond. 1712 in 8. (Neue Ausg. durch Biot et Lefort, Paris 1856 in 4.), — Gabr. **Cramer**, Virorum cel. G. Leibnitii et Joh. Bernoulli Commercium philosophicum et mathematicum. Lausannæ 1745, 2 Vol. in 4. (Neue vervollständigte Ausg. von Gerhardt in Leibnitz's Werken vergl. 3), — **Gerhardt**, Historische Entwicklung des Princip's der Differentialrechnung bis auf Leibnitz. Salzwedel 1840 in 4.; ferner: Historia et origo calculi differentialis a Leibnitio conscripta. Hannover 1846 in 4.; und: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibnitz. Halle 1848 in 4., — **Edleston**, Correspondence of Sir Js. Newton and Prof. Cotes, including letters of other eminent Men. London 1850 in 8., — H. **Siemann**, Leibnitzens Anspruch auf die Erfindung der Differentialrechnung. Leipzig 1857 in 4., — etc." — Für Lehrbücher der Differentialrechnung, etc. vergl. 45.

56. Differentiation der algebraischen Functionen. Ist

$$t = a - b.x + y.z + \frac{u}{v} \qquad 1$$

so hat man entsprechend 55 successive

$$t + \Delta t = a - b(x + \Delta x) + (y + \Delta y)(z + \Delta z) + \frac{u + \Delta v}{v + \Delta v}$$

$$\Delta t = -b\Delta x + (y.\Delta z + z.\Delta y + \Delta y.\Delta z) + \frac{v.\Delta u - u.\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$dt = -b.dx + (y.dz + z.dy) + \frac{v.du - u.dv}{v^2} \qquad 2$$

woraus die Differentialregeln für ein constantes Glied, einen constanten Factor, ein Product und einen Quotienten hervorgehen. — Ist $y = x^m$, so folgt (43)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad d(x^m) = m.x^{m-1}.dx \qquad 3$$

d. h. die Differentialregel für Potenzen.

Anstatt

$$d(y \cdot z) = y \cdot dz + z \cdot dy \quad \text{und} \quad d \cdot \frac{y}{z} = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$$

kann man offenbar auch

$$d(y \cdot z) = yz\left(\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right) \quad \text{und} \quad d \cdot \frac{y}{z} = \frac{y}{z}\left(\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right)$$

schreiben, und entsprechend kann allgemein

$$d \cdot \frac{x \cdot y \cdot z \ldots}{s \cdot t \cdot u \ldots} = \frac{x \cdot y \cdot z \ldots}{s \cdot t \cdot u \ldots}\left[\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \ldots - \frac{ds}{s} - \frac{dt}{t} - \frac{du}{u} - \ldots\right] \qquad 4$$

gesetzt werden.

57. Differentiation der transcendenten Functionen. Ganz entsprechend findet man (48, 50, 56)

$$d.\ a^x = a^x . \log a . dx \qquad d . \overset{a}{\log} x = \frac{dx}{x . \log a} \qquad 1$$

$$d . \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} x . dx \qquad d . \operatorname{Arc\,Sin} y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \qquad 2$$

$$d . \operatorname{Cos} x = - \operatorname{Sin} x . dx \qquad d . \operatorname{Arc\,Cos} y = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \qquad 3$$

$$d . \operatorname{Tg} x = \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} \qquad d . \operatorname{Arc\,Tg} y = \frac{dy}{1+y^2} \qquad 4$$

Und so weiter.

Aus $y = a^x$ folgt zunächst mit Hülfe von 46:1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{a^x}{\Delta x}\left[\frac{\log a . \Delta x}{1} + \frac{(\log a . \Delta x)^2}{1.2} + \ldots\right] =$$

$$= a^x . \log a\left[1 + \frac{\log a}{1.2}\Delta x + \ldots\right]$$

oder auf die Grenzen übergehend

$$\frac{dy}{dx} = a^x . \log a \quad \text{oder} \quad d . a^x = a^x . \log a . dx \quad \text{also} \quad d . e^x = e^x\,dx$$

Analog folgt aus $y = \overset{a}{\log} x$ mit Hülfe von 49

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overset{a}{\log}(x + \Delta x) - \overset{a}{\log} x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2}{\log a}\left[\frac{1}{2x + \Delta x} + \frac{1}{3}\,\frac{\Delta x^2}{(2x + \Delta x)^3} + \ldots\right]$$

oder auf die Grenzen übergehend

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log a} . \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad d . \overset{a}{\log} x = \frac{1}{\log a} . \frac{dx}{x} \quad \text{also} \quad d . \log x = \frac{dx}{x}$$

und ferner nach 50:1

$$d . \operatorname{Sin} x = d . \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} . dx = \operatorname{Cos} x . dx$$

etc. Ist aber $\text{Arc Sin } y = x$ oder $\text{Sin } x = y$, so folgt

$$dy = \text{Cos } x \cdot dx \quad \text{also} \quad dx = \frac{dy}{\text{Cos } x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

und so fort.

58. Differentiation der Functionen mit mehreren Variabeln. Ist $z = f(y)$ und $y = \varphi(x)$, so hat man offenbar

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Ist dagegen $z = f(x, y)$, so ist

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy \tag{2}$$

oder das **totale** Differential einer Function von mehreren Variabeln ist gleich der Summe der **partiellen** Differentialen nach den einzelnen Variabeln. Wenn endlich $u = \varphi(y, z)$, wo $y = F(x)$ und $z = f(x)$, so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{3}$$

und entsprechend für mehrere Variable.

Die partiellen Differentialquotienten werden oft in Klammern eingeschlossen, so dass man statt 2

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

schreibt. Da sodann entsprechend

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dx \cdot dy}\right) dy, \quad d\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dy \cdot dx}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dy$$

und das zweite Differential von z nach x und y offenbar denselben Werth behalten muss, ob man zuerst nach x und dann nach y, oder zuerst nach y und dann nach x differentirt, so folgt somit

$$d^2 z = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2 z}{dx \cdot dy}\right) dx \cdot dy + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dy^2$$

und entsprechend erhält man

$$d^3 z = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) dx^3 + 3\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) dx^2 dy + 3\left(\frac{d^3 z}{dx\, d^2 y}\right) dx\, dy^2 + \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) dy^3$$

etc., so dass also hier wieder die Binomialcoefficienten auftreten.

59. Differentiation der Gleichungen. Ist

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

so muss auch $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ und daher

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0 \quad \text{also} \quad \frac{d \cdot f(x, y)}{dx} = 0$$

sein. Man hat daher (58)

$$\frac{d \cdot f}{dx} + \frac{d \cdot f}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} \tag{2}$$

und entsprechend bei mehreren Variabeln.

Differentirt man 2 nochmals, so erhält man

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{df}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dx.dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

oder mit Benutzung von 2

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2f}{dx.dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right]:\frac{df}{dy}$$

$$=-\left[\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2-2\frac{d^2f}{dx.dy}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy}+\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]:\left(\frac{df}{dy}\right)^3 \qquad 3$$

etc. — Ist 1 unter der Form

$$x=\varphi(t) \qquad y=\psi(t) \qquad 4$$

gegeben, so erhält man

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t) \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx}=\psi'(t)\frac{dt}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad 5$$

Ferner mit Hülfe von 56:4

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\cdot\left[\frac{\psi''(t)}{\psi'(t)}-\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right]\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{1}{\varphi'(t)^3}\left[\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)\right] \qquad 6$$

etc. — Ist speciell

$$x^3-3cxy+y^3=0$$

so folgt durch Differentiation

$$3x^2dx-3cydx-3cxdy+3y^2dy=0$$

also

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-cy}{cx-y^2} \qquad \text{und sodann} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2c^3xy}{(cx-y^2)^3}$$

und so weiter.

60. Der Taylor'sche Lehrsatz. Ist $y=f(x)$ so beschaffen, dass den Substitutionen x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x,\ldots$ reelle Werthe y, $y_1=y+\Delta y$, $y_2=y+\Delta y_1,\ldots$ entsprechen, und bezeichnet man die höhern Differenzen mit $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y,\ldots$ so hat man entsprechend 54:1

$$y_n=y+\binom{n}{1}\Delta y+\binom{n}{2}\Delta^2 y+\binom{n}{3}\Delta^3 y+\binom{n}{4}\Delta^4 y+\ldots$$

$$=y+n.\Delta x.\frac{\Delta y}{\Delta x}+(n.\Delta x)^2.\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}+$$

$$+(n.\Delta x)^3.\frac{(1-\frac{1}{n}).(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}.\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}+\ldots$$

Nimmt man an, die Zunahme $n.\Delta x$, welche x erhält, während y in y_n übergeht, habe einen constanten Werth h, d. h. die Zahl n nehme, während Δx ohne Aufhören kleiner werde, in gleichem Verhältnisse zu, so erhält man, da die Brüche $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots$ sich der gemeinschaftlichen Grenze 1 nähern, wenn man

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \qquad \lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \text{etc.}$$

setzt, die sog. **Taylor'sche Reihe**

$$f(x+h) = y + \frac{h}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots \qquad 1$$

oder nach Lagrange's Schreibart

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots \qquad 2$$

wo die sog. zweite Ableitung $f''(x)$ ebenso aus $f'(x)$ hervorgeht, wie diese aus $f(x)$, etc. Entsprechend findet man

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{h}{1} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{k}{1} \cdot \frac{df}{dy} + \\ + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{hk}{1} \cdot \frac{d^2 f}{dx.dy} + \frac{k^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} + \ldots \qquad 3$$

und so weiter.

Der Taylor'sche Lehrsatz wurde entsprechend seinem Namen zuerst von Brook **Taylor** (Edmonton 1685 — London 1731; Secretär der Roy. Society) in seinem Werke „Methodus incrementorum directa et inversa. London 1715 in 4." ausgesprochen; später beschäftigte sich namentlich **Lagrange** (vergl. seine beiden in 45 aufgeführten Werke) einlässlich damit, und lehrte z. B. den sog. Rest der Reihe oder zum mindesten Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen der aus dem Wegwerfen der spätern Glieder entstehende Fehler enthalten ist, — eine Untersuchung, die nachmals besonders durch André-Marie **Ampère** (Lyon 1775 — Marseille 1836; Professor der Mathematik und Physik in Paris, sowie Academiker; vergl. Arago Oeuvres II) vervollkommnet und erweitert wurde (vergl. Journ. de l'école pol., cah. 13). — Zur Ableitung von 3 hat man zunächst nach 1

$$f(x+h, y) = f(x,y) + \frac{h}{1} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \ldots$$

und sodann

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{k}{1} \frac{df}{dy} + \frac{k^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} + \ldots \\ + \frac{h}{1} \left(\frac{df}{dx} + \frac{k}{1} \frac{d^2 f}{dx.dy} + \frac{k^2}{1.2} \frac{d^3 f}{dx.dy^2} + \ldots \right) \\ + \frac{h^2}{1.2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{k}{1} \cdot \frac{d^3 f}{dx^2 dy} + \ldots \right) + \ldots$$

woraus 3 unmittelbar folgt. — Ist

$$\operatorname{Cos} y = z + b \qquad \text{wo} \qquad z = \operatorname{Cos} x \qquad 4$$

so folgt nach 2

$$y = \operatorname{Arc} \operatorname{Cos}(z+b) = f(z+b) = f(z) + \frac{b}{1} f'(z) + \frac{b^2}{1.2} f''(z) + \ldots$$

wo

$$f(z) = \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} z = x \qquad f'(z) = \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{\operatorname{Sin} x}$$

$$f''(z) = \frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin}^3 x} \qquad \text{etc.}$$

so dass also schliesslich, wenn y und x in der gewöhnlichen Winkeleinheit

ausgedrückt (d. h. nach 100 die übrigen Glieder mit Sin 1'' dividirt) werden,

$$y = x - \frac{b}{\operatorname{Sin} x \,.\, \operatorname{Sin} 1''} - \frac{b^2 \operatorname{Cos} x}{2 \operatorname{Sin}^3 x \,.\, \operatorname{Sin} 1''} - \ldots \qquad 5$$

Wird $y = f(x)$ für $x = \alpha$ gleich Null, für $a_1 = \alpha + h$ aber zu δ_1, und für $a_2 = \alpha + k$ zu δ_2, so hat man nach 2

$$\delta_1 = f(\alpha) + \frac{h}{1} f'(\alpha) + \ldots \qquad \delta_2 = f(\alpha) + \frac{k}{1} f'(\alpha) + \ldots$$

also, da $f(\alpha) = 0$, für kleine Werthe von h und k angenähert

$$\delta_1 = h f'(\alpha) \qquad \delta_2 = k f'(\alpha) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{h}{k} = \frac{a_1 - \alpha}{a_2 - \alpha}$$

woraus

$$\alpha = a_1 - \delta_1 \frac{a_1 - a_2}{\delta_1 - \delta_2} \qquad 6$$

folgt, d. h. die in 44 : 5 gefundene Regula falsi, welche nun aber hiemit nicht nur wie dort für algebraische, sondern auch für transcendente Functionen erwiesen ist.

61. Die Maclaurin'sche Reihe und die Lagrange'sche Reversionsformel. Setzt man in der Taylor'schen Reihe $x = 0$ und bezeichnet durch $f(0)$, $f'(0)$, ... die entsprechenden Werthe von $f(x)$, $f'(x)$, ... so erhält man, wenn schliesslich h mit x vertauscht wird, die sog. Maclaurin'sche Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \ldots \qquad 1$$

und mit ihrer Hülfe, wenn

$$u = \psi(y) \qquad y = w + x \,.\, \varphi(y) \qquad \frac{d\,\psi(w)}{d\,w} = z \qquad 2$$

ist, die sog. Lagrange'sche Reversionsformel

$$u = \psi(w) + \frac{x}{1}[\varphi(w)\,.\,z] + \frac{x^2}{1.2}\frac{d\,[\varphi(w)^2\,.\,z]}{d\,w} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2[\varphi(w)^3\,.\,z]}{d\,w^2} + \ldots \qquad 3$$

über deren Anwendung namentlich 416 zu vergleichen ist.

Aus 2 erhält man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dw} = 1 + x\,.\,\varphi'(y)\frac{dy}{dw} \qquad \text{oder} \qquad \frac{dy}{dw} = \frac{1}{1 - x\,.\,\varphi'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) + x\,.\,\varphi'(y)\frac{dy}{dx} \qquad \text{oder} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y)}{1 - x\,.\,\varphi'(y)} = \varphi(y)\cdot\frac{dy}{dw}$$

$$\frac{du}{dw} = \psi'(y)\cdot\frac{dy}{dw} \qquad \frac{du}{dx} = \psi'(y)\cdot\frac{dy}{dx} = \psi'(y)\cdot\varphi(y)\frac{dy}{dw} = \varphi(y)\frac{du}{dw}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \varphi(y)\frac{d^2u}{dw\,.\,dx} + \varphi'(y)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{du}{dw} = \varphi'(y)\frac{du}{dw}\frac{dy}{dx} + \varphi(y)\frac{d\,.\,\frac{du}{dx}}{dw} =$$

$$= \varphi'(y)\frac{du}{dw}\cdot\varphi(y)\frac{dy}{dw} + \varphi(y)\left[\varphi(y)\frac{d^2u}{dw^2} + \varphi'(y)\frac{dy}{dw}\frac{du}{dw}\right] =$$

$$= 2\,\varphi(y)\cdot\varphi'(y)\frac{dy}{dw}\times\frac{du}{dw} + \varphi(y)^2\times\frac{d^2u}{dw^2} = d\left[\varphi(y)^2\cdot\frac{du}{dw}\right] : dw$$

etc., oder, wenn man $x = 0$, also $y = w$ setzt

$$(u)_0 = \psi(w) \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \varphi(w)\cdot z \qquad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{d\,[\varphi(w)^2\,.\,z]}{dw} \quad \text{etc.}$$

also nach 1, da ψ (y) nach 2 auch eine Function von x ist, sofort 8. — Für die Reihe von **Maclaurin** vergleiche dessen in 45 erwähnte Schrift, während für die Reversionsformel von **Lagrange** dessen Abhandlung „Sur le problème de Keppler (Mém. de Berl. 1769)" nachzusehen ist. Für Letztere und ihre Verallgemeinerung vergl. auch „**Laplace**, Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes. Paris 1784 in 4., — Joh. Friedrich **Pfaff** (Stuttgart 1765 — Halle 1825; Professor der Mathematik zu Helmstädt und Halle; vergl. die von C. Pfaff herausgegebene Sammlung von Briefen. Leipzig 1853 in 8.), Analysis einer wichtigen Aufgabe des Herrn Lagrange und Anwendung derselben auf die Umkehrung der Reihen (Hindenburgs Archiv 1794), und: Disquisitiones analyticæ maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes. Helmstadii 1797 in 4., — Ludwig **Schläfli** (Burgdorf 1814; Professor der Mathematik in Bern), Ueber eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Lehrsatzes, für die der Beweis noch gefordert wird (Berner Mitth. 1848), — etc.; ferner für Anwendungen 416.

62. Unbestimmte Ausdrücke. — Da nach 60

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)} = \frac{f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots}{F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots}$$

so hat man, wenn für $x = a$ sowohl $f(x)$ als $F(x)$ gleich Null werden, für ein unendlich abnehmendes h

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Sollten auch $f'(a)$ und $F'(a)$ Null werden, so würde der Quotient der zweiten Ableitung an die Stelle treten, etc.; würde dagegen nur $f'(a)$ oder nur $F'(a)$ Null, so hätte $f(a) : F(a)$ den Werth 0 oder ∞; etc.

So z. B. ergibt sich aus

$$y = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \qquad \text{für } x = 1 \qquad y = \frac{0}{0}$$

Nun ist aber

$$\frac{d(x - x^{n+1})}{d(1-x)} = (n+1)x^n - 1 \qquad \text{also für } x = 1 \qquad y = n$$

und in der That folgt auch direct durch Division

$$y = x(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \qquad \text{also für } x = 1 \qquad y = n$$

Ebenso erhält man aus

$$y = \frac{a x^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2} \qquad \text{für } x = c \qquad y = \frac{0}{0}$$

aber auch noch aus

$$\frac{d(ax^2 - 2acx + ac^2)}{d(bx^2 - 2bcx + bc^2)} = \frac{ax - ac}{bx - bc} \qquad \text{für } x = c \qquad y = \frac{0}{0}$$

und erst aus

$$\frac{d(ax - ac)}{d(bx - bc)} = \frac{a}{b} \qquad \text{den bestimmten Werth} \qquad y = \frac{a}{b}$$

welchen man übrigens auch bei gehöriger Reduction des ursprünglichen

Ausdruckes ohne weiteres gefunden haben würde. Ist aber der unbestimmt werdende Ausdruck, wie z. B.

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \qquad \text{woraus für } x = 1 \qquad y = \frac{0}{0}$$

folgt, von der Art, dass der im Zähler und Nenner für einen bestimmten Fall verschwindende Factor einen gebrochenen Exponenten hat, so hilft auch ein fortgesetztes Differentiren nichts, da alsdann jener Factor nie verschwindet. Dagegen kann man in solchem Falle das Verfahren anwenden, in dem für $x = a$ unbestimmt werdenden Ausdrucke die Grösse x durch $(a + h)$ zu ersetzen, dann nach h zu entwickeln, und zuletzt $h = 0$ zu setzen. Substituirt man z. B. in dem eben erwähnten Falle $1 + h$ für x, so wird

$$y = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{2h + h^2}} = \frac{\sqrt[6]{h}}{\sqrt[3]{2+h}} \qquad \text{also für } h = 0 \qquad y = 0$$

Es führt sogar dieses letztere Verfahren auch oft da schneller zum Ziele, wo das Erstere brauchbar bleibt.

63. Maximum und Minimum. Offenbar nimmt f (x) für jeden Werth von x, dessen Nachbarwerthe zu beiden Seiten entweder beide Abnahme oder beide Zunahme von f (x) bedingen, ein Maximum oder ein Minimum an. Da nun eine Grösse h immer so klein angenommen werden kann, dass ein mit einer Potenz derselben behaftetes Glied über die Gesammtheit der Glieder mit höhern Potenzen dominirt, so folgt (60), dass für jeden Werth von x, der $f'(x) = 0$ macht, f (x) ein Maximum oder Minimum annimmt, je nachdem für denselben Werth von x die zweite Ableitung $f''(x)$ ein negatives oder positives Vorzeichen erhält.

Sollte in einem gegebenen Falle derselbe Werth von x, der $f'(x) = 0$ entspricht, auch $f''(x) = 0$ machen, so hätte nach denselben Grundsätzen nur dann ein Maximum oder Minimum statt, wenn auch noch $f'''(x) = 0$ und $f^{IV}(x)$ negativ oder positiv würde; etc. — Ganz entsprechend wird nach 60

$$z = f(x, y)$$

für jede Werthe von x und y, welche

$$\frac{dz}{dx} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dz}{dy} = 0$$

machen, ein Maximum oder Minimum annehmen, wenn für dieselben Werthe

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dx . dy} . hk + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{2} \qquad 1$$

negativ oder positiv wird, — etc. — Soll z. B. eine Zahl a so in zwei Theile x und $(a - x)$ getheilt werden, dass das Product

$$y = x(a - x)$$

ein Maximum wird, so muss $x = a/_2$ genommen werden, da dieser Werth von den Grössen

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -2$$

die erste auf Null reducirt, während die zweite negativ ist. — Soll eine Zahl 2 s in drei Theile a, b, c zerlegt werden, so dass

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ein Maximum wird, so setze man

$$a = \frac{2s}{3} + x \qquad b = \frac{2s}{3} + y \qquad c = \frac{2s}{3} - x - y$$

Dann folgt

$$z = (s-a)(s-b)(s-c) = (\frac{s}{3} - x)(\frac{s}{3} - y)(\frac{s}{3} + x + y)$$

und hieraus

$$\frac{dz}{dx} = -(\frac{s}{3} - y)(2x + y) \qquad \frac{dz}{dy} = -(\frac{s}{3} - x)(x + 2y)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -2(\frac{s}{3} - y) \qquad \frac{d^2z}{dx.dy} = 2x + 2y - \frac{s}{3} \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = -2(\frac{s}{3} - x)$$

Da nun $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ für $x = 0 = y$ verschwinden, und für diese Werthe der Ausdruck 2

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dx.dy} \cdot hk + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{2} = -\frac{s}{6}(h+k)^2$$

also bestimmt negativ wird, so erhält somit F für $a = b = c = {}^2/_3\, s$ einen Maximumswerth. Geometrisch gedeutet sagen diese beiden Resultate, dass von allen Rechtecken gleichen Umfanges das Quadrat, von allen Dreiecken gleichen Umfanges das gleichseitige Dreieck die grösste Fläche habe. Vergl. 113, 105 und 108. — Vergl. für eine andere Anwendung 390, — für die Geschichte „Jacques-Denis **Choisy** (Jussy 1799 — Genève 1859; Professor der Philosophie und Prediger in Genf), Essai historique sur le problème des Maximums. Genève 1823 in 4."

64. Begriff der Integralrechnung. Ist $y = F(x)$ und $\frac{dy}{dx} = f(x)$, d. h. ist $f(x).dx$ das Differential von $F(x)$, so nennt man umgekehrt $F(x)$ das **Integral** von $f(x).dx$. Das Operationszeichen des Integrirens ist $\int$, und es besteht somit die Gleichheit

$$\int f(x).dx = F(x) + \text{Const.} \qquad 1$$

wo Constans beigefügt worden, da (56) beim Differenziren constante Glieder wegfallen. So z. B. erhält man (56, 57)

$$\int a.dx = ax + C. \qquad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C. \qquad 2$$

$$\int v.du = uv - \int u.dv \qquad \int \frac{du}{v} = \frac{u}{v} + \int \frac{u.dv}{v^2} \qquad 3$$

$$\int a^x.dx = \frac{a^x}{\log a} + C. \qquad \int \frac{dx}{x} = \log a . \overset{a}{\log} . x + C. \qquad 4$$

$$\int \text{Cos}\,x.dx = \text{Sin}\,x + C. \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc Sin}\,x + C. \qquad 5$$

$$\int \frac{dx}{\text{Cos}^2 x} = \text{Tg}\,x + C. \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc Tg}\,x + C. \qquad 6$$

Und so weiter.

Die Integralrechnung wurde namentlich von Johannes **Bernoulli** mit Erfolg in Angriff genommen, und seine Abhandlung „De methodo integralium (Opera III)", die er 1691 und 1692 zu Gunsten seines damaligen Schülers

Hospital's schrieb, könnte als ein erstes Lehrbuch derselben betrachtet werden. Für spätere Werke über diesen wichtigen Abschnitt der Arithmetik vergl. 45. — Statt 4 kann man auch schreiben

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C. \qquad \int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

Die letztere Gleichheit tritt für 2^b in dem speciellen Falle ein, wo diese Letztere für $m = -1$ den Dienst versagt.

65. Integration durch Substitution. Nach 64 : 4 erhält man, wenn x mit $a \pm b\,x$, also $d\,x$ mit $\pm b\,d\,x$ vertauscht wird,

$$\int \frac{dx}{a \pm b\,x} = \pm \frac{1}{b} \log (a \pm b\,x) + C. \qquad 1$$

oder, wenn man diese Formel für + und — aufschreibt und addirt,

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2\,a\,b} \cdot \log \frac{a + b\,x}{a - b\,x} + C. \qquad 2$$

Vertauscht man hier b mit b i und benutzt 52 : 5, oder setzt (64 : 6) $\frac{b\,x}{a}$ statt x, so erhält man

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a\,b} \cdot \text{Arc Tg} \frac{b\,x}{a} + C. \qquad 3$$

Vertauscht man (64 : 5) ebenfalls x mit $\frac{b\,x}{a}$, so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \cdot \text{Arc Sin} \frac{b\,x}{a} + C. \qquad 4$$

oder, wenn man noch b in b i verwandelt (52 : 5),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \log (b\,x + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}) + C. \qquad 5$$

oder, wenn man x durch $\frac{1}{x}$ ersetzt und a mit b wechselt,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = -\frac{1}{a} \log \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x} + C. \qquad 6$$

Vertauscht man endlich x mit $x - c$ oder $x + c$, so erhält man nach 2 bis 5

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x - \gamma x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}} \log \frac{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2} + 2\gamma x - \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2} - 2\gamma x + \beta} + C. \qquad 7$$

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \text{Arc Tg} \frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} + C. \qquad 8$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{Arc Sin} \frac{2\gamma x - \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}} + C. \qquad 9$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log [2\gamma x + \beta + 2\sqrt{\gamma}\,\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}] + C. \qquad 10$$

Und so weiter.

also

$$du = Tg^{m-2}\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{Cos^2\varphi}, \qquad dv = -(m+n)\, Cos^{m+n-1}\varphi \,.\, Sin\,\varphi \,.\, d\varphi$$

$$du' = Tg^{m}\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{Cos^2\varphi}, \quad dv' = -(m+n+2)\, Cos^{m+n+1}\varphi \,.\, Sin\,\varphi \,.\, d\varphi$$

so erhält man nach 64:3 die Recursionen

$$\int Sin^m\varphi \,.\, Cos^n\varphi \,.\, d\varphi =$$

$$= -\frac{Sin^{m-1}\varphi \,.\, Cos^{n+1}\varphi}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int Sin^{m-2}\varphi \,.\, Cos^n\varphi \,.\, d\varphi \qquad 1$$

$$= \frac{Sin^{m+1}\varphi \,.\, Cos^{n+1}\varphi}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int Sin^{m+2}\varphi \,.\, Cos^n\varphi \,.\, d\varphi \qquad 2$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$\int \varphi^m \,.\, Sin\,\varphi \,.\, d\varphi = -\varphi^m \,.\, Cos\,\varphi + m\int \varphi^{m-1} \,.\, Cos\,\varphi \,.\, d\varphi \qquad 3$$

$$\int \varphi^m \,.\, Cos\,\varphi \,.\, d\varphi = \varphi^m \,.\, Sin\,\varphi - m\int \varphi^{m-1} \,.\, Sin\,\varphi \,.\, d\varphi \qquad 4$$

und, wenn $X = a + bx^n$ ist,

$$\int x^m \,.\, (a+bx^n)^p \,.\, dx = \int x^m \,.\, X^p \,.\, dx =$$

$$= \frac{x^{m+1} \,.\, X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \,.\, \int x^{m+n} \,.\, X^{p-1} \,.\, dx \qquad 5$$

$$= \frac{x^{m-n+1} \,.\, X^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} \,.\, \int x^{m-n} \,.\, X^{p+1} \,.\, dx \qquad 6$$

$$= \frac{x_{m+1} \,.\, X_{p+1}}{a(m+1)} - \frac{(m+n+np+1)\,b}{a(m+1)}\int x^{m+n} \,.\, X^p \,.\, dx$$

$$= \frac{x^{m-n+1} \,.\, X^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{(m-n+1)\,a}{(m+np+1)\,b}\int x^{m-n} \,.\, X^p \,.\, dx$$

$$= \frac{x^{m+1} \,.\, X^p}{m+np+1} + \frac{npa}{m+np+1}\int x^m \,.\, X^{p-1} \,.\, dx$$

$$= -\frac{x^{m+1} \,.\, X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+n+np+1}{an(p+1)}\int x^m \,.\, X^{p+1} \,.\, dx \qquad 1$$

nach denen sich eine grosse Reihe von Integralen finden las-
So z. B. findet man nach 3, 4, 8, 9 mit Hülfe von 64:5 r
65:2, 4

$$\int \varphi . Sin\varphi . d\varphi = -\varphi Cos\varphi + Sin\varphi, \quad \int \varphi . Cos\varphi . d\varphi = \varphi Sin\varphi + Cos\varphi$$

$$\int \varphi^2 . Sin\,\varphi . d\varphi = -\varphi^2 . Cos\,\varphi + 2\,\varphi\, Sin\,\varphi + 2\, Cos\,\varphi$$

$$\int \frac{x^2 . dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{a}{2b^3} . \log \frac{a+bx}{a-bx} - \frac{x}{b^2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} Arc\, Sin \frac{bx}{a}$$

Und so weiter.

Für m = [illegible]

$\int \text{Sin}^2\varphi \, d\varphi = -$ [illegible]

$\int \text{Sin}^4\varphi \, d\varphi = -$ [illegible]

$\int \text{Sin}^6\varphi \, d\varphi = -$ [illegible]

Für m = −2. [illegible]

$$\int \frac{d\varphi}{\text{Sin}^2\varphi} = -\text{Ctg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\text{Sin}^4\varphi} = -\frac{\text{Ctg}\,\varphi}{3}\left(2 + \frac{1}{\text{Sin}^2\varphi}\right) = -\frac{\text{Ctg}\,\varphi}{3}\ [\text{illegible}]$$

$$\int \frac{d\varphi}{\text{Sin}^6\varphi} = -\frac{\text{Ctg}\,\varphi}{3.5}\left(8 + \frac{4}{\text{Sin}^2\varphi} + \frac{3}{\text{Sin}^4\varphi}\right) = [\text{illegible}]$$

— Aus 64:3 erhält man 3 für $u = \varphi^m$ und v [illegible] $u = e^x$ und $v = \text{Sin}\,\varphi$, — für $u = \log x$ und [illegible]

$$\int x \cdot \log x \cdot dx = \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right)$$

[illegible] $= X$ und [illegible]

[illegible] Differentiation und [illegible]

etc. Für $m = -2, -4, -6$, etc. aber und $n = 0$ gibt 20

$$\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi} = \mathrm{Tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}^4\varphi} = \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi}{3}\left(2 + \frac{1}{\mathrm{Cos}^2\varphi}\right) = \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi}{3}(3 + \mathrm{Tg}^2\varphi) \qquad 22$$

$$\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}^6\varphi} = \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi}{3.5}\left(8 + \frac{4}{\mathrm{Cos}^2\varphi} + \frac{3}{\mathrm{Cos}^4\varphi}\right) = \frac{\mathrm{Tg}\,\varphi}{3.5}(15 + 10\,\mathrm{Tg}^2\varphi + 3\,\mathrm{Tg}^4\varphi)$$

und so weiter.

68. Verschiedene Integralformeln. Man findet ferner

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx}{\mathrm{Cos}^2 x} = \mathrm{Sec}\,.\,x \qquad \int \mathrm{Tg}\,x\,.\,dx = -\log \mathrm{Cos}\,x \qquad 1$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x} = \log \mathrm{Tg}\,\frac{x}{2} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Arc\,Sec}\,x \qquad 2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{b}\,\mathrm{Arc\,Sec}\,\frac{ax}{b} \qquad 3$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,.\,dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,.\,dx = \frac{6bx-4a}{15b^2}(a+bx)^{3/2} \qquad 4$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} \qquad 5$$

$$\int \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\,.\,dx = \frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad 6$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log\frac{2\alpha+\beta x-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{2\alpha+\beta x}{2\sqrt{-\alpha}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad 7$$

$$\int \frac{\mathrm{Sin}^2 x\,.\,dx}{\mathrm{Cos}^2 x} = \mathrm{Tg}\,x - x \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x\,.\,\mathrm{Cos}\,x} = \log \mathrm{Tg}\,x \qquad 8$$

$$\int \frac{dx}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{Arc\,Tg}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,.\,\mathrm{Sin}\,x}{a\,\mathrm{Cos}\,x+b} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{a\,\mathrm{Cos}\,x+b+\sqrt{b^2-a^2}\,\mathrm{Sin}\,x}{a+b\,\mathrm{Cos}\,x} \qquad 9$$

$$\int x^m.\log^n x\,.\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[\log^n x - \frac{n}{m+1}\log^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2}x - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}\log^{n-3}x + \ldots\ldots\right] \qquad 10$$

$$\int \frac{\log^n x}{x} dx = \frac{1}{n+1} \log^{n+1} x \qquad \int a^x . x . dx = \frac{a^x . x}{\log a} - \frac{a^x}{\log^2 a} \qquad \mathbf{11}$$

$$\int \frac{a^x . dx}{x} = \log x + x \log a + \frac{(x \log a)^2}{1.2^2} + \frac{(x \log a)^3}{1.2.3^2} + \dots \qquad \mathbf{12}$$

Und so weiter.

Die Formeln 1^a, 1^b, 3^a, 4^a, 5, 8^a, 8^b und 11^a verstehen sich aus dem Frühern von selbst, oder lassen sich durch beidseitiges Differentiren leicht verificiren; die übrigen Formeln dagegen können z. B. auf folgende Weise abgeleitet werden: Aus 50:8 folgt

$$\frac{\operatorname{Sin} 2x}{1 + \operatorname{Cos} 2x} = \operatorname{Tg} x \quad \text{also ist auch} \quad \operatorname{Tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x}$$

und

$$\log \operatorname{Tg} \frac{x}{2} = \log \operatorname{Sin} x - \log(1 + \operatorname{Cos} x)$$

folglich

$$d . \log \operatorname{Tg} \frac{x}{2} = \left[\frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} + \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x}\right] dx = \frac{dx}{\operatorname{Sin} x}$$

also besteht 2^a. — Nach 57:3 ist

$$d . \operatorname{Arc} \operatorname{Sec} x = d . \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{1}{x} = -\frac{d(1:x)}{\sqrt{1-(1:x^2)}} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

also muss 2^b bestehen, und wenn man in 2^b einfach x in $ax:b$ umsetzt, wird 3^b erhalten. — Nach 64:3ᵃ ist

$$\int x\sqrt{a+bx} . dx = x\int\sqrt{a+bx}\, dx - \int\left[\int\sqrt{a+bx}\, dx\right] dx$$

Da nun offenbar

$$\int (a+bx)^{3/2} . dx = \frac{2}{5b}(a+bx)^{5/2} \quad \text{und} \quad \int\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}$$

so folgt somit

$$\int x\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2x}{3b}(a+bx)^{3/2} - \frac{2}{3b}\int(a+bx)^{3/2} . dx = \frac{6bx-4a}{15b^2}(a+bx)^{3/2}$$

d. h. 4^b. — Setzt man in 67:18 einfach $x+c$ statt x ein, und sodann $a = (4\alpha\gamma - \beta^2):4\gamma$, $b = \gamma$, $c = \beta:2\gamma$, so erhält man 6. — Setzt man in 65:11 die Grösse $1/x$ an die Stelle von x, also $-dx:x^2$ anstatt dx, und vertauscht α und β, so erhält man 7^a, — und aus 65:12 wird entsprechend 7^b gefunden. — Setzt man

$$a + b \operatorname{Cos} x = y \quad \text{oder} \quad \operatorname{Cos} x = \frac{y-a}{b} \quad \text{oder} \quad x = \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{y-a}{b}$$

so folgt

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{Cos} x} = -\int \frac{dy}{y\sqrt{b^2 - a^2 + 2ay - y^2}}$$

und daher nach 7 entweder

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{Cos} x} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{2(b^2-a^2) + 2ay}{2\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-a^2+2ay-y^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} \frac{b + a \operatorname{Cos} x}{\sqrt{a^2-b^2} \operatorname{Sin} x}$$

oder

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{Cos} x} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{2(b^2-a^2) + 2ay - 2\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{b^2-a^2+2ay-y^2}}{y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\log \frac{a + b \operatorname{Cos} x}{a \operatorname{Cos} x + b - \sqrt{b^2-a^2} \operatorname{Sin} x} - \log 2b\right]$$

zwei Integralformeln, von denen die erste, da nach

$$\text{Arc Tg}\, x + \text{Arc Tg}\, y = \text{Arc Tg}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

die Differenz der beiden Bogen

$$\text{Arc Tg}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\text{Sin}\,x}{a\,\text{Cos}\,x+b} - \left[-\text{Arc Tg}\,\frac{b+a\,\text{Cos}\,x}{\sqrt{a^2-b^2}\,\text{Sin}\,x}\right] = \text{Arc Tg}\,\infty = \frac{\pi}{2}$$

also constant ist, mit 9^a übereinstimmt, — die zweite aber, wenn man log 2 b mit der Integrationsconstanten vereinigt, und unter dem Logarithmus Zähler und Nenner mit $a\,\text{Cos}\,x + b + \sqrt{b^2-a^2}\,\text{Sin}\,x$ multiplicirt, mit 9^b. — Setzt man in 64:3

$$v = \log^n x \qquad du = x^m . dx \qquad \text{also} \qquad dv = n \log^{n-1} x . \frac{dx}{x} \qquad u = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

so erhält man

$$\int x^m \log^n x . dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \log^{n-1} x . dx$$

also auch

$$\int x^m \log^{n-1} x . dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^{n-1} x - \frac{n-1}{m+1} \int x^m \log^{n-2} x . dx$$

etc., also durch successive Substitution 10. — Setzt man dagegen in 64:3

$$v = x \qquad du = a^x dx \qquad \text{also} \qquad dv = dx \qquad u = a^x : \log a$$

so erhält man mit Hülfe von 64:4

$$\int x . a^x . dx = \frac{x . a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a} \int a^x dx = \frac{x . a^x}{\log a} - \frac{a^x}{\log^2 a}$$

oder 11^b. — Mit Hülfe von 48:4 endlich erhält man

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \int \frac{dx}{x} + \log a \int dx + \frac{\log^2 a}{1.2} \int x\, dx + \frac{\log^3 a}{1.2.3} \int x^2 dx + \ldots$$

$$= \log x + x \log a + \frac{(x \log a)^2}{1.2^2} + \frac{(x \log a)^3}{1.2.3^2} + \ldots$$

d. h. 12. — Für weitere Formeln kann man die in 45 aufgezählten Spezialwerke, besonders auch die Integraltafeln von Meier **Hirsch** vergleichen.

69. Bestimmte Integrale. Nimmt in

$$y = F(x) = \int f(x)\, dx \tag{1}$$

die Grösse x nach und nach die Werthe x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x, \ldots$ $x + n . \Delta x$ an, so erhält y die Werthe y, $y_1 = y + \Delta y$, $y_2 = y_1 + \Delta_1 y, \ldots$ $y_n = y_{n-1} + \Delta_{n-1} y$, so dass

$$y_n = y + \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta_1 y}{\Delta x} + \frac{\Delta_2 y}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x}\right] \Delta x$$

Gibt man $n . \Delta x$ einen constanten Werth h, und lässt n unendlich zunehmen, Δx aber abnehmen, so erhält man die Grenzgleichheit

$$F(x+h) - F(x) = [f(x) + f(x+dx) + \ldots + f(x+(n-1)dx)]\, dx \tag{2}$$

d. h. der Werth eines Integrals zwischen gewissen Grenzen ist gleich der Summe der Werthe, die das Differential zwischen diesen Grenzen annimmt, und man kann symbolisch

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

schreiben. So z. B. ist mit Hülfe von 65:4

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\text{Arc Sin}\frac{x}{a}\right]_0^a = \text{Arc Sin } 1 - \text{Arc Sin } 0 = \frac{\pi}{2}$$

Und so weiter.

Das bestimmte Integral

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}} \cdot dx \qquad 4$$

lässt sich nicht in endlicher Gestalt, wohl aber, wenn $x:a$ und e ächte Brüche sind, durch eine convergirende Reihe darstellen. Setzt man nämlich

$$x = a \cdot \text{Cos}\,\varphi \quad \text{und somit} \quad dx = -a\,\text{Sin}\,\varphi \cdot d\varphi$$

wobei die Grenzen o und x offenbar in $\frac{1}{2}\pi$ und φ übergehen, so erhält man mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes

$$y = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{\frac{a^2-a^2e^2\text{Cos}^2\varphi}{a^2-a^2\text{Cos}^2\varphi}} \cdot a\,\text{Sin}\,\varphi \cdot d\varphi = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1-e^2\text{Cos}^2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$= -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left[\begin{array}{l} 1 - \frac{e^2}{2}\text{Cos}^2\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^4}{4}\text{Cos}^4\varphi - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{e^6}{6}\text{Cos}^6\varphi - \\ - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{e^8}{8}\text{Cos}^8\varphi - \ldots \end{array} \right]$$

oder mit Benutzung von 67:22

$$\frac{y}{a} = \left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \ldots\ldots\right]$$

$$+ \frac{\text{Sin}\,2\varphi}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 \cdot \left(1+\frac{2}{3}\text{Cos}^2\varphi\right) + \\ \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 \cdot \left(1+\frac{2}{3}\text{Cos}^2\varphi + \frac{2.4}{3.5}\text{Cos}^4\varphi\right) + \ldots \end{array} \right] \qquad 5$$

Es gehört dieses Integral zu den sogenannten **elliptischen Functionen**, für deren genauere Kenntniss auf die betreffende Literatur bei 45 zu verweisen ist, — und es verdanken ihm sogar Letztere, wie aus 143 begreiflich werden wird, ihre Entdeckung und ihren Namen. — Auch für die bestimmten Integrale im Allgemeinen ist auf die unter 45 aufgezählten Werke zu verweisen, und überdiess auf „**Bierens** de Haan, Exposé de la théorie, des propriétés et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Amsterdam 1862 in 4., — und: Tables d'intégrales définies. Amsterdam 1858 — Leyde 1867, 2 Vol. in 4."

70. Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung. Eine Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

nennt man eine **Differentialgleichung** der ersten, zweiten, etc., Ordnung, je nach der Ordnung des höchsten Differentialquotienten, und zwar **linear,** wenn y, $\frac{dy}{dx}$, etc. nur in erster Potenz erscheinen, — jede ihr Genüge leistende, eine, zwei, etc. willkürliche Constante

enthaltende Gleichung $F(x, y) = 0$ aber ihr **allgemeines Integral.** So hat z. B. die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$x\frac{dy}{dx} - y + b = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + \frac{b\,.\,dx}{x^2} = 0$$

wo $\frac{1}{x^2}$ der ein vollständiges Differential herstellende oder sog. **integrirende** Factor ist, wenn a eine willkürliche Constante bezeichnet, das allgemeine Integral

$$a = \int\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + b\int\frac{dx}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{b}{x}$$

oder

$$y = ax + b$$

So genügt der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$y\,.\,dx - x\,.\,dy = r\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

wenn a wieder eine willkürliche Constante ist, das allgemeine Integral

$$y = ax + r\,.\sqrt{1 + a^2}$$

aber auch das diese Willkürliche nicht enthaltende, sog. **besondere** Integral

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Aehnlich in andern Fällen.

Die nach Jacopo **Riccati** (Venedig 1676 — Trevigi 1754; ein reicher Privatmann, von dem drei Söhne: Vincenso 1707—1775, — Giordano 1709 bis 1790, — und Francesco 1718—1791 ebenfalls Mathematiker und Physiker waren; vergl. für Jacopo dessen Opere, Lucca 1765, 4 Vol. in 4., — für Giordano dessen Elogio durch Pellizari in Mem. della Soc. Ital. IX) benannte Differentialgleichung erster Ordnung

$$dy + b\,.\,y^2\,.\,dx = a\,.\,x^m\,.\,dx$$

lässt sich in einzelnen speciellen Fällen leicht auflösen; so z. B. hat man für $m = 0$

$$dy + by^2dx = a\,dx \qquad \text{oder} \qquad dx = \frac{dy}{a - by^2}$$

und für $m = -4$, wenn

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2} \qquad \text{also} \qquad dy = \frac{dz}{x^2} - \frac{x + 2bz}{bx^3}dx$$

gesetzt wird

$$dz + \frac{bz^2dx}{x^2} = \frac{a\,dx}{x^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{a - bz^2}$$

so dass in beiden Fällen die Integration nicht den mindesten Schwierigkeiten unterliegt. — Ausser Riccati hat sich neben den **Bernoulli** und **Euler** namentlich auch **Clairault** um die Integration der Differentialgleichungen verdient gemacht, besonders durch sein „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre (Mém. de Par. 1740)". Aus neuerer Zeit mögen noch zur Ergänzung der in 45 erwähnten Schriften „Joseph **Petzval**, Professor der Mathematik in Wien: Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. Wien 1851—1859, 2 Bände (6 Lieferungen) in 4., — Georg Wilhelm **Strauch** (Heppenheim

1811 — Muri 1868; Lehrer der Mathematik in Muri), Practische Anwendung für die Integration der totalen und partialen Differentialgleichungen. Bd. 1. Braunschweig 1865 in 8., — Al. **Mayr**, Der integrirende Factor und die particularen Integrale. Würzburg 1868 in 8., — etc." angeführt werden.

71. Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnung. Hat man z. B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(dx^2 + dy^2)^{3/2} + a \cdot d^2y \cdot dx = 0$$

und setzt

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad \text{also} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

so geht sie in

$$dx = -\frac{a \cdot dp}{(1+p^2)^{3/2}} \quad \text{über, so dass} \quad x = -\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + \alpha.$$

$$dy = -\frac{a\,p\,dp}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \beta$$

wo α und β willkürliche Constante sind. Aus diesen Werthen von x und y folgt aber durch Elimination von p die Integralgleichung

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$$

Aehnlich in andern Fällen.

Hat man, um noch ein anderes Beispiel zu geben,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm k^2 y \tag{1}$$

so folgt zunächst

$$\pm k^2 y = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy} \qquad \text{oder} \qquad p \cdot dp = \pm k^2 \cdot y \cdot dy$$

folglich durch Integration

$$p^2 = C \pm k^2 y^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{C \pm k^2 y^2} \quad \text{also} \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{C \pm k^2 y^2}}$$

Für das obere Zeichen ergibt sich somit nach 65:5

$$x = \frac{1}{k} \log\left(ky + \sqrt{C + k^2 y^2}\right) + C_1$$

oder

$$ky + \sqrt{C + k^2 y^2} = e^{k(x-C_1)} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{C + k^2 y^2} = e^{k(x-C_1)} - ky$$

oder durch beidseitiges Quadriren

$$y = \frac{1}{2k}\left[e^{k(x-C_1)} - C \cdot e^{-k(x-C_1)}\right] = A \cdot e^{kx} + B \cdot e^{-kx} \tag{2}$$

wo

$$A = \frac{1}{2k} \cdot e^{-kC_1} \qquad B = -\frac{1}{2k} \cdot e^{kC_1}$$

Für das untere Zeichen dagegen ergibt sich nach 65:4

$$x = \frac{1}{k} \operatorname{Arc\,Sin} \frac{ky}{\sqrt{C}} + C_2$$

oder

$$y = \frac{\sqrt{C}}{k} \operatorname{Sin}[k(x - C_2)] = A_1 \operatorname{Cos} kx + B_1 \operatorname{Sin} kx \tag{3}$$

wo

$$A_1 = -\frac{\sqrt{C}}{k} \operatorname{Sin} k C_2 \qquad \text{und} \qquad B_1 = \frac{\sqrt{C}}{k} \operatorname{Cos} k C_2$$

wobei schliesslich zu bemerken, dass man 3 auch aus 2 durch Umsetzen von k in ki und Benutzen von 50:2 ableiten kann.

72. Begriff der Variationsrechnung. Während es sich bei der Lehre vom Grössten und Kleinsten (63) darum handelt, den Werth einer Unbekannten so zu bestimmen, dass eine andere, als eine bestimmte Function der ersten gegebene, Grösse ein Maximum oder Minimum annimmt, so hat dagegen die sog. Variationsrechnung die Aufgabe, jene Relation so zu bestimmen, dass der Werth einer hinwieder von ihr abhängigen Function so gross als möglich werde. Ist $y = f(x)$, so kann es sich z. B. fragen, für welchen Werth von x nimmt y einen grössten Werth an, — aber auch wie muss f (x) beschaffen sein, damit für einen bestimmten Werth von $\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ der Werth von $\int_0^a y\, dx$ ein Maximum werde. Erstere Aufgabe löst 63, Letztere dagegen die Variationsrechnung, für welche Geometrie und Mechanik in den Problemen der Isoperimetrie, der Brachystochrone, etc. die schönsten Beispiele liefern.

Ausser den in 45 aufgezählten allgemeinen, mögen hier noch folgende Specialschriften erwähnt werden: „**Euler**, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannæ 1744 in 4., — **Lagrange**, Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales, und: Observations sur la méthode des variations (Miscell. Soc. Taurin. II 1760 und IV 1766—1769), — **Euler**, Elementa calculi variationum, und: Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi (Nov. Comm. Petrop. X 1766, und XVI 1772), — **Murhard**, Specimen historiæ atque principiorum calculi quem vocant variationum. Gotting. 1796 in 4., — Enno Heeren **Dirksen** (Hamswerum in Ostfriesen 1792 — Paris 1850; Professor der Mathematik und Academiker in Berlin), Analytische Darstellung der Variationsrechnung. Berlin 1823 in 4., — H. **Gräffe**, Commentatio historiam calculi variationum inde ab origine calculi differentialis atque integralis usque ad nostra tempora. Gottingæ 1825 in 4., — Martin **Ohm** (Erlangen 1792; Professor der Mathematik in Berlin), Die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Berlin 1825 in 8., — **Ampère**, Exposition des principes du calcul des variations (Gergonne XVI 1825), — G. W. **Strauch**, Theorie und Anwendung des sog. Variationscalculs. Zürich 1849, 2 Vol. in 8., — Karl Franz **Giesel** (Torgau 1826; Lehrer in Torgau und dann Rector zu Delitzsch), Geschichte der Variationsrechnung. I. Torgau 1857 in 4., — A. **Mayr**, Grundlegung der Theorie des Variationscalculs. Würzburg 1861 in 8., — **Todhunter**, A History of the Progress of the Calculus of Variations during the 19th Century. Cambridge 1861 in 8., — etc."

Die Geometrie.

O Messkunst, Zaum der Phantasie!
Wer dir will folgen, irret nie;
Wer ohne dich will geh'n, der gleitet.
(Haller.)

IX. Geometrische Vorbegriffe.

73. Der Ort. Ein Ding ohne endliche Grösse, an dem einzig der Begriff der Lage haftet, heisst **Punct.** Verändert Letzterer seine Lage, so heisst man ihn in **Bewegung**, verbindet damit den ursprünglichen Begriff der **Richtung**, und fasst alle Lagen, welche einer gegebenen Bedingung genügen, unter dem Ausdrucke **Ort** zusammen. So nennt man den Ort eines sich bewegenden Punctes **gerade Linie** oder **krumme Linie**, je nachdem der Punct seine Richtung fortwährend beibehält oder fortwährend ändert, und es liegt im Begriffe der Richtung, dass von einem Puncte zu einem andern nur Eine Gerade, ihre kürzeste Verbindung, führt. Den Ort einer sich bewegenden Linie aber nennt man **Fläche**, — eine durchweg gerade Fläche **Ebene.**

Früher stellte man gewöhnlich den Begriff der dreifachen Ausdehnung an die Spitze der Geometrie, und stieg davon durch Zerlegen zu dem Puncte hinab; jener Begriff ist jedoch erstens nur zum Scheine für sich klar, da die Richtigkeit einer mehrfachen, aber nicht über drei steigenden Ausdehnung erst bei der Lehre von den räumlichen Coordinaten entwickelt werden kann, — und zweitens ist der Begriff der Lage, von welchem hier ausgegangen wird, schon zur oberflächlichsten Auffassung jenes Begriffes nothwendig, und somit jedenfalls einfacher. — Eine Fläche kann auch als Ort eines Punctes gedacht werden, obschon nicht eigentlich durch Bewegung eines Punctes entstehen; so z. B. nennt man den räumlichen Ort eines Punctes, der von einem gegebenen Puncte einen bestimmten Abstand haben soll, Kugelfläche. — Für die geometrische Literatur sind 2, 3, 4, 5, 45, etc., sowie einige erst später folgende Abschnitte zu berathen; hier mögen speciell folgende, theils allgemeine, namentlich aber elementare Werke aufgeführt werden: „P. **Ramus**, Geometria. Paris 1577 in 16. (Holländ. durch W. Snellius, Amsterdam 1622 in 4.), — Andreas **Tacquet** (Antwerpen 1612 — Antwerpen 1660; Lehrer

in den Jesuitencollegien zu Löwen und Antwerpen), Elementa geometriæ planæ ac solidæ. Antverp. 1654 in 8. (Auch später, z. B. noch Venet. 1746), — Jean-Pierre de **Crousaz** (Lausanne 1663 — Lausanne 1750; Professor der Mathematik und Philosophie in Gröningen und Lausanne, auch auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie; vergl. Bd. 2 meiner Biographien), La géométrie des lignes et des surfaces rectilignes et circulaires. Amsterdam 1718, 2 Vol. in 8., — Al. **Clairault**, Eléments de Géométrie. Paris 1741 in 8. (Auch später, z. B. 1753; ital. Rom 1771), — Th. **Simpson**, The Elements of Geometry. London 1747 in 8. (Auch später, z. B. 1760), — Matthew **Stewart** (Rothsay in Schottland 1717 — Edinburgh 1785; Pfarrer zu Roseneath, später Professor der Mathematik zu Edinburgh), Propositiones geometricæ more veterum demonstratæ. Edinburgh 1763 in 8., — Abel **Bürja** (Kikebusch bei Berlin 1752 — Berlin 1816; Prediger und Professor der Mathematik zu Berlin), Der selbstlehrende Geometer. Berlin 1787 in 8. (Auch später, z. B. 1801), — Jan Henric **Van Swinden** (Haag 1746 — Amsterdam 1823; Professor der Physik und Mathematik zu Franeker und Amsterdam; vergl. Moll, Redevœring over Van Swinden, Amsterdam 1824 in 8.), Grondbeginselns der Meetkunde. Amsterdam 1790 in 8. (2. A. 1816; deutsch von A. Jacobi, Jena 1834 in 8.), — **Legendre**, Eléments de géométrie. Paris 1794 in 8. (14 éd. 1855; deutsch von Crelle, Berlin 1822; ital. von Cellai, Firenze 1834; engl. von Ch. Davies, New-York 1855), — Lorenzo **Mascheroni** (Castagnetto bei Bergamo 1750 — Paris 1800; Professor der Mathematik zu Pavia), La geometria del compasso. Pavia 1797 in 8. (franz. von Carette, Paris 1798 in 8.; deutsch von Grüson, Berlin 1825 in 8.), — **Lacroix**, Eléments de géométrie. Paris 1799 in 8. (17 éd. durch Prouhet 1855), — Meier **Hirsch**, Sammlung geometrischer Aufgaben. Berlin 1805—1807, 2 Bde. in 8., — F. **Schweins**, Geometrie nach einem neuen Plane bearbeitet. Göttingen 1805—1808, 2 Bde. in 8., — Louis **Bertrand** (Genf 1731 — Genf 1812; Professor der Mathematik zu Genf; vergl. Bd. 1 meiner Biographien), Eléments de géométrie. Paris 1812 in 4., — Isaac-Emanuel-Louis **Develey** (Payerne 1764 — Lausanne 1839; Professor der Mathematik und Astronomie in Lausanne; vergl. Revue suisse III), Eléments de géométrie. Paris 1812 in 8. (3 éd. 1830; deutsch, Stuttgart 1818), — Joh. Friedrich **Lademus** (Bretten 1783 — Karlsruh 18 . .; Professor der Mathematik zu Karlsruhe), Geometrische Constructionslehre. Freyburg 1812 in 8., — Gabriel **Lamé** (Tours 1795; Ingénieur-en-chef des mines, Professor der Physik zu Paris und Mitglied der Academie), Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Paris 1818 in 8., — A. L. **Crelle**, Elemente der Geometrie. Berlin 1826—1827, 2 Bde. in 8., — A. F. **Möbius**, Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827 in 8., — F. R. **Hassler**, Geometry of planes and solids. Richmond 1828 in 8., — Nicolai Jvanowitsch **Lobatschevskji** (Nischnei-Novgorod 1793 — Kasan 1856; Professor der Mathematik zu Kasan), Ueber die Prinzipien der Geometrie. Kasan 1829—1830 in 8., — Wolfgang **Bolyai** (Bolya in Siebenbürgen 1775 — Maros-Vásárhely 1856; Freund von Gauss, Professor der Mathematik und Physik zu Maros-Vásárhely; vergl. Fr. Schmidt, Notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai, Paris 1868 in 8.), Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ elementaris ac sublimioris, methodo intuitive, evidentiaque huic propria, introducendi. Maros-Vásárhelyini 1832 bis 1833, 2 Vol. in 8., — Claude-Lucien **Bergery** (Orléans 1787; Professor an der Artillerieschule zu Metz), Géométrie appliquée à l'industrie. 3 éd. Metz

1835 in 8., — Michel **Chasles** (Epernon 1793; Professor der höhern Geometrie in Paris und Mitglied der Academie), Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Bruxelles 1837 in 4. (Deutsch von Sohncke, Halle 1839 in 8.), — A. W. **Hertel**, Sammlung von 574 geometrischen Aufgaben. Leipzig 1838 in 8., — B. E. **Cousinery**, Le calcul par le trait. Paris 1839 in 8., — Joh. Simon Lorenz **Wöckel** (Pegnitz 1807 — Nürnberg 1849; Professor der Mathematik in Nürnberg), Die Geometrie der Alten in einer Sammlung von 712 Aufgaben. Nürnberg 1839 in 8. (8. A. von Th. Schröder 1869), — Joh. Rudolf **Wolf** (Zürich 1816; Professor der Mathematik und Astronomie erst in Bern, dann in Zürich), Die Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene. Bern 1841 in 8. (2. A. 1847), — P. J. E. **Finck**, Professor der Mathematik in Strassburg: Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment-petits. 2 éd. Strasbourg 1841 in 8., — C. L. A. **Kunze**, Lehrbuch der Geometrie. Jena 1842 in 8., — Magnus Georg von **Paucker** (Simonis Pastorat 1787 — Mitau 1855; Professor der Mathematik und Astronomie zu Mitau), Fundamente der Geometrie. Mitau 1842 in 8., und: Bildlehre. Mitau 1846 in 8., — N. **Scholfield**, On elementary and higher geometry, trigonometry and mensuration. New-York 1845, 4 Vol. in 8., — Carl **Adams** (Merscheid bei Düsseldorf 1811 — Winterthur 1849; Lehrer der Mathematik und Physik zu Winterthur), Geometrische Aufgaben. Winterthur 1847—1849, 2 Bde. in 8., — O. **Schlömilch**, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Eisenach 1849 in 8. (3. A. 1859), — Eugène-Charles **Catalan** et H. Ch. de **Lafrémoire**, Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire. Paris 1852 in 8. (Deutsch von Kaufmann und Reuschle, Stuttgart 1858 und 1862), — Ed. **Heis** und **Eschweiler**, Lehrbuch der Geometrie. Köln 1855—1858, 2 Bde. in 8. (4. A. 1867 in 3 Bdn.), — Joh. Karl Philipp **Spitz** (Wieblingen bei Heidelberg 1826; Professor der Mathematik in Karlsruhe), Geometrische Aufgaben zum Gebrauche an höhern Lehranstalten. Leipzig 1855 in 8., — Wilhelm **Fiedler** (Chemnitz 1832; Professor der darstellenden und neuern Geometrie am schweizerischen Polytechnikum), Die Elemente der neuern Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig 1862 in 8., — **Housel**, Introduction à la géométrie supérieure. Paris 1865 in 4., — **Riemann**, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen 1867 in 4., — etc."

74. Die fortschreitende Bewegung. Wenn sich ein Punkt beständig in gleichem Sinne in einer Geraden bewegt, so nennt man ihn **fortschreitend**, und die Grösse des Fortschrittes **Länge**. Die Längeneinheit ist ihrer Natur nach willkürlich, und darum in jedem Lande und für jeden Zweck gesetzlich festgestellt. (I.)

Da sowohl Bequemlichkeit als Genauigkeit der Vergleichung erfordern, dass der Maassstab von gleicher Ordnung mit den zu messenden Längen sei, so wird es nöthig, neben der gewählten Längeneinheit noch bestimmte Vielfache und Theile derselben als untergeordnete Längeneinheiten zu benutzen. So wurden früher bei den Fussmassen ausser dem Fusse die Vielfachen 6 (Klafter, Faden, Lachter, Toise), 10 (Ruthe), 16000 (Wegstunde), etc. gebraucht, und die Theile $^1/_{10}$ oder $^1/_{12}$ (Decimal- und Duodecimal-Zolle), $^1/_{100}$ oder $^1/_{144}$ (Linie), etc., — jetzt bei dem metrischen Maasse ausser dem Meter zunächst das Tausendfache (Kilometer) und der Tausendstel (Millimeter).

75. Die drehende Bewegung. Bewegt sich eine Gerade um einen Punct, so heisst man sie **drehend**, und die auf die Ebene der Endlagen, der sog. **Schenkel**, bezügliche Grösse der Drehung **Winkel.** Den Drehpunct nennt man **Scheitel**, den Ort der Geraden **Strahlenbüschel.** Die Winkeleinheit ist die Grösse der Drehung bis zur Rückkehr in die ursprüngliche Lage, die sog. **Umdrehung**, welche in 2 **Gerade**, 4 **Rechte** (4 R) und 360 **Grade** à 60 **Minuten** à 60 **Secunden** ($1 = 360^0 = 21600' = 1296000''$) eingetheilt wird. Ist $\alpha < 90^0$, so heissen die Winkel α, $90^0 + \alpha$, $90^0 \pm \alpha$ und $270^0 \pm \alpha$ der Reihe nach **spitz**, **stumpf**, **concav** und **convex**, — Winkel, welche sich zu 90^0, 180^0 oder 360^0 ergänzen, **complementär**, **supplementär** oder **explementär.** Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über seinen Scheitel hinaus, so erhält man den zu ihm supplementären **Nebenwinkel**, — verlängert man beide, den ihm gleichen **Scheitelwinkel.** Bezeichnen a b und d e die Schenkel, c den Scheitel eines Winkels, so schreibt man $\angle c = \angle acd = \angle (ab, de)$.

Die Theilung der Umdrehung (oder des Kreises) in 360 **Theile** (μοίρας, partes) oder **Stufen** (arabisch dergeh, verdorben degré, in schlechter lateinischer Uebersetzung gradus) ist uralt, und rührt wohl daher, dass die Zahl 360 unter den Zahlen mit vielen Theilern der Anzahl der Tage des Jahres am nächsten kömmt. Näherungsweise wurden die Winkel früher auch zuweilen in Bruchtheilen des ganzen Kreises gegeben, vielleicht sogar ohne Theilung durch Wiederholung bis zum Erschöpfen einer oder mehrerer Umdrehungen bestimmt. Merkwürdig ist, dass in Kremsmünster (s. Programm der dort. Acad. für 1864) ein hölzerner Kreis mit Elfenbein-Einlage von 1570 existirt, der in $6.4.4.4 = 384$ anstatt in $6.3.4.5 = 360$ Theile eingetheilt ist. — Ferner ist zu bemerken, dass schon Henry **Gellibrand** (London 1597 — London 1637; Pfarrer in Kent, dann Professor der Astronomie in London) im Anfange des 17. Jahrhunderts vorschlug, den Grad statt in 60, in 100 Minuten zu theilen, — dass sich **Lagrange** 1783 bei dem Board of Longitude in London dafür verwendete, dass man sich beim Kreise und sonst ausschliesslich der Decimaltheilung bediene, und alle Tafeln entsprechend umarbeite, — dass endlich bei der französischen Revolution eine Eintheilung der Umdrehung in 400 Grade à 100 Minuten à 100 Secunden beliebt wurde, an der jetzt noch Einzelne festhalten, indem sie einen sog. Centesimal-Grad, von $0^0{,}9 = 54'$ der alten Theilung, benutzen.

76. Die Parallelen und Senkrechten. Zwei Gerade einer Ebene, welche bei gleicher Grösse der Drehung in zwei Puncten einer dritten Geraden entstanden sind, heissen **parallel** oder **zeilig** ($\parallel$), — zwei Gerade dagegen, deren Winkel 90^0 beträgt, **senkrecht** ($\perp$) zu einander. Nennt man die gleichliegenden Winkel zweier Geraden mit einer dritten **correspondirende**, die entgegengesetzt liegenden **Wechselwinkel**, so sind correspondirende oder Wechselwinkel von Parallelen (nach Definition nur mit der Geraden, aus der sie

entstanden sind, — nach Beweis in 89 aber auch mit jeder andern Geraden) nothwendig je einander gleich, — und steht die eine der Parallelen senkrecht, so steht auch die andere senkrecht; umgekehrt sind zwei Senkrechte zu derselben Geraden einander parallel. — Durch jeden Punct einer Geraden führt ein bestimmter Strahl des einem ausser ihr liegenden Puncte zukommenden Strahlbüschels, oder ist ihm **entsprechend.** Geht man aber z. B. von dem Puncte aus, der dem senkrechten Strahle entspricht, so ruft seine fortschreitende Bewegung einer drehenden Bewegung des Strahles, und während der Punct dem unendlich fernen Puncte zusteuert, nähert sich der Strahl dem Parallelstrahl, so dass sich unendlich ferner Punct und Parallelstrahl zu entsprechen scheinen.

Die seit **Euklid** fast allgemein beibehaltene Uebung, Parallele als solche Gerade einer Ebene zu definiren, welche sich nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern möge (oder verdeckt und eigentlich sogar falsch und vieldeutig, welche sich im Unendlichen schneiden), stimmt schliesslich, wie wir in 89 sehen werden, mit der obigen Definition überein; aber als Definition sollte man nie eine negative Eigenschaft, sondern wo immer möglich das Erzeugen benutzen, — und mir kömmt es unmaassgeblich vor, dass man sich weniger über die Schwierigkeiten zu verwundern braucht, welche die Euklideische Definition den ihr ergebenen Geometern bereits zwei Jahrtausende lang bereitet hat, als über das eigensinnige Beharren auf derselben. — Von den vielen Schriften über Parallelen-Theorie mögen „Daniel **Huber** (Basel 1768 — Basel 1829; Professor der Mathematik in Basel; vergl. Bd. 1 meiner Biographien), Nova theoria parallelarum. Basileæ 1823 in 8., — **Legendre,** Sur la théorie des parallèles (Mèm. de Par. 1833), — Nicolaus **Lobatschevskji,** Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840 in 8. (Franz. durch Hoüel, Paris 1866), — Victor-Jakob **Bouniakowsky** (1804; Professor der Mathematik und Academiker in Petersburg), Sur la théorie des parallèles (Bull. de Pétersb. 1851), — etc. angeführt werden. Vergl. auch 90.

77. Die Coordinaten. Um von einer Geraden oder **Axe** und einem ihrer Puncte, dem **Anfangspuncte** oder **Pol,** zu einem äussern Puncte m überzugehen, bieten sich zwei Hauptarten dar: **Entweder** dreht sich zuerst die Gerade um den Pol, bis sie (vergl. Fig.) durch m geht (v), und dann schreitet der Pol bis zu m fort (r); **oder** es schreitet der Pol zuerst in der Axe so weit fort (x), dass die Axe nach Drehung um einen gegebenen Winkel (α) durch m geht, und nun schreitet der Punct wieder fort bis zu m (y). Die Bestimmungsstücke r und v heissen **Radius Vector** oder **Leitstrahl** und **Winkel** oder **Position,** zusammen **Polarcoordinaten,** — die Bestimmungsstücke x und y, welche, um den ganzen Winkelraum zu beherrschen, die Zeichenfolgen

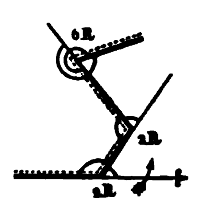
$$+ \; - \; - \; + \qquad + \; + \; - \; -$$

annehmen müssen, **Abscisse** und **Ordinate**, zusammen, je nachdem $\alpha = 90^0$ ist oder nicht, **rechtwinklige** oder **schiefwinklige Coordinaten.** Für $\alpha = 90^0$ zerfällt der Winkelraum durch die Axe und die Richtung der Ordinaten in 4 gleiche Theile, die sog. **Quadranten**, welche nach der Ordnung numerirt werden, in welcher sie der Radius Vector durchläuft.

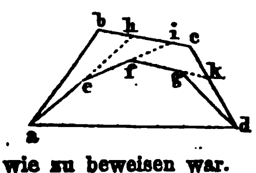
Die schon frühe in der Astronomie (vergl. 335 und 353) und Geographie (vergl. 365) gebräuchliche Methode, die Lage auf der Himmels- oder Erdkugel durch Coordinaten zu bestimmen, wurde etwa im 17. Jahrhundert nach und nach auch in die Geometrie eingeführt, — wobei aber der Abstand von der Axe anfänglich **Applicate** (ein schon bei den alten Geometern für gewisse Sehnen krummer Linien gebrauchter, — in neuerer Zeit von mir, vergl. 191, für die dritte Coordinate des Raumes eingeführter Name), und erst später **Ordinate** (ein zuerst bei Desargues vorkommender Name) geheissen wurde. — Darin, dass in der Ebene jede Verschiedenheit der Lage durch die Verschiedenheit der Lage nach zwei Richtungen (der Axe, und der zu ihr durch den Anfangspunkt gezogenen Senkrechten, — von denen die erste wohl auch Abscissenaxe, die zweite Ordinatenaxe genannt wird) gegeben werden kann, liegt auch die Berechtigung zu der Behauptung: Es gebe in der Ebene zwei und nicht mehr als zwei Ausdehnungen, — besser noch das Verständniss jenes Ausspruches. Vergl. 92.

78. Die gebrochene Linie. Wird die abwechselnde Bewegung in Fortschritt und Drehung fortgesetzt, so entsteht eine sog. gebrochene Linie, bei der die einzelnen Fortschritte **Seiten**, die mit den Drehwinkeln gleichartigen Winkel der Seiten **Winkel**, die Drehpunkte **Ecken** heissen, und zwar **concave** oder **convexe** Ecken, je nachdem die Drehwinkel concav oder convex sind. Die Summe von Winkel und Drehwinkel beträgt (vergl. Fig.) an einer concaven Ecke 2 R, an einer convexen Ecke 6 R. — Verbindet man zwei Puncte durch verschiedene, aber gegen die gerade Verbindung nur concave Ecken zeigende gebrochene Linien, so ist jeder umschlossene Zug (73) kürzer als der umschliessende.

Die fortschreitende und die drehende Bewegung bilden die Elemente, aus welchen jede Bewegung zusammengesetzt ist, und ihre Unabhängigkeit von einander bildet ein Grundprincip jeder Wissenschaft, welche von Bewegungen handelt. In der reinen Mechanik wurde dieses Princip von jeher an die Spitze gestellt, — in der Geometrie dagegen war man sonderbarer Weise längere Zeit hindurch misstrauisch gegen dasselbe, und ich rechne es mir zur Ehre an, in meiner Schrift von 1841 (vergl. 73) als einer der Ersten sein Panier hochgehalten zu haben. — Die Seite des Zuges, nach der die Drehung statt hat, heisst **innere Seite**, und bestimmt seine mit den Drehwinkeln in dem angegebenen Rapporte stehenden Eckenwinkel. Sobald man durch Drehung um



mehr als zwei Rechte eine folgende Seite **hinter** die vorhergehende gebracht hat, so **muss** offenbar die dadurch begonnene Umdrehung mindestens vollendet werden, um die innere Seite wieder nach vorn zu bringen, und so z. B. die Möglichkeit zu erhalten, wieder in die Ausgangslage zurückzukehren. — Da die Gerade nach 73 die kürzeste Verbindung zweier Puncte ist, so hat man



$$\begin{array}{r} ab + bh > ae + eh \\ eh + hi > ef + fi \\ fi + ic + ck > fg + gk \\ gk + kd > gd \\ \hline abcd > aefgd \end{array} +$$

wie zu beweisen war.

79. Das n-Eck und n-Seit. Schliesst sich die gebrochene Linie, d. h. kehren Punct und Gerade nach n Doppelbewegungen in die erste Lage zurück, so hat man ein **n-Eck** oder ein **n-Seit**, je nachdem die Seiten nur zwischen den Ecken oder in der unbegrenzten Länge der mit ihnen zusammenfallenden Geraden betrachtet werden. Im n-Ecke finden sich zu jeder Ecke (n—3) mit ihr nicht in einer Seite liegende, sog. **Gegen-Ecken**, und es können daher in demselben $\frac{1}{2}.n.(n-3)$ Verbindungslinien solcher Gegenecken, sog. **Diagonalen**, gezogen werden. Im n-Seite, wo jeder Durchschnittspunkt Ecke heisst, gibt es dagegen zu jeder der $\binom{n}{2}$ Ecken, $\binom{n-2}{2}$ Gegenecken und $3.\binom{n}{4}$ Diagonalen. Die Anzahl der durch n Gerade oder n Puncte bestimmten n-Ecke endlich ist $\frac{1}{2}.(n-1)!$

Jede von n Geraden einer Ebene wird im Allgemeinen durch alle übrigen derselben, d. h. in (n — 1) Punkten, geschnitten, — also hat das n-Seit, da jeder Durchschnittspunkt zwei Geraden zugehört,

$$E_n = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} \qquad 1$$

Ecken. Je zwei Ecken, welche nicht in derselben Seite liegen, nennt man Gegenecken; da nun durch jede Ecke zwei Seiten gehen, und in jeder dieser Seiten neben der gemeinschaftlichen Ecke noch (n — 2) Ecken liegen, so gibt es zu jeder Ecke

$$E'_n = E_n - 1 - 2(n-2) = \binom{n-2}{2} \qquad 2$$

Gegenecken; also kann man von jeder Ecke aus E'_n Diagonalen ziehen, — folglich im ganzen n Seit (da jede Diagonale doppelt gezählt wird)

$$D_n = \frac{1}{2} E_n . E'_n = 3\binom{n}{4} \qquad 3$$

Diagonalen. — Das n-Eck hat ebenfalls n Seiten, aber in jeder Seite nur 2 Ecken, und zu jeder Ecke nur (n — 3) Gegenecken, folglich auch nur

$$D'_n = \frac{n(n-3)}{2} \qquad 4$$

Diagonalen. — Geht man von irgend einer Seite eines n-Seit's aus, so kann

man von ihr, da sie von allen übrigen (n — 1) Seiten geschnitten wird, nach Auswahl in eine der andern Seiten übergehen; auf welche von diesen nun auch die Wahl fallen mag, immer (vorausgesetzt, man wolle nicht in die erste Seite zurückkehren) bleiben (n — 2) Wege offen, um sie zu verlassen, und man kann somit auf (n — 1) . (n — 2) Arten von der ersten zu einer dritten Seite übergehen, — entsprechend auf (n — 1) . (n — 2) . (n — 3) Arten zu einer vierten, — etc. Ist man so endlich zu der n^{ten} Seite gekommen, so bleibt nur Ein Weg offen, um zur ersten Seite zurückzukehren, und da bei jedem Uebergange Ein Durchschnittspunct festgelegt wurde, so hat somit die erhaltene Figur n Ecken. Da nun für sich klar ist, dass das Wechseln der Ausgangsseite ohne Einfluss bleibt, dagegen jede Figur noch einmal entsteht, indem man sich die Seiten in verkehrter Ordnung folgen lässt, so hat man

$$P_n = \frac{(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 2.1}{2} = {}^1\!/_2 . (n-1)! \qquad 5$$

als Anzahl der im n-Seit enthaltenen n-Ecke. — Untersucht man auf dieselbe Weise, auf wie viele Arten man n Punkte so paarweise verbinden kann, dass die Gesammtheit der Verbindungen eine geschlossene Linie bildet, so vertauscht man offenbar nur in der frühern Betrachtung Seite und Punct, so dass wieder 5 die möglichen n-Ecke zählt, und somit n Gerade und n Puncte gleich viele n-Ecke bestimmen. Beide Sätze können auch mit Hülfe der Combinationslehre abgeleitet werden, vergl. „**Carnot**, Corrélation des figures de géométrie. Paris 1801 in 8., — etc." — Alle n-Ecke, welche in demselben n-Seit enthalten sind, mögen in Beziehung auf dasselbe **subordinirt**, unter sich **coordinirt** heissen.

80. Die Winkelsumme. Die Winkelsumme eines n-Ecks wird offenbar gefunden, indem man (78) für jede concave Ecke 2 R, für jede convexe Ecke 6 R in Rechnung bringt, und für jede Umdrehung 4 R abzieht. Bezeichnet somit p die Anzahl der convexen Ecken, und r die der Umdrehungen, so ist

$$P_n(p, r) = 2(n + 2p - 2r)R$$

die Winkelsumme.

Schon **Thibaut** bestimmte in seinem Grundrisse (vergl. 5) die Winkelsumme des Dreieckes auf analoge Weise; doch versuchte er auch nicht einmal in Beziehung auf diese Figur eine allgemeine Auffassung, wie sie hier erstrebt wurde, — ja eine solche ist vor 1841, wo ich in der bereits mehrfach citirten Schrift die obige Formel aufstellte, meines Wissens gar nicht gegeben worden.

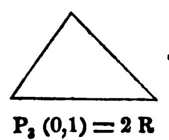
81. Anzahl und Eintheilung der n-Ecke. Unterscheiden sich zwei n-Ecke in ihrer Erzeugung nur dadurch, dass sich die Gerade nicht in demselben Sinne dreht, so unterscheiden sie sich selbst auch nur dadurch, dass ihre entsprechenden Winkel explementär sind, — und es genügt daher, dasjenige zu betrachten, das die geringere Anzahl convexer Ecken hat. Da ferner ein concaver Winkel immer zwischen 0 und 2 R, ein convexer zwischen 2 R und 4 R enthalten sein muss, so ist nothwendig

$$2(n+2p-2r)R > 0R.(n-p)+2R.p \quad \text{oder} \quad \frac{n+p}{2} > r$$

$$2(n+2p-2r)R < 2R.(n-p)+4R.p \quad \text{oder} \quad \frac{p}{2} < r$$

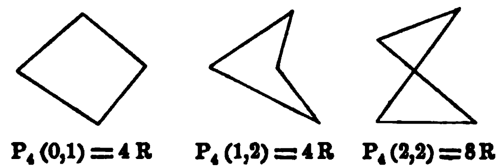
und für $p=1$ muss (vergl. 78) mindestens $r=2$ sein, damit die Figur zum Schlusse kommen kann. Es lässt sich hieraus durch Induction ableiten, dass, wenn n gerade ist, $\frac{n^2-4}{4}$ n-Ecke, und wenn n ungerade ist, $\frac{n^2-5}{4}$ n-Ecke möglich sind. Diejenigen n-Ecke, für welche $r-p=1$ ist, und die daher mit dem einfachsten n-Ecke (0,1) gleiche Winkelsumme haben, heissen **gemein**, die andern sind ohne Ausnahme **überschlagen.** Ein Vieleck endlich, in dem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heisst **regelmässig.**

Wendet man die erhaltenen Bedingungen z. B. auf das Dreieck an, so findet man, unter Annahme $p=0$ für r die Grenzen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$; es kann also in diesem Falle $r=1$, aber auch nur gleich 1 werden, oder es gibt Ein concaves Dreieck, und dieses ist von einfacher Umdrehung. Für $p=1$ müsste wenigstens $r=2$, nach der ersten Grenze aber kleiner als 2 sein, — es gibt somit in diesem Falle keinen möglichen Werth für r, oder es gibt kein Dreieck mit Einem convexen Winkel. Mit Ausschluss der explementären Dreiecke gibt es also nur Eine mögliche Form des Dreieckes: Das concave Dreieck von einfacher Umdrehung, das sich durch



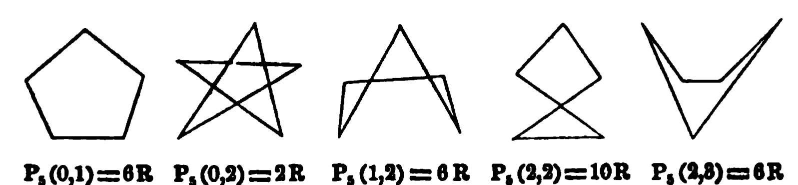
$P_3(0,1) = 2R$

darstellt. — Ebenso findet man für das Viereck die 3 Formen



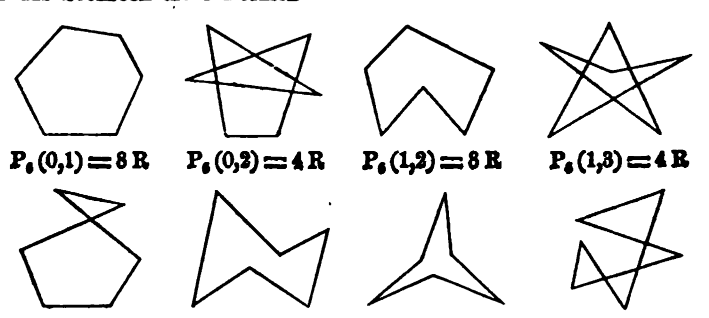
$P_4(0,1) = 4R$ $P_4(1,2) = 4R$ $P_4(2,2) = 8R$

Für das Fünfeck die 5 Formen



$P_5(0,1) = 6R$ $P_5(0,2) = 2R$ $P_5(1,2) = 6R$ $P_5(2,2) = 10R$ $P_5(2,3) = 6R$

Für das Sechseck die 8 Formen



$P_6(0,1) = 8R$ $P_6(0,2) = 4R$ $P_6(1,2) = 8R$ $P_6(1,3) = 4R$

$P_6(2,2) = 12R$ $P_6(2,3) = 8R$ $P_6(3,4) = 8R$ $P_6(3,3) = 12R$

wo das Sechseck (3,4) statt seinem Explementären (3,2) gesetzt wurde, — etc. — Da im regelmässigen n-Ecke alle Winkel gleich, also sämmtlich concav sind, und ihre Summe nach 80 bei r Umdrehungen $2.(n-2r)R$ beträgt, so muss jedem einzelnen die Grösse

$$w_n = 2R - \frac{4r}{n}R$$

zukommen, und analog stellt

$$w_m = 2R - \frac{4s}{m}R$$

den Winkel im regelmässigen m-Ecke von s Umdrehungen dar. Ist nun $m < n$, und haben beide Ecke dieselbe Seite, so dürfen w_n und w_m nie übereinstimmen, denn sonst würden je die m ersten Elementenpaare des n-Ecks für sich ein m-Eck bilden; es darf also nie

$$2R - \frac{4r}{n}R = 2R - \frac{4s}{m}R \quad \text{oder} \quad \frac{r}{n} = \frac{s}{m}$$

werden, d. h. die Zahl der Umdrehungen muss zu der Anzahl der Ecken prim sein. Da überdiess nach oben r zwischen die Grenzen 0 und n/2 fallen muss, und es zwischen diesen Grenzen, wenn n die Primfactoren α, β, γ,... hat, d. h.

$$n = \alpha^p . \beta^q . \gamma^r \ldots \qquad 1$$

ist, nach den Lehren der Arithmetik (vergl. Euler in Nov. Comm. Petrop. VIII, — Gauss in seinen Disquisitiones pag. 30, — Cauchy in Vol. 2 seiner Exercices, — etc.)

$$N_n = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) . \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) . \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \ldots \qquad 2$$

Zahlen gibt, die zu n prim sind, so gibt es auch, wie schon Louis **Poinsot** (Paris 1777 — Paris 1859; Professor der Mathematik und Academiker in Paris) in seiner Abhandlung „Sur les polygones et les polyèdres (Journ. de l'école pol. Cah. 10) zeigte, N_n regelmässige n-Ecke, so z. B. je Ein Dreieck, Viereck, Sechseck, — zwei Fünfecke, — drei Siebenecke, — etc. — Wohl der Erste, der die Vielecke überhaupt nach ihren verschiedenen Formen betrachtete und classificirte, war Alb. **Girard**, indem er (vergl. Kästner III 106) in seinen „Tables des sinus, tangentes et secantes, selon le raid de 10000 parties, avec un traité succinct de la trigonométrie tant des triangles plans que sphériques. A la Haye 1626 in 12." beim Verecke 3 Formen „la simple, la croisée et l'autre ayant l'angle renversé (d. h. die drei obigen), beim Fünfecke 11 Formen, und beim Sechsecke sogar 69 Formen aufzählt. Er hatte

zwar also offenbar einen andern Eintheilungsgrund als den oben angenommenen; aber sogar im Falle, wo dieser nicht ganz zweckmässig gewesen sein sollte, ehrt es Girard, der überhaupt ein vortrefflicher Mathematiker gewesen sein muss, ungemein, sich diese Aufgabe schon in so früher Zeit gestellt zu haben.

82. Die Congruenz und Aehnlichkeit. Zwei n-Ecke heissen **congruent** ($\cong$) oder **ähnlich** ($\sim$), wenn sie sich in ihrer Erzeugung gar nicht oder nur durch die Einheit des Fortschrittes unterscheiden, d. h. wenn sie gleiche Winkel und entweder gleiche Seiten oder gleiche Seitenverhältnisse haben. Die Erzeugung des n-Ecks wird aber durch (n—1) Seiten und die (n—2) eingeschlossenen Winkel, — oder durch (n—1) Winkel und die (n—2) zwischenliegenden Seiten bestimmt, je nachdem Fortschritt oder Drehung den Vorrang hat. Folglich sind zwei n-Ecke schon bei Uebereinstimmung solcher (2n—3) Elemente congruent, — und aus jedem Congruenzsatze geht ein Aehnlichkeitssatz hervor, wenn man die Gleichheit der Seiten durch die ihrer Verhältnisse ersetzt.

Ein n-Eck kann oft durch weniger als (2n—3) Elemente bestimmt zu werden scheinen; aber es ist eben nur scheinbar, — denn in allen solchen Fällen werden genau eben so viele anderweitige Bedingungen zugefügt, als Elemente weniger genommen werden. So würde z. B. scheinbar die Congruenz zweier regelmässigen n-Ecke schon durch Uebereinstimmung Einer Seite und Eines Winkels bestimmt, — in den Fällen, wo nach 81 nur Ein regelmässiges n-Eck besteht, sogar schon durch Uebereinstimmung Einer Seite; aber in diesen Fällen sind die Bedingungen der Gleichheit aller Seiten und Winkel an die Stelle der Elemente getreten. Ein Belege, dass selbst geübte Mathematiker sich diese Bemerkung nicht oft genug wiederholen können, liefert ein von Adam **Burg** (Wien 1797; Professor der Mechanik am Wiener-Polytechnikum) gegebener Schein-Beweis vom Kräftenparallelogramm (Zeitschrift von Baumgartner und Ettingshausen II 279). — Zwei n-Seite sind offenbar congruent oder ähnlich, sobald es zwei der ihnen subordinirten n-Ecke sind; ebenso bestimmt die Congruenz oder Aehnlichkeit dieser Letztern diejenige aller ihnen entsprechend coordinirten n-Ecke. — Das Symbol $\sim$ für ähnlich, soll schon von **Leibnitz** eingeführt worden sein.

X. Das Dreieck.

83. Grundeigenschaften des Dreiecks. Das Dreieck ist (81) nur Einer Form fähig, hat (80) die Winkelsumme $2R = 180^0$, — ist (82) durch eine Seite und die anliegenden Winkel, oder durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt, — durch zwei Winkel oder durch einen Winkel und das Verhältniss der einschliessenden Seiten der Form nach gegeben. Jede Dreiecksseite ist (73) kleiner als die Summe, aber grösser als die Differenz der beiden andern Seiten, — ein Drehwinkel (Aussenwinkel) gleich der Summe der gegenüberliegenden Dreieckswinkel.

Sind $a > b > c$ die Seiten eines Dreiecks, so ist nach 78

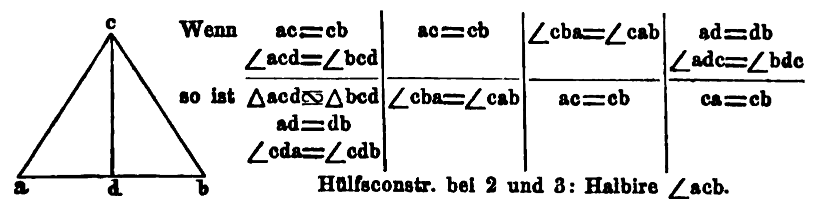
$$a < b + c \quad \text{und} \quad b < a + c \quad \text{also auch} \quad a > b - c$$

Speciell für die Lehre vom Dreieck ist z. B. auch „Karl Wilhelm **Feuerbach** (Jena 1800 — Erlangen 1834; Professor der Mathematik zu Erlangen), Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks. Nürnberg 1822 in 4., — **Adams**, Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Winterthur 1846 in 8., — etc." zu vergleichen.

84. Das gleichschenklige Dreieck. Hat ein Dreieck zwei gleiche Seiten, sog. **Schenkel**, so heisst es gleichschenklig. Die den Winkel der Schenkel an der sog. **Spitze** halbirende Gerade zerfällt (83) das Dreieck in zwei congruente Theile, und halbirt die dritte Seite oder **Basis** unter rechtem Winkel. Die Winkel an der Basis sind gleich, und hat ein Dreieck zwei gleiche Winkel, so stehen ihnen auch gleiche Seiten gegenüber. Errichtet man in der Mitte einer Geraden eine Senkrechte, so steht jeder Punct der Senkrechten von den Endpuncten der Geraden gleich weit ab.

Bei Mittheilung eines der ersten Sätze, welche eines sog. **Beweises** bedürfen, erlaube ich mir, entsprechend dem, was ich 1847 im Vorworte zur zweiten Ausgabe meiner „Geradlinigen Gebilde (vergl. 78)" sagte, und was sich nachmals noch durch mehr als zwölfjährige weitere und, wie ich sagen darf, glückliche Probe bewährte, ein paar Worte über das Wesen des Beweises und den ersten Unterricht in der Geometrie beizufügen: „Der Unterricht in der Geometrie", sagte ich damals, „muss wohl damit begonnen werden, den Schülern einige Benennungen beizubringen, — wenn es auch nicht gerade nothwendig scheint, zum voraus dieselben mit allen Namen bekannt zu machen, welche in einem grössern Abschnitte der Geometrie nach und nach erscheinen. Nachdem aber diesen Erklärungen einige Grundsätze beigefügt sind, beginnt nun der Lehrer meistens nach dem Vorgange von Euklid und Legendre einen Lehrsatz mitzutheilen und zu beweisen, — und nun ist es für den unvorbereiteten Schüler keine Kleinigkeit, dem Gedankengange des Lehrers zu folgen: Gleichzeitig soll er den Inhalt des Satzes auffassen und in das ihm unbekannte Wesen eines Beweises eindringen. Gewöhnlich, wo mit einem Congruenzsatze, oder gar mit dem Beweise, dass Scheitelwinkel oder rechte Winkel einander gleich seien, begonnen wird, ist ihm das Letztere um so schwieriger, als ihm nicht einmal die Nothwendigkeit eines Beweises einleuchtet. Beim zweiten Satze (ich denke mir immer den mittelmässigen Schüler, — denn mit den guten Schülern hat es keine Noth, als dass sie selten sind) häuft sich die Schwierigkeit, — und so bei jedem Folgenden. Dazu gesellt sich nach und nach Missmuth, ja Abneigung. Die beim Knaben so häufige Trägheit im Denken verleitet ihn, gegen den Willen seines Lehrers, das Repetiren der Beweise durch ein geistloses Memoriren zu ersetzen, und es ist von Glück zu sagen, wenn sich nach und nach der Geist durcharbeitet, und das mit dem Gedächtniss Aufgefasste am Ende doch zu seinem Eigenthum macht. Aber häufig geschieht es sehr lange nicht, oder gar nicht, und der Lehrer entdeckt beim Prüfen oft Blössen, bei denen ihn ein Schauder ergreift: Was soll er z. B. denken, wenn ihm ein Schüler sagt, den Beweis wisse er gut, aber den Lehrsatz nicht. — Mannigfaltige Versuche, die Unterrichtsweise

in den Elementen der Geometrie den Schülern besser anzupassen, haben mich endlich auf folgenden Gang geführt, mit dessen Resultaten ich alle Ursache habe, zufrieden zu sein: Nachdem ich die nothwendigsten Erklärungen und Begriffe gegeben habe, stelle ich den Schülern vorläufig eine Reihe von Sätzen als Wahrheiten hin, erkläre ihnen dieselben ihrem Inhalte nach, und lehre sie, darin enthaltene Voraussetzungen und Behauptungen gehörig zu unterscheiden, so dass sie im Stande sein sollen, zu jedem Satze die entsprechende Figur zu zeichnen, und sich Voraussetzung und Behauptung in Buchstaben beizuschreiben. Dann lasse ich die Schüler diese Sätze genau memoriren, — fordere zwar nicht, dass sie dieselben der Reihe nach hersagen können, wohl aber, dass sie von irgend zwei Sätzen wissen, welcher der frühere und welcher der spätere ist. Haben sich so die Schüler einen gewissen Vorrath von geometrischen Wahrheiten gesammelt, so sage ich ihnen, dass jeder Satz eine nothwendige Folge der Vorhergehenden sei, und zeige ihnen nun an zweckmässigen Beispielen die Wahrheit dieser Aussage, — d. h. ich fange mit ihnen an zu **beweisen.** Ich sichere mir auf diese Art den grossen Vortheil, dass ich zu den ersten Uebungen im Beweisen nicht nothwendig die ersten Sätze nehmen muss, sondern aus allen gegebenen Sätzen nach Belieben diejenigen auswählen kann, bei denen sich einerseits die Nothwendigkeit des Beweises recht klar herausstellt, während sich anderseits der Beweis leicht macht. — Ist ein Satz, je nach seiner Schwierigkeit, ein, zwei oder mehrere Male bewiesen, so lasse ich die Schüler den Beweis niederschreiben, und fordere sofort, dass sie ihn auch selbstständig zu leisten wissen. Dabei suche ich mich jedoch von der gerade hiebei so häufigen Pedanterie möglichst ferne zu halten, und anerkenne jeden Beweis, so ferne er nur richtig ist, wenn er auch von dem Gegebenen in einzelnen Theilen oder im Ganzen bedeutend abweicht, ja schwerfällig ist; denn ein einziger Beweis, den ein Schüler so recht aus seinem eigenen logischen Bewusstsein herausconstruirt, ist mehr werth als ein Dutzend angelernter Beweise.“ — Die gegenwärtig vorliegenden vier Sätze und ihre Beweise würden sich durch folgendes Schema darstellen lassen:



Wenn	$ac = cb$ $\angle acd = \angle bcd$	$ac = cb$	$\angle cba = \angle cab$	$ad = db$ $\angle adc = \angle bdc$
so ist	$\triangle acd \cong \triangle bcd$ $ad = db$ $\angle cda = \angle cdb$	$\angle cba = \angle cab$	$ac = cb$	$ca = cb$

Hülfsconstr. bei 2 und 3: Halbire $\angle acb$.

Beweis: 1) $\triangle acd \cong \triangle bcd$ weil sie eine Seite gemeinschaftlich, eine zweite Seite und den eingeschlossenen Winkel nach Voraussetzung gleich haben (83).

$ad = db$, $\angle cda = \angle cdb$ weil sie in congruenten Dreiecken gleich liegen.

2) $\triangle acd \cong \triangle bcd$ wie bei 1.

$\angle cba = \angle cab$ weil sie in congruenten Dreiecken gleich liegen.

3) $\triangle acd \cong \triangle bcd$ weil sie eine Seite gemeinschaftlich und zwei zu ihr gleichliegende Winkel (den einen n. V., den andern n. C.) gleich haben (83).

$ac = cb$ weil sie in congruenten Dreiecken gleich liegen.

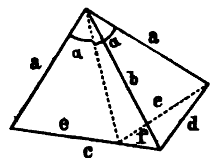
4) $\triangle acd \cong \triangle bcd$ wie bei 1.

$ca = cb$ weil sie in congruenten Dreiecken gleich liegen.

Es würde natürlich hier zu viel Platz einnehmen, auch spätere Sätze so detaillirt zu beweisen; aber in der Schule soll so bewiesen werden.

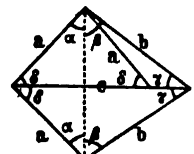
85. Das ungleichseitige Dreieck. Schliessen zwei Seiten eines Dreiecks einen grössern Winkel ein, als zwei ihnen gleiche Seiten eines andern Dreiecks, so hat auch (83) das erstere Dreieck die grössere dritte Seite. — In jedem Dreieck steht (84) einer grössern Seite ein grösserer Winkel gegenüber, und umgekehrt.

Legt man zum Beweise des ersten Satzes die beiden Dreiecke mit einer der gleichen Seiten (z. B. b) an einander, und halbirt die Summe der von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel, so ergibt sich sofort (83) $c = e + f > d$. — Zum Beweise des zweiten Satzes schneide man durch eine Hülfslinie von der grössern Seite oder dem grössern Winkel den Ueberschuss so ab, dass dadurch ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, und benutze 84 und 83.



86. Weitere Congruenz- und Aehnlichkeitssätze. Zwei Dreiecke, welche alle drei Seiten gleich haben, besitzen (84) auch gleiche entsprechende Winkel, oder sind congruent; folglich sind (82) zwei Dreiecke, welche die Verhältnisse aller drei Seiten gleich haben, ähnlich. — Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den der grössern gegenüberliegenden Winkel gleich haben, sind ebenfalls congruent; haben sie dagegen die Gegenwinkel der kleinern Seite gleich, so sind die Gegenwinkel der grössern entweder noch gleich oder supplementär.

Zum Beweise des ersten Satzes lege man die beiden Dreiecke mit einer gleichen Seite (c) entsprechend an einander, — verbinde die Gegenecken, — zeige nach 84, dass die Winkel an diesen Gegenecken aus gleichen Theilen bestehen, — und schliesse endlich nach 83 auf das nothwendige Bestehen der behaupteten Congruenz. — Der zweite Satz bedarf kaum eines eigentlichen Beweises, sondern geht unmittelbar aus der Figur hervor.



87. Die Symmetrie. Zwei Puncte, deren Verbindungslinie durch eine Gerade unter rechtem Winkel gehälftet wird, heissen in Beziehung auf diese Gerade **symmetrisch.** Verbindet man sie mit irgend einem Puncte derselben, so entsteht (84) ein in zwei congruente Dreiecke zerfälltes Dreieck. Verbindet man von zwei Puncten, welche auf derselben Seite einer Geraden liegen, den Einen mit dem Symmetrischen des Andern, so erhält man (83) den Punct der Geraden, von welchem die gegebenen Puncte die kleinste Distanzensumme haben, und in dem sie gleiche Winkel mit der Geraden bestimmen.

Wenn $a\,a_1 \perp a_0\,c$ und $a\,a_0 = a_0\,a_1$, so heissen die Puncte a und a_1 symmetrisch in Beziehung auf die Gerade $a_0\,c$, und es ist $a\,c = a_1\,c$, $a\,d = a_1\,d$, etc., — ferner, wenn $b\,c\,a_1$ eine Gerade ist: $\angle a\,c\,a_0 = \angle a_1\,c\,a_0 = \angle b\,c\,d$. Verbindet man a und b noch mit irgend einem andern Puncte d in $a_0\,c$, so ist endlich

$$a\,d + d\,b = a_1\,d + d\,b > a_1\,c + c\,b = a\,c + c\,b$$

wie zu beweisen war.

88. Abstand und Projection. Die Senkrechte ist (87, 73) die kürzeste Verbindung eines Punctes mit einer Geraden, und wird darum als Maass des Abstandes gebraucht. Ihr Fusspunct heisst **Projection des Punctes,** — die zwischen die Projectionen der Endpuncte fallende Folge der Projectionen aller Puncte einer Geraden **Projection der Geraden.** Die Senkrechte von einer Dreiecksecke auf die Gegenseite heisst **Höhe,** letztere **Basis.**

Es ist (vergl. 87 Fig.)

$$a\,a_0 = \frac{1}{2}\,a\,a_1 < \frac{1}{2}\,(a\,c + c\,a_1) = a\,c$$

a_0 ist die sog. Projection von a auf c d.

89. Parallelensätze. Parallele bilden mit **jeder** Geraden gleiche correspondirende oder Wechsel-Winkel. — Macht man die entsprechenden Schenkel zweier Scheitelwinkel gleich lang, so werden (83) die Verbindungslinien ihrer Endpuncte gleich und parallel (⋕). — Parallele zwischen Parallelen sind (83) gleich, — Gerade, welche von Parallelen gleiche Stücke abschneiden, sind (83) gleich und parallel, — und wenn zwei Paare von Geraden gegenseitig gleiche Stücke von einander abschneiden, so muss (86) jedes Paar aus zwei Parallelen bestehen. — Zwei Gerade werden (83) durch ein System von Parallelen in gleichen Verhältnissen geschnitten, und schneiden von den Parallelen Stücke ab, deren Differenzen in denselben Verhältnissen stehen. — Parallele haben (76, 88) überall denselben Abstand, und schneiden sich daher nicht; umgekehrt sind equidistante Gerade parallel. — Dreiecke, deren Seiten paarweise zu einander parallel oder senkrecht stehen, haben gleiche Winkel und sind daher ähnlich.

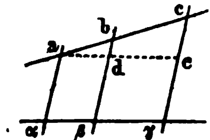
Für den Beweis des ersten Satzes hat man nach 83 aus den durch die Hülfslinie gebildeten vier Dreiecken

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi + \gamma \\ \psi + \gamma &= \alpha' \\ \varphi + \delta &= \beta \\ \beta' &= \delta + \psi \\ \hline \alpha + \beta' &= \alpha' + \beta \end{aligned} \quad +$$

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

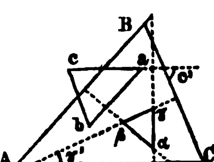
Wenn also für irgend eine Gerade (entsprechend Definition in 76) $\alpha = \alpha'$, so ist auch für jede andere Gerade $\beta = \beta'$. — Für die Beweise des zweiten und

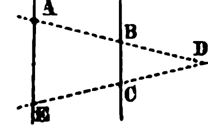
dritten Satzes sind wohl die im Texte durch Nummern gegebenen Andeutungen genügend. — Zum Beweise des vierten Satzes siehe man $ae \parallel \alpha\gamma$. Aus den hiedurch entstehenden ähnlichen Dreiecken abd und ace erhält man die Proportionen



$$ab : ac = ad : ae = \alpha\beta : \alpha\gamma$$
$$= bd : ce = b\beta - a\alpha : c\gamma - a\alpha$$

in welchen der geforderte Beweis liegt. — Der Gang des Beweises für den fünften Satz ist im Texte angegeben. — Der Beweis für den sechsten Satz ist durch die Figur angedeutet; es ist nämlich offenbar $c = C$, da beide gleich c', — $\gamma = C$, da beide complementär zu γ', — also haben die Dreiecke abc, ABC, $\alpha\beta\gamma$ gleiche Winkel, folglich sind sie (83) ähnlich. — Das Proportionalschneiden der Parallelen ermöglicht verschiedene einfache Constructionen: Soll z. B. durch einen Punct A zu einer Geraden BC eine Parallele geführt werden, so zieht man irgend eine Gerade AD, trägt $BD = AB$ ab, — zieht aus D wieder eine beliebige Gerade DE, und trägt $CE = CD$ ab; AE ist sodann offenbar die verlangte Parallele. — Denkt man sich eine Einheit als Länge, so stellt auch jede auf sie bezügliche Zahl eine Länge vor. Trägt man nun auf die beiden Schenkel eines beliebigen Winkels nach irgend einem Maassstabe diese Einheit und zwei in ihr gegebene Zahlen a und b ab, so erhält man, je nachdem man mit dem Endpuncte von a denjenigen von 1 oder b verbindet, und je durch den andern eine Parallele zu dieser Verbindungslinie zieht, als Abschnitt auf dem andern Schenkel x oder y, so dass





$$a : 1 = x : b \quad \text{oder} \quad x = a \times b$$
$$y : 1 = a : b \quad \text{oder} \quad y = a : b$$

Trägt man c statt 1 auf, so erhält man bei entsprechender Construction

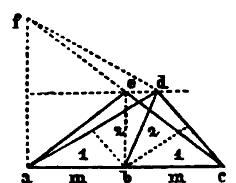
$$x' = (a \times b) : c \quad \text{und} \quad y' = (a : b) \times c$$

— etc. Man kann also auf graphischem Wege eine ganze Zahl oder einen Quotienten multipliciren, eine einfache Zahl oder ein Product dividiren, etc. Von einigen höhern Operationen dieser Art wird später (z. B. in 93) die Rede sein; dagegen mögen hier noch einige dieses **graphische Rechnen** in ausgedehnterer Weise behandelnde Schriften citirt werden, — nämlich: „H. **Eggers**, Lehrer der Mathematik in Schaffhausen: Grundzüge einer graphischen Arithmetik. Schaffhausen 1865 in 8., — K. **Culmann**, Die graphische Statik. Zürich 1866 in 8., — Franz **Reuleaux** (Eschweiler 1829; früher Professor am schweizerischen Polytechnikum, jetzt Director der k. Gewerbe-Academie in Berlin), Der Constructeur. 3. A. Braunschweig 1869 in 8., — etc."

90. Weitere Sätze. Verbindet man die Mitte einer Dreiecksseite mit der Gegenecke, so wird (83, 89) das Dreieck halbirt. — Von allen Dreiecken gleicher Basis und Höhe hat (73, 87) das gleichschenklige den kleinsten Umfang, und von je zweien derselben hat (78) dasjenige, dessen Spitze sich mehr von der des gleich-

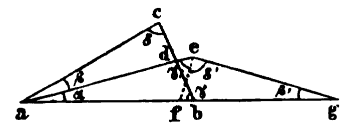
schenkligen entfernt, dessen Basiswinkel somit die des andern der Grösse nach zwischen sich schliessen, den grössern Umfang.

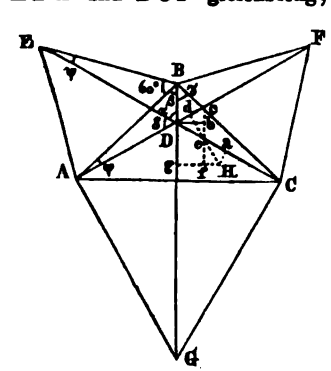
Zum Beweise des ersten Satzes zieht man durch die Mitte b von a c, Parallele zu a d und c d, — zeigt, dass sowohl die beiden Dreiecke 1, als die beiden Dreiecke 2 congruent sind, — und schliesst daraus, dass $abd = bcd$ sein müsse. Vergl. auch 107. — Der Beweis der ersten Hälfte des zweiten Satzes liegt in



$$ae + ec = fc < (fd + dc = ad + dc)$$

Zum Beweise der zweiten Hälfte ist der in 78 gegebene Satz vom umschliessenden Zuge verwendbar. — Macht man in Dreieck a b c, wo $ab > ac > bc$ sein mag, $cd = db$, $ae = ab$ und $af = ad = fg$, so wird $\triangle aef \cong \triangle adb$ und $\triangle gef \cong \triangle acd$, und es ist somit $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, $\delta' = \delta$, sowie nach Voraussetzung $eg < ae$, also $\alpha < \beta'$. Folglich hat Dreieck aeg mit Dreieck abc gleiche Winkelsumme, und es ist überdiess $\alpha < \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. **Legendre** hat hierauf einen Beweis für die Winkelsumme des Dreiecks gegründet. — Verzeichnet man über den Seiten eines Dreieckes gleichseitige Dreiecke, und verbindet die Scheitel der Letztern je mit der gegenüberstehenden Dreiecksecke, so schneiden sich diese Linien in Einem Puncte, haben gleiche Länge, und bilden mit einander gleiche Winkel; überdiess ist die Summe der Entfernungen dieses Durchschnittspunctes von den Dreiecksecken ein Minimum. Um den Beweis hiefür zu führen, seien die Dreiecke A B E und B C F gleichseitig, — Dreieck A C G aber entstehe, indem man durch den gemeinschaftlichen Punct D der Verbindungslinien E C und F A die Gerade B G ziehe, und auf ihr $BG = CE$ abtrage. Da aus der Congruenz der Dreiecke A B F und E B C unmittelbar die Gleichheit der Linien E C und A F folgt, so werden wir nur nöthig haben, zu beweisen, dass $\alpha = 60^0 = \delta$, und dass Dreieck A C G gleichseitig sei, um die Richtigkeit des ersten Theiles unsers Lehrsatzes vollständig dargethan zu haben. Nun folgt aber aus der schon aufgeführten Congruenz $\varphi = \psi$, folglich, da (nach 83) $\psi + 60^0 + \beta + \alpha = 180^0 = \varphi + \delta + \alpha + \beta$ sein muss, $\delta = 60^0$. Ferner haben die Dreiecke B E D und B A D zwei Seiten und die der kleinern Seite gegenüberstehenden Winkel φ und ψ gleich; es müssen somit nach 86 die der grössern Seite gegenüberliegenden Winkel α und $(\alpha + \delta)$ entweder auch gleich, oder supplementär sein. Ersteres geht offenbar nicht, da $\delta = 60^0$, also muss $\alpha + (\alpha + \delta) = 180^0$ oder $\alpha = 60^0$ sein. Wenn aber $\alpha + \delta = 120^0$, so muss $\varphi + \beta = 60^0 = \psi + \angle CEA$ oder $\beta = \angle CEA$ sein. Es sind somit auch die Dreiecke G B A und C E A congruent, oder die Winkel B A G und E A C gleich, d. h. $\angle CAG = 60^0$. Analog kann bewiesen werden, dass $\gamma = \angle AFC$, folglich die Dreiecke C B G und C F A congruent, folglich $\angle ACG = 60^0$. Es ist somit Dreieck A C G gleichseitig, w. z. b. w. Um nun noch den





zweiten Theil des Lehrsatzes zu erweisen, nämlich dass für jeden von D verschiedenen Punct H

$$AH + BH + CH > AD + BD + CD$$

sei, ziehen wir von H auf AF, BG und CE die Senkrechten Hd, Hg und Ha, und dann noch (durch e und D) fc || Bg und Db || Hg. Aus diesen Constructionen folgt einerseits, dass Dreieck Dce gleichseitig, oder Dd = dc = cb = be, — anderseits dass aeH ≅ efH, oder ea = ef. Es ist somit Da = fc = Dg + Dd, oder

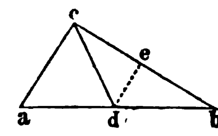
$$Ad + Bg + Ca = AD + BD + CD$$

woraus sofort (85 oder 88) die Richtigkeit der obigen Behauptung folgt.

XI. Das rechtwinklige Dreieck und die goniometrischen Functionen.

91. Das rechtwinklige Dreieck. Ist in einem Dreiecke ein Winkel ein Rechter, so sind die beiden andern Winkel (83) complementär. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende und (85) grösste Seite heisst **Hypotenuse**, jede der andern Seiten **Kathete.** Da sich bei zwei rechtwinkligen Dreiecken die Gleichheit der beiden rechten Winkel von selbst versteht, so wird (83) ihre Congruenz durch eine Seite und einen zu ihr gleichliegenden Winkel, oder durch die beiden Katheten, — ihre Aehnlichkeit durch einen Winkel, oder das Verhältniss der Katheten bestimmt. Zwei solche Dreiecke sind aber (86) auch congruent, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete gleich haben; folglich bestimmt auch das Verhältniss von Hypotenuse und Kathete die Form des rechtwinkligen Dreiecks. — Die Mitte der Hypotenuse steht (76, 89, 84) von allen Ecken gleich weit ab.

Legt man zwei rechtwinklige Dreiecke, welche die Hypotenuse und eine Kathete gleich haben, mit der Letztern entsprechend an einander, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, das jene Kathete zur Höhe hat, also durch sie in zwei congruente Dreiecke zerfällt. — Ist Dreieck abc in c rechtwinklig, und ad = db, so ist auch dc = db; denn zieht man de || ac, so wird einerseits (nach 89) cb durch de gehälftet, und anderseits steht (nach 76) de ⊥ cb, — also ist (nach 84) dc = db, wie zu beweisen war.



92. Dimensionen und Fläche. Theilt man die eine Kathete in gleiche Theile, und verbindet die Theilpuncte mit der Spitze, so erhält man (90) ebensoviele gleiche Dreiecke, und es verhalten sich daher zwei rechtwinklige Dreiecke, welche eine Kathete gleich haben, wie die andern Katheten. Bezeichnen somit AB, ab und Ab die

Katheten dreier rechtwinkliger Dreiecke der Flächen F, f und φ, so hat man

$$F:\varphi = B:b \qquad \varphi:f = A:a \qquad \text{also} \qquad F:f = AB:ab$$

Die Flächen hängen also von den Katheten, die darum **Dimensionen** heissen, ab, und nimmt man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen erste Dimension 1, und dessen zweite 2 beträgt, als Flächeneinheit an, so ist die Fläche irgend eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem halben Producte seiner Katheten.

Diese Weise, eine Flächeneinheit einzuführen, und die Flächenberechnung zu begründen, habe ich schon 1852 in der ersten Ausgabe des Taschenbuches publicirt. Sie scheint mir einen wesentlichen Vorzug vor der sonst üblichen Weise, die Flächenberechnung mit dem Quadrate und Rechtecke zu beginnen, zu besitzen, da sie ermöglicht, die einfachste Figur, das Dreieck, zu erledigen, ehe man zu andern Figuren übergeht.

93. Der pythagoräische Lehrsatz. Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke der Katheten a, b die der Hypotenuse c entsprechende Höhe h, welche auf c die Abschnitte x und y bilden mag, so zerfällt das Dreieck in zwei ihm und daher auch einander ähnliche Theile, und man hat

$$x:h = h:y \qquad c:a = a:x \qquad c:b = b:y \tag{1}$$

folglich besteht der sog. pythagoräische Lehrsatz

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{2}$$

(vergl. 115), und umgekehrt, wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite ($c = x^2 + y^2$, 5, 29, etc.) gleich der Quadratsumme der beiden andern ($b = 2xy$, 4, 20, etc.; $a = x^2 - y^2$, 3, 21, etc.) ist, so liegt der erstern Seite ein rechter Winkel gegenüber. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so besteht der sog. **erweiterte** pythagoräische Lehrsatz

$$a^2 + b^2 \mp 2ax = c^2 \tag{3}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\angle(a, b)$ spitz oder stumpf ist, und wo x die Projection von b auf a bezeichnet.

Dass für $a \perp b$ und $h \perp c$ die Dreiecke (x, h, a), (a, b, c) und (h, y, b) gleiche Winkel haben, also ähnlich sind, und die Proportionen 1 bedingen, lässt sich sehr leicht zeigen. Aus 1 folgen sodann

$$\begin{array}{r} a^2 = c \cdot x \\ b^2 = c \cdot y \\ \hline a^2 + b^2 = c(x + y) = c^2 \end{array} +$$

d. h. der muthmasslich schon den alten Indiern bekannte, von ihnen auf den ihr Land bereisenden griechischen Philosophen **Pythagoras** (Samos 580 — Megapontum 500) übergegangene, von diesem als Flächensatz (115) ausgesprochene und meistens seinen Namen tragende Lehrsatz 2, der im Mittelalter auch noch den Ehrentitel Magister matheseos erhielt, und dessen Kenntniss noch vor wenigen Decennien in manchen sog. „gelehrten" Schulen

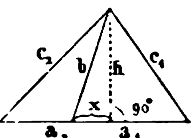
als Beweis einer ganz ordentlichen mathematischen Bildung galt. — Bezeichnet g den Abstand der Mitte der Hypotenuse von der Gegenecke, und p die Projection von h auf g, so hat man nach 1 und 91

$$g:h = h:p \qquad h = \sqrt{x.y} \qquad g = \frac{1}{2}(x+y)$$

Es bezeichnen also (nach 17) g, h, p der Reihe nach das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der Zahlen x und y, — worin wieder ein kleiner Beitrag zu der graphischen Arithmetik liegt. — Besteht zwischen den Seiten a, b, c eines Dreiecks die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, und hat ein rechtwinkliges Dreieck die Katheten a und b, folglich nach 2 die Hypotenuse c, so haben somit die beiden Dreiecke alle drei Seiten gleich, — also sind sie congruent, — also steht auch im ersten Dreiecke der Seite c ein rechter Winkel gegenüber. Ist $c = x^2 + y^2$, $b = 2xy$ und $a = x^2 - y^2$, so hat man wegen der Gleichheit

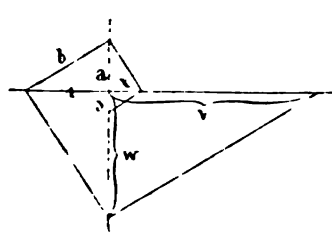
$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 \qquad 4$$

für jede ganzen Werthe von x und y, auch ganze Werthe von c, b, a, welche einem rechtwinkligen Dreiecke entsprechen, d. h. ein sog. **pythagoräisches Dreieck.** Für $x = 2$ und $y = 1$ erhält man so z. B. 3, 4, 5, — für $x = 5$ und $y = 2$ aber 21, 20, 29. Da $21 + 29 = 50$, so bieten letztere Zahlen ein einfaches Mittel, um auf dem Felde mit einer Kette von 50' eine Senkrechte abzustecken. — Es ist nach 2



$$c^2 = (a \mp x)^2 + h^2$$
$$= (a \mp x)^2 + b^2 - x^2$$
$$= a^2 + b^2 \mp 2ax$$

wie 3 behauptet, oder: In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Quadratsumme der beiden andern Seiten, mehr oder weniger dem doppelten Producte der einen Seite in die Projection der andern auf dieselbe, je nachdem der eingeschlossene Winkel spitz oder stumpf ist, — ein Satz, der auch mit der trigonometrischen Formel 104:4 übereinstimmt. — Für $x = 1$ wird nach 1 offenbar $a^2 = c$ oder $a = \sqrt{c}$, so dass sich ein leichtes Verfahren darbietet, die zweite Wurzel graphisch auszuziehen. — Trägt man auf den einen Schenkel eines rechten Winkels die Einheit, auf den andern eine Grösse a auf, — zieht b, und errichtet in seinen Endpuncten Senkrechte, — so schneiden letztere auf den Verlängerungen der Schenkel x und w ab, so dass nach 1



$$1:a = a:x \quad \text{und} \quad a:1 = 1:w, \quad \text{oder} \quad x = a^2 \quad \text{und} \quad w = a^{-1}$$

Setzt man die Construction nach beiden Seiten in ähnlicher Weise fort, so hat man nach 1

$$a:x = x:y \quad \text{und} \quad 1:w = w:v, \quad \text{oder} \quad y = a^3 \quad \text{und} \quad v = a^{-2}$$

u. s. f. — Man kann somit graphisch auch leicht die verschiedenen Potenzen einer Grösse darstellen. Vergl. für weitere Constructionen die in 39 erwähnten Schriften.

94. Die Seitenverhältnisse. Da in einem rechtwinkligen Dreiecke (91) die Seitenverhältnisse von einem Winkel, und die Winkel von einem Seitenverhältnisse abhängen, so kann man die Seiten-

verhältnisse in Beziehung auf die Winkel benennen, und zwar setzt man (s. 77 Fig.)

$$\frac{y}{r} = \text{Sinus } v \qquad \frac{y}{x} = \text{Tangens } v \qquad \frac{r}{x} = \text{Secans } v$$
$$\frac{x}{r} = \text{Cosinus } v \qquad \frac{x}{y} = \text{Cotangens } v \qquad \frac{r}{y} = \text{Cosecans } v \tag{1}$$

so dass

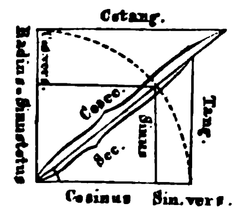
$$\begin{aligned} y &= r \,.\, \text{Sin } v & x &= r \,.\, \text{Cos } v & r &= x \,.\, \text{Sec } v \\ &= x \,.\, \text{Tg } v & &= y \,.\, \text{Cot } v & &= y \,.\, \text{Cosec } v \end{aligned} \tag{2}$$

Ueberdiess setzt man zuweilen

$$\frac{r-x}{r} = \text{Sinus versus } v \qquad \frac{r-y}{r} = \text{Cosinus versus } v \tag{3}$$

und bezeichnet $r = 1$ als Sinus totus.

Während man in älterer Zeit nach dem Vorgange des berühmten, in der ersten Hälfte des zweiten Jahrhunderts zu Alexandrien lebenden Astronomen Claudius **Ptolemäus** zur Berechnung der Winkel ausschliesslich Sehnen benutzte, führte um die Mitte des neunten Jahrhunderts, nach den Einen **Mohammed** ben Musa, nach den Andern der etwas spätere **Albategnius**, die halbe Sehne des doppelten Winkels unter dem Namen **Gib** oder Falte (gefaltete oder halbirte Sehne) in die Mathematik ein, woraus später die lateinischen Uebersetzer **Sinus** machten. Die Tangens soll ebenfalls schon von den Arabern eingeführt und in Tafeln gebracht worden sein, — während von der Secans Georg Joachim genannt **Rhäticus** (Feldkirch 1514 — Kaschau in Ungarn 1576; Professor der Mathematik in Wittenberg) eine erste Tafel berechnete; doch kommen nach Baltzer die Namen Tangens und Secans erst in dem Werke „Thomas **Finke** (Flensburg 1561 — Kopenhagen 1656; erst zu Gottorp als Leibarzt des Herzogs von Schleswig-Holstein, dann Professor der Medicin und Mathematik zu Kopenhagen), Geometriæ rotundi libri XIV. Basileæ 1583 in 4.“ vor. Ueber die Zeit der Einführung des Sinus versus habe ich keine Angaben gefunden; dagegen kann ich noch anführen, dass **Gunter** für den Sinus des complementären Winkels (Complementi Sinus) zuerst die Abkürzung Cosinus gebraucht haben soll, und auf ähnliche Weise dürften Cotangens, Cosecans und Cosinus versus entstanden sein. — Die ältern Mathematiker stellten übrigens alle diese Grössen entsprechend der beigegebenen Figur an einem Kreise des Radius 1 dar, und erst **Euler** führte sie, entsprechend wie es im Texte geschehen ist, als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreiecke ein.



95. Die goniometrischen Functionen. Dehnt man die Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens auf den ganzen Winkelraum aus, indem man in ihren Definitionen (94) Hypotenuse und Winkel durch die Polarcoordinaten, die beiden Katheten durch die rechtwinkligen Coordinaten mit ihren Zeichen (77) ersetzt, so werden aus ihnen die sog. **goniometrischen Functionen.** Da aber ein Bruch,

sobald man seinen Nenner als Einheit wählt, dem Werthe nach durch den Zähler dargestellt wird, so lassen sich die 4 Functionen für alle Winkel leicht graphisch darstellen, und so ihrem Verlaufe nach durch den ganzen Winkelraum verfolgen. So findet man, dass den 4 Quadranten für

die Functionen	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens
die Zeichenfolgen	$++--$	$+--+$	$+-+-$	$+-+-$
und Grenzwerthe	0,1	1,0	$0,\infty$	$\infty,0$

entsprechen, wo je die erste Grenze bei 0^0 und 180^0, die zweite bei 90^0 und 270^0 eintrifft. Die 4 Functionen sind periodisch, und zwar nehmen alle (abgesehen vom Zeichen) bei den Winkeln $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ und $360^0 - \alpha$ wieder dieselben Werthe an, die sie für α halten. Sinus und Tangens eines Winkels sind gleich Cosinus und Cotangens seines Complementes. Speciell folgen aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen und dem gleichseitigen Dreiecke $\text{Tg } 45^0 = 1 = \text{Cot. } 45^0$ und $\text{Sin } 30^0 = 1/2 = \text{Cos } 60^0$.

Diese Ausdehnung der goniometrischen Functionen durch Einführung der Coordinaten ist, glaube ich, auf solche Weise ebenfalls durch mich 1841 zuerst geschehen. — Vergl. für die graphische Darstellung die leicht auf die übrigen Quadranten ausdehnbare Figur des vorigen Satzes.

96. Einige Grundbeziehungen. Für jeden Winkel a hat man nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\text{Sin}^2 a + \text{Cos}^2 a = 1 \qquad \text{Tg } a \,.\, \text{Ctg } a = 1 \qquad \mathbf{1}$$

$$\frac{\text{Sin } a}{\text{Cos } a} = \text{Tg } a = \frac{1}{\text{Ctg } a}, \quad \frac{1}{\text{Cos } a} = \text{Sec } a, \quad \frac{1}{\text{Sin } a} = \text{Cosec. } a \qquad \mathbf{2}$$

$$1 + \text{Tg}^2 a = \frac{1}{\text{Cos}^2 a}, \quad \text{Cos } a = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tg}^2 a}}, \quad \text{Sin } a = \frac{\text{Tg } a}{\sqrt{1 + \text{Tg}^2 a}} \qquad \mathbf{3}$$

Ferner darf man nur ächte Brüche als Sinus oder Cosinus betrachten, dagegen jede Zahl als Tangens oder Cotangens, und auch immer

$$x = a \,.\, \text{Sin } A \qquad y = a \,.\, \text{Cos } A \qquad \mathbf{4}$$

setzen, da daraus die immer möglichen Werthe

$$\text{Tg } A = \frac{x}{y} \qquad a = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \mathbf{5}$$

folgen.

Die erste Formel folgt aus dem Pythagoräischen Lehrsatze; alle folgenden gehen aus ihr und den Definitionen fast unmittelbar hervor.

97. Die sog. Transformation der Coordinaten. Kennt man die Coordinaten x y eines Punctes M in Beziehung auf ein Coordinatensystem X Y, so kann man leicht seine Coordinaten x′ y′ in Beziehung auf ein anderes Coordinatensystem X′ Y′ finden, wenn man

die Grössen α, β, φ kennt, welche die gegenseitige Lage der beiden Systeme bestimmen. Man hat nämlich offenbar

$x = \alpha + x' \operatorname{Cos} \varphi - y' \operatorname{Sin} \varphi$ **1** $y = \beta + x' \operatorname{Sin} \varphi + y' \operatorname{Cos} \varphi$ **2**

oder wenn man $1 . \operatorname{Cos} \varphi + 2 . \operatorname{Sin} \varphi$ und $2 . \operatorname{Cos} \varphi - 1 . \operatorname{Sin} \varphi$ bildet,

$x' = (x - \alpha) \operatorname{Cos} \varphi + (y - \beta) \operatorname{Sin} \varphi$ **3** $y' = (y - \beta) \operatorname{Cos} \varphi - (x - \alpha) \operatorname{Sin} \varphi$ **4**

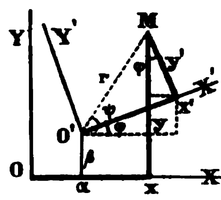
Substituirt man aber in beiden Systemen die Werthe

$x - \alpha = r \operatorname{Cos}(\varphi + \psi)$, $y - \beta = r \operatorname{Sin}(\varphi + \psi)$, $x' = r \operatorname{Cos} \psi$, $y' = r \operatorname{Sin} \psi$

und setzt im ersten $\varphi = a$, $\psi = b$ und im zweiten $\varphi = b$, $\psi = a - b$, so erhält man

$$\operatorname{Sin}(a \pm b) = \operatorname{Sin} a . \operatorname{Cos} b \pm \operatorname{Cos} a . \operatorname{Sin} b \qquad \mathbf{5}$$
$$\operatorname{Cos}(a \pm b) = \operatorname{Cos} a . \operatorname{Cos} b \mp \operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b \qquad \mathbf{6}$$

und damit zwei Grundformeln der Goniometrie.



Die Anwendung der unmittelbar aus der beistehenden Figur abzulesenden Transformationsformeln 1 bis 4 zur Aufstellung der goniometrischen Hauptformeln 5 und 6 ist, glaube ich, ebenfalls 1841 zuerst durch mich eingeführt worden. Setzt man in Letztern für a und b abwechselnd 90° oder 270° ein, so erhält man die Formeln

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Sin}(a \pm 90^0) = \pm \operatorname{Cos} a & \operatorname{Sin}(90^0 \pm b) = + \operatorname{Cos} b \\ \operatorname{Cos}(a \pm 90^0) = \mp \operatorname{Sin} a & \operatorname{Cos}(90^0 \pm b) = \mp \operatorname{Sin} b \end{array} \qquad \mathbf{7}$$
$$\begin{array}{ll} \operatorname{Sin}(a \pm 270^0) = \mp \operatorname{Cos} a & \operatorname{Sin}(270^0 \pm b) = - \operatorname{Cos} b \\ \operatorname{Cos}(a \pm 270^0) = \pm \operatorname{Sin} a & \operatorname{Cos}(270^0 \pm b) = \pm \operatorname{Sin} b \end{array} \qquad \mathbf{8}$$

welche sehr häufig zu Reduction auf den ersten Quadranten in Anwendung kommen.

98. Weitere goniometrische Formeln. Mit Hülfe von 96 und 97 : 5,6 findet man leicht, dass

$$\operatorname{Tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{Tg} a \pm \operatorname{Tg} b}{1 \mp \operatorname{Tg} a . \operatorname{Tg} b} \qquad \operatorname{Tg}(a \pm 45^0) = \frac{\operatorname{Tg} a \pm 1}{1 \mp \operatorname{Tg} a} \qquad \mathbf{1}$$

$$\operatorname{Sin} a = 2 \operatorname{Sin} \frac{a}{2} . \operatorname{Cos} \frac{a}{2} = 3 \operatorname{Sin} \frac{a}{3} - 4 \operatorname{Sin}^3 \frac{a}{3}$$
$$\operatorname{Cos} a = \operatorname{Cos}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{Sin}^2 \frac{a}{2} = 1 - 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{a}{2} = 2 \operatorname{Cos}^2 \frac{a}{2} - 1 \qquad \mathbf{2}$$

$$\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b = 2 \operatorname{Sin} \frac{a+b}{2} \operatorname{Cos} \frac{a-b}{2}$$
$$\operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin} b = 2 \operatorname{Sin} \frac{a-b}{2} \operatorname{Cos} \frac{a+b}{2}$$
$$\operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b = 2 \operatorname{Cos} \frac{a+b}{2} \operatorname{Cos} \frac{a-b}{2} \qquad \mathbf{3}$$
$$\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b = 2 \operatorname{Sin} \frac{a+b}{2} \operatorname{Sin} \frac{b-a}{2}$$

$$\text{Tg}\frac{a+b}{2} : \text{Tg}\frac{a-b}{2} = (\text{Sin}\,a + \text{Sin}\,b) : (\text{Sin}\,a - \text{Sin}\,b) \qquad 4$$

$$= \text{Tg}\,(45^0 + x) \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\,x = \frac{\text{Sin}\,b}{\text{Sin}\,a}$$

$$\text{Sin}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,a}{2}} \qquad \text{Cos}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,a}{2}} \qquad 5$$

$$\text{Tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,a}{1+\text{Cos}\,a}} = \frac{1-\text{Cos}\,a}{\text{Sin}\,a} = \frac{\text{Sin}\,a}{1+\text{Cos}\,a} \qquad 6$$

und so weiter.

Die erste Formel 1 wird erhalten, indem man die Formeln 97 : 5,6 durch einander, und dann rechts Zähler und Nenner durch Cos a . Cos b dividirt, — die zweite geht unmittelbar aus der ersten hervor. — Die unter 2 gegebenen Formeln, um Sin. und Cos. eines Winkels durch Sin. und Cos. seiner Hälfte auszudrücken, gehen aus 97 : 5,6 hervor, indem man a und b durch $a/_2$ ersetzt, und mit ihrer Hülfe erhält man nach 97 : 5

$$\text{Sin}\,a = \text{Sin}\,(\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}) = \text{Sin}\frac{2a}{3}\,\text{Cos}\frac{a}{3} + \text{Cos}\frac{2a}{3}\,\text{Sin}\frac{a}{3}$$

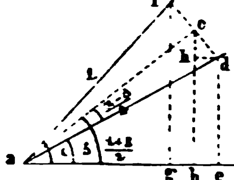
$$= 2\,\text{Sin}\frac{a}{3}\,(1 - \text{Sin}^2\frac{a}{3}) + (1 - 2\,\text{Sin}^2\frac{a}{3})\,\text{Sin}\frac{a}{3}$$

$$= 3\,\text{Sin}\frac{a}{3} - 4\,\text{Sin}^3\frac{a}{3}$$

Die Formeln 3 werden entweder mit Hülfe von 97 : 5,6 erhalten, indem man je links

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \qquad \text{und} \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

einsetzt, — oder, wie ich 1846 zeigte (vergl. Grunert's Archiv VII 443), aus der beistehenden Figur, in welcher ad = af und ac die Bisectrix des Winkels fad sein soll. Man erhält nämlich aus derselben unmittelbar



$$\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta = fg + de = 2 . bc$$

$$= 2 . ac . \text{Sin}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2 . \text{Cos}\frac{\alpha-\beta}{2} . \text{Sin}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und entsprechend gehen die übrigen Formeln aus

$$\text{Sin}\,\alpha - \text{Sin}\,\beta = 2 . ch \qquad \text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,\beta = 2 . ab \qquad \text{Cos}\,\alpha - \text{Cos}\,\beta = -2 . dh$$

hervor. — Die Proportion 4 wird aus den zwei ersten Formeln 3 durch Division erhalten, — die Formeln 5 gehen aus 2 hervor, — die 6 aus 5. — Mit Hülfe von 6 erhält man überdiess

$$\frac{1+\text{Sin}\,a}{\text{Cos}\,a} = \frac{1+\text{Cos}\,(90-a)}{\text{Sin}\,(90-a)} = \text{Ctg}\,(45 - \frac{a}{2}) = \text{Tg}\,(45 + \frac{a}{2}) \qquad 7$$

$$\frac{1-\text{Sin}\,a}{\text{Cos}\,a} = \frac{1-\text{Cos}\,(90-a)}{\text{Sin}\,(90-a)} = \text{Tg}\,(45 - \frac{a}{2}) \qquad 8$$

Ferner mit Hülfe von 1 und 2 successive

$$\text{Tg}\,2a = \frac{2\,\text{Tg}\,a}{1-\text{Tg}^2 a} \qquad \sqrt{1+\text{Tg}^2\,2a} = \frac{1+\text{Tg}^2 a}{1-\text{Tg}^2 a} \qquad 9$$

$$\sqrt{1+\text{Tg}^2\,2a} - 1 = \text{Tg}\,2a . \text{Tg}\,a \qquad \sqrt{1+\text{Tg}^2\,2a} + 1 = \text{Tg}\,2a . \text{Ctg}\,a \qquad 10$$

$$\operatorname{Sin} 2a = \frac{2 \operatorname{Tg} a}{1 + \operatorname{Tg}^2 a} \qquad \operatorname{Cos} 2a = \frac{1 - \operatorname{Tg}^2 a}{1 + \operatorname{Tg}^2 a} \qquad \textbf{11}$$

und so weiter.

99. Der Moivre'sche Lehrsatz. Durch Multiplication findet man (97 : 5,6)

$$(\operatorname{Cos}\alpha \pm i \operatorname{Sin}\alpha) . (\operatorname{Cos}\beta \pm i \operatorname{Sin}\beta) . (\operatorname{Cos}\gamma \pm i \operatorname{Sin}\gamma) \ldots = \operatorname{Cos}(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) \pm i \operatorname{Sin}(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$$

oder für $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ den sog. Moivre'schen Lehrsatz

$$(\operatorname{Cos}\alpha \pm i \operatorname{Sin}\alpha)^n = \operatorname{Cos} n\alpha \pm i \operatorname{Sin} n\alpha \qquad \textbf{1}$$

welchen man auch, indem man $n\alpha = \beta$ setzt, unter der Form

$$(\operatorname{Cos}\beta \pm i \operatorname{Sin}\beta)^{\frac{1}{n}} = \operatorname{Cos}\frac{\beta}{n} \pm i \operatorname{Sin}\frac{\beta}{n}$$

schreiben kann. Da hieraus (95, 96)

$$(\operatorname{Cos}\alpha \pm i \operatorname{Sin}\alpha)^{-m} = \left(\frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha \pm i \operatorname{Sin}\alpha}\right)^m = (\operatorname{Cos}\alpha \mp i \operatorname{Sin}\alpha)^m = \operatorname{Cos}(-m\alpha) \pm i \operatorname{Sin}(-m\alpha) \qquad \textbf{2}$$

$$(\operatorname{Cos}\beta \pm i \operatorname{Sin}\beta)^{\frac{m}{n}} = \left(\operatorname{Cos}\frac{\beta}{n} \pm i \operatorname{Sin}\frac{\beta}{n}\right)^m = \operatorname{Cos}\frac{m}{n}\beta \pm i \operatorname{Sin}\frac{m}{n}\beta \qquad \textbf{3}$$

folgen, so erstreckt sich die Gültigkeit des Moivre'schen Lehrsatzes auch auf negative und gebrochene Exponenten. (Vergl. 50).

Um 2 zu erhalten, hat man nur zu beachten, dass durch einfache Multiplication

$$(\operatorname{Cos}\alpha \pm i \operatorname{Sin}\alpha)(\operatorname{Cos}\alpha \mp i \operatorname{Sin}\alpha) = \operatorname{Cos}^2\alpha - i^2 . \operatorname{Sin}^2\alpha = \operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Sin}^2\alpha = 1$$

gefunden wird, — also die beiden Factoren $\operatorname{Cos}\alpha \pm i \operatorname{Sin}\alpha$ und $\operatorname{Cos}\alpha \mp i \operatorname{Sin}\alpha$ wirklich reciprok sind. — Der Moivre'sche Lehrsatz scheint zuerst (wie in 50) analytisch, und erst später auch in obiger Weise abgeleitet worden zu sein.

100. Einige goniometrische Reihen. Da der Moivre'sche Lehrsatz mit 50 : 4 übereinstimmt, so findet man aus ihm 50 : 7, und, indem man Cos x durch $\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 x}$ ersetzt, sowie 43 anwendet,

$$\operatorname{Sin} nx = n\left[\operatorname{Sin} x - \frac{n^2 - 1^2}{1.2.3}\operatorname{Sin}^3 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{Sin}^5 x - \ldots\right]$$

$$\frac{\operatorname{Sin} nx}{\operatorname{Cos} x} = n\left[\operatorname{Sin} x - \frac{n^2 - 2^2}{1.2.3}\operatorname{Sin}^3 x + \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{Sin}^5 x - \ldots\right] \qquad \textbf{1}$$

$$\operatorname{Cos} nx = 1 - \frac{n^2}{1.2}\operatorname{Sin}^2 x + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4}\operatorname{Sin}^4 x - \ldots$$

$$\frac{\operatorname{Cos} nx}{\operatorname{Cos} x} = 1 - \frac{n^2 - 1^2}{1.2}\operatorname{Sin}^2 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1.2.3.4}\operatorname{Sin}^4 x - \ldots$$

Setzt man in der ersten und dritten dieser Reihen $n = 3m$ und $x = 30^0$, also (95) $\operatorname{Sin} x = \frac{1}{2}$, und ordnet nach m, so erhält man

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\,(m\,.\,90^0) = m\; &.\, 1{,}5707963 - m^3\;.\,0{,}6459641 \\
+ m^5\; &.\, 0{,}0796926 - m^7\;.\,0{,}0046818 \\
+ m^9\; &.\, 0{,}0001604 - m^{11}\,.\,0{,}0000036 \\
+ m^{13}\, &.\, 0{,}0000001 - \ldots \\
\text{Cos}\,(m\,.\,90^0) = \; & \quad 1{,}0000000 - m^2\;.\,1{,}2337006 \\
+ m^4\; &.\, 0{,}2536695 - m^6\;.\,0{,}0208635 \\
+ m^8\; &.\, 0{,}0009193 - m^{10}\,.\,0{,}0000252 \\
+ m^{12}\, &.\, 0{,}0000004 - \ldots
\end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

aus welchen sich ergibt, dass

$$\text{Sin}\,1'' = \frac{1{,}5707963}{90.60.60} = \frac{1}{206264{,}8} = \overline{4{,}6855749}$$

und dass, wenn a eine nicht sehr grosse Anzahl von Secunden bezeichnet,

$$\text{Sin}\,a = a\,.\,\text{Sin}\,1'' \quad \text{oder} \quad a = \text{Sin}\,a : \text{Sin}\,1'' \quad \text{und} \quad \text{Cos}\,a = 1 \qquad \mathbf{3}$$

Setzt man aber in 50:7 anstatt x die Grösse $\alpha : n$, und lässt n unendlich gross, also $\frac{\alpha}{n}$ unendlich klein werden, so nehmen $\text{Sin}\,\frac{\alpha}{n}$, $\text{Cos}\,\frac{\alpha}{n}$ und $\binom{n}{h}$ die Grenzwerthe $\frac{\alpha}{n}\,\text{Sin}\,1'' = \frac{\alpha'}{n}$, 1 und $\frac{n^h}{1.2\ldots h}$ an, und man erhält

$$\text{Sin}\,\alpha = \alpha' - \frac{\alpha'^3}{1.2.3} + \ldots \qquad \text{Cos}\,\alpha = 1 - \frac{\alpha'^2}{1.2} + \ldots \qquad \mathbf{4}$$

woraus sich die Vergleichung zwischen den in 50 und 94 eingeführten Sinus und Cosinus ergibt. (V).

Da nach 96:1 und 43

$$\begin{aligned}
\text{Cos}^n x &= (1 - \text{Sin}^2 x)^{n/2} \\
&= 1 - \binom{n/2}{1}\text{Sin}^2 x + \binom{n/2}{2}\text{Sin}^4 x - \binom{n/2}{3}\text{Sin}^6 x + \ldots \\
&= 1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{\text{Sin}^2 x}{2} + \frac{n\,(n-2)}{1.2}\cdot\frac{\text{Sin}^4 x}{2^2} - \frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{1.2.3}\cdot\frac{\text{Sin}^6 x}{2^3} + \ldots
\end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

so erhält man aus 50:7

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\,nx &= \binom{n}{1}\text{Sin}\,x\left[1 - \frac{n-1}{1}\,\frac{\text{Sin}^2 x}{2} + \frac{(n-1)\,(n-3)}{1.2}\,\frac{\text{Sin}^4 x}{2^2} - \frac{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)}{1.2.3}\,\frac{\text{Sin}^6 x}{2^3} + \ldots\right] \\
&\quad - \binom{n}{3}\text{Sin}^3 x\left[1 - \frac{n-3}{1}\cdot\frac{\text{Sin}^2 x}{2} + \frac{(n-3)\,(n-5)}{1.2}\,\frac{\text{Sin}^4 x}{2^2} - \ldots\right] \\
&\quad + \binom{n}{5}\text{Sin}^5 x\left[1 - \frac{n-5}{1}\cdot\frac{\text{Sin}^2 x}{2} + \ldots\right] - \ldots \\
&= n\left[\begin{array}{l}
\text{Sin}\,x - \left(\frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2.3}\right)\text{Sin}^3 x + \\
\left(\frac{(n-1)\,(n-3)}{1.2.2^2} + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.2.3.2} + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3.4.5}\right)\text{Sin}^5 x \\
- \ldots\ldots
\end{array}\right] \\
&= n\left[\text{Sin}\,x - \frac{n^2 - 1^2}{1.2.3}\,\text{Sin}^3 x + \frac{(n^2 - 1^2)\,(n^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5}\,\text{Sin}^5 x - \ldots\right]
\end{aligned}$$

und analog eine entsprechende Gleichung für Cos n x oder, indem man erst beidseitig durch Cos x dividirt, und dann erst entwickelt, für Sin n x : Cos x und Cos n x : Cos x, d. h. 1, wo die erste und vierte Reihe für ganze ungerade, die zweite und dritte Reihe aber für ganze gerade Werthe von n abbricht. — Bezeichnet d x eine kleine Anzahl von Secunden, so erhält man nach 3 und 97 : 5,6

$$\begin{aligned} \mathrm{Sin}\,(x+dx) &= \mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x\,.\,dx\,.\,\mathrm{Sin}\,1'' \quad \text{oder} \quad d\,.\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,x\,.\,dx\,.\,\mathrm{Sin}\,1'' \\ \mathrm{Cos}\,(x+dx) &= \mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x\,.\,dx\,.\,\mathrm{Sin}\,1'' \quad\quad d\,.\,\mathrm{Cos}\,x = -\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx\,.\,\mathrm{Sin}\,1'' \end{aligned} \quad 6$$

etc., woraus sich wieder eine interessante Vergleichung mit 57 : 2,3 ergibt, und zugleich gezeigt ist, wie in der Trigonometrie gewisse Fehlergleichungen ohne Kenntniss der Differentialrechnung aufgestellt werden können. — Aus 4 folgt, dass sehr nahe

$$3\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha - \alpha'\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha = 2\,\alpha' \qquad \text{oder} \qquad \alpha' = \frac{3\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2+\mathrm{Cos}\,\alpha} \quad 7$$

oder, wenn α in Graden ausgedrückt, also $\alpha' = 60\,.\,60\,.\,\alpha\,.\,\mathrm{Sin}\,1''$ ist, und (entsprechend 129) $\mathrm{Arc}\,1^0 = \pi : 180 = 1 : 57,3$, sowie $\mathrm{Sin}\,1'' = \mathrm{Arc}\,1'' = \mathrm{Arc}\,1^0 : 60\,.\,60$ gesetzt wird

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{Arc}\,1^0} \cdot \frac{3\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2+\mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{171,9\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2+\mathrm{Cos}\,\alpha} \quad 8$$

Um zu beurtheilen, wie weit 3 zulässig ist, dienen die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \log(100\,.\,\mathrm{Sin}\,1'') &= 6,6855749 = \log \mathrm{Sin}\,1'\,40'',000 = \log \mathrm{Sin}\,100'',000 \\ \log(1000\,.\,\mathrm{Sin}\,1'') &= 7,6855749 = \log \mathrm{Sin}\,16'\,40'',004 = \log \mathrm{Sin}\,1000,004 \\ \log(5000\,.\,\mathrm{Sin}\,1'') &= 8,3845449 = \log \mathrm{Sin}\,1^0\,23'\,20'',491 = \log \mathrm{Sin}\,5000,491 \\ \log(10000\,.\,\mathrm{Sin}\,1'') &= 8,6855749 = \log \mathrm{Sin}\,2^0\,46'\,43'',992 = \log \mathrm{Sin}\,10003,992 \\ \log \mathrm{Cos}\ \ 1'\,30'' &= 0,0000000 = \log 1,0000000 \\ \log \mathrm{Cos}\ \ 3\ \ \ 0 &= 9,9999998 = \log 0,9999995 \\ \log \mathrm{Cos}\ 11\ \ \ 0 &= 9,9999978 = \log 0,9999950 \\ \log \mathrm{Cos}\ 34\ \ \ 0 &= 9,9999783 = \log 0,9999500 \end{aligned}$$

Die Formeln 2, welche schon **Euler** in seiner „Introductio in Analysin infinitorum" gab, sind zur Berechnung der Sinus und Cosinus um so bequemer, als man (95) m nie grösser als $^1/_2$ zu setzen hat; Tangente und Cotangente gehen aus Sinus und Cosinus durch Division hervor. — Zur Ergänzung des in 94 Beigebrachten ist zu erwähnen, dass schon **Purbach** und **Regiomontan** Sinustafeln berechneten; und zwar sind diejenigen von Regiomontan wenigstens in der durch Daniel **Santbech** von Noviomagum (Neumagen an der Mosel?) besorgten Ausgabe „Joannis Regiomontani, De triangulis planis et sphæricis libri quinque, unà cum tabulis sinuum. Basileæ (1561) in fol." enthalten, — ob auch in der durch Johannes **Schoner** (Karlstadt bei Würzburg 1477 — Nürnberg 1547; erst Pfarrer zu Bamberg, dann Professor der Mathematik zu Nürnberg) besorgten frühern Ausgabe „Joannis de Regiomonte, De triangulis omnimodis libri quinque. Norimbergæ 1533 in fol.", weiss ich nicht, — und geben, die Eine für den Sinus Totus 6 Millionen, die Andere für den Sinus Totus 10 Millionen, die Sinus für den ganzen Quadranten von Minute zu Minute. Erasmus **Reinhold** (Saalfeld 1511 — Saalfeld 1553; Professor der Mathematik zu Wittenberg) gab in seiner Schrift „Primus liber tabularum directionum. Tubingæ 1554 in 4." nebst Anderm unter dem Titel „Canon fœcundus" eine schon von Regiomontan angefangene und dann von ihm erweiterte Tangententafel für den Radius 10 Millionen, — bis auf 89° für jede Minute, für den letzten Grad von 10 zu 10 Secunden die Tangente und ihre Differenz mit der darauf folgenden Tangente enthaltend. **Rhäticus**

stellte sich die Aufgabe, für jedes rechtwinklige Dreieck, in welchem die Hypotenuse oder eine der Katheten 1000 Billionen Theile habe, je die andern Seiten (d. h. Sinus, Tangens und Secans) zu berechnen, und dabei im Winkel von 10 zu 10 Secunden, für den ersten und letzten Grad des Quadranten sogar nur von Secunde zu Secunde fortzuschreiten; obschon er aber während circa 12 Jahren mit mehreren Rechnern dieser Aufgabe oblag, konnte er sie bis zu seinem Tode nicht völlig bemeistern, und musste namentlich die Herausgabe von Tafeln seinem Schüler Lucas Valentin **Otho**, später auch einige Zeit Professor der Mathematik in Wittenberg, überlassen, der dann in der That das berühmte Werk „Opus Palatinum de triangulis, a G. J. Rhætico cœptum, L. V. Otho consummavit A. 1596. Neostadii in Palatin. (Heidelbergæ) 1596 in fol." publicirte, welches die Sinus, Tangens und Secans für den ganzen Quadranten von 10 zu 10 Secunden und für den Radius 1000 Millionen gibt, — während der auf dasselbe Material gegründete, von Bartholomäus **Pitiscus** (Schlaune bei Grüneberg in Schlesien 1561 — Heidelberg 1613; Hofkaplan Friedrich IV. von der Pfalz) herausgegebene, jetzt sehr selten gewordene, aber zur Verification immer noch sehr werthvolle „Thesaurus mathematicus sive Canon sinuum ad radium 1000000000000000 a G. J. Rhæticus supputatus. Francofurti 1613 in fol." sich auf die Sinus und ihre Differenzen beschränkte. Nach Erfindung der Logarithmen wurden die trigonometrischen Tafeln mit den logarithmischen verbunden, und es sind die merkwürdigsten dieser neuern und vereinigten Tafeln bereits in 14 einlässlich besprochen worden.

101. Anwendung auf algebraische Gleichungen. Wenn in der Cardanischen Formel (19) $b^2 + a^3$ negativ werden soll, so muss a negativ und $a^3 > b^2$ sein. Setzt man aber in der entsprechenden Gleichung a negativ, so geht sie (98:2) für

$$y = -2\sqrt{a} \,.\, \text{Sin}\,\varphi \qquad \mathbf{1}$$

in

$$\sqrt{\frac{b^2}{a^3}} = 3\,\text{Sin}\,\varphi - 4\,\text{Sin}^3\,\varphi = \text{Sin}\,3\,\varphi \qquad \mathbf{2}$$

über, so dass φ für $a^3 > b^2$ möglich wird. Die ihr genügenden Werthe 3φ, $180^0 - 3\varphi$, $360^0 + 3\varphi$, $540^0 - 3\varphi$, $720^0 + 3\varphi$, $900^0 - 3\varphi, \ldots$ geben für $2\sqrt{a} = c$ die drei reellen Wurzeln

$$y_1 = -c\,\text{Sin}\,\varphi \qquad y_2 = -c\,\text{Sin}\,(60^0 - \varphi) \qquad y_3 = c\,\text{Sin}\,(60^0 + \varphi) \qquad \mathbf{3}$$

entsprechend der in 19 aufgestellten Behauptung.

Die im Texte aufgezählten 6 Werthe, welche 2 genügen, sind offenbar in 1 als

$$\varphi \qquad 60 - \varphi \qquad 120 + \varphi \qquad 180 - \varphi \qquad 240 + \varphi \qquad 300 - \varphi$$

statt φ einzuführen, und geben daher, da

$$\text{Sin}\,\varphi = \text{Sin}\,(180 - \varphi) \qquad \text{Sin}\,(60 - \varphi) = \text{Sin}\,(120 + \varphi)$$
$$\text{Sin}\,(240 + \varphi) = -\text{Sin}\,(60 + \varphi) = \text{Sin}\,(300 - \varphi)$$

die unter 3 aufgeführten drei Wurzeln; die weitern Werthe, welche nach 2 genügen, geben zur Einführung in 1 nur um 360° vermehrte Werthe, also nichts Neues. — Auch eine Gleichung zweiten Grades kann mit Hülfe goniometrischer Functionen aufgelöst werden. Bringt man z. B., wie Joh. Gottlieb Wilhelm **Mensing** (Nenndorf in Kurhessen 1792; Lehrer der Mathematik

und Physik zu Halle und Erfurt) in Grunert's Archiv (Bd. 1) vorschlug, die Gleichung zweiten Grades auf die Form

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0 \quad \text{so dass} \quad x = \left[\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - 1\right] a$$

und setzt

$$\text{Tg}\, 2\varphi = \frac{b}{a} \qquad 4$$

so ergeben sich mit Hülfe von 98:10

$$\begin{aligned} x' &= a\left[\sqrt{1+\text{Tg}^2 2\varphi} - 1\right] = a\,.\,\text{Tg}\,2\varphi\,.\,\text{Tg}\,\varphi = b\,.\,\text{Tg}\,\varphi \\ x'' &= -a\left[\sqrt{1+\text{Tg}^2 2\varphi} + 1\right] = -a\,.\,\text{Tg}\,2\varphi\,.\,\text{Ctg}\,\varphi = -b\,\text{Ctg}\,\varphi \end{aligned} \qquad 5$$

als Werthe der beiden Wurzeln.

102. Anwendung auf transcendente Gleichungen. — Um die Gleichung

$$a\,.\,\text{Sin}\,x \pm b\,.\,\text{Cos}\,x = c \qquad 1$$

aufzulösen, setze man

$$a = m\,.\,\text{Cos}\,\varphi \qquad b = m\,.\,\text{Sin}\,\varphi \qquad 2$$

woraus sich sofort (97:5)

$$\text{Sin}\,(x \pm \varphi) = \frac{c\,.\,\text{Sin}\,\varphi}{b} \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\,\varphi = \frac{b}{a} \qquad 3$$

ergibt. — Hat man die Gleichungen

$$x\,\text{Sin}\,y = a\,\text{Sin}\,\alpha - b\,\text{Sin}\,\beta \quad 4 \qquad x\,\text{Cos}\,y = a\,\text{Cos}\,\alpha - b\,\text{Cos}\,\beta \quad 5$$

und bildet $4\,.\,\text{Cos}\,\alpha - 5\,.\,\text{Sin}\,\alpha$ und $4\,.\,\text{Sin}\,\alpha + 5\,.\,\text{Cos}\,\alpha$, so erhält man statt ihnen

$$x\,\text{Sin}\,(y-\alpha) = b\,\text{Sin}\,(\alpha-\beta), \quad x\,\text{Cos}\,(y-\alpha) = a - b\,\text{Cos}\,(\alpha-\beta) \qquad 6$$

und hieraus

$$\text{Tg}\,(y-\alpha) = \frac{b\,.\,\text{Sin}\,(\alpha-\beta)}{a - b\,.\,\text{Cos}\,(\alpha-\beta)} \qquad 7$$

oder nach 52:3, 4, wenn man, um Bogen zu erhalten (100), rechts mit Sin 1″ dividirt,

$$y = \alpha + \frac{b}{a\,\text{Sin}\,1''}\,\text{Sin}\,(\alpha-\beta) + \frac{b^2}{2\,a^2\,\text{Sin}\,1''}\,\text{Sin}\,2\,(\alpha-\beta) + \ldots \qquad 8$$

Und so weiter.

Für Anwendungen dieser Formeln vergleiche z. B. den Parallaxensatz 387.

XII. Die Trigonometrie und einige weitere Eigenschaften des Dreieckes.

103. Die trigonometrischen Grundbeziehungen. Bezeichnet man die Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, die Gegenwinkel mit A, B, C, so hat man (94 und Fig.)

$$a\,.\,\text{Sin}\,B = h = b\,\text{Sin}\,A$$
$$c = x + y = b\,.\,\text{Cos}\,A + a\,.\,\text{Cos}\,B$$

und somit, da jede dieser Beziehungen verdreifacht werden kann, einerseits

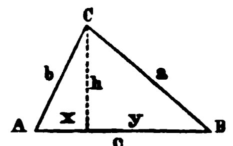
$$a : b : c :: \text{Sin}\,A : \text{Sin}\,B : \text{Sin}\,C \qquad \mathbf{1}$$

und anderseits

$$a = b\,\text{Cos}\,C + c\,\text{Cos}\,B,\ b = c\,\text{Cos}\,A + a\,\text{Cos}\,C,\ c = a\,\text{Cos}\,B + b\,\text{Cos}\,A \qquad \mathbf{2}$$

aus welchen Proportionen und Gleichheiten alle zur Berechnung des Dreiecks nöthigen Formeln abgeleitet werden können.

Die für die Uebersichtlichkeit der Formeln gar nicht unwichtige Uebung, die Seiten und Gegenwinkel durch entsprechende einzelne Buchstaben zu bezeichnen, und die goniometrischen Functionen direct in die Rechnung einzuführen, ist durch **Euler** beliebt worden, — ja man kann sagen, dass vor ihm unsere gegenwärtigen Formeln gar nicht existirten. — Speciell für Trigonometrie sind ausser manchen (z. B. in 100) schon genannten Schriften etwa noch Folgende zu vergleichen: „Nicolaus Koppernick oder **Copernicus** (Thorn 1473 — Frauenburg 1543; Domherr in Frauenburg; vergl. Westphal, Nic. Copernicus, Constanz 1822 in 8., — Czymski, Copernic et ses travaux, Paris 1847 in 8., — Prowe, Zur Biographie von Nic. Copernicus. Thorn 1853 in 8., — etc.), De lateribus et angulis triangulorum. Wittemberg 1542 in 4. (Deutsch von Menzzer, Halberstadt 1857 in 4.), — Willebrord **Snellius**, Doctrina triangulorum. Lugduni 1627 in 8., — Peter **Crüger** (Königsberg 1580 — Danzig 1639; Professor der Mathematik in Danzig und speciell Hevel's Lehrer), Praxis trigonometriæ logarithmicæ. Dantisci 1634 in 8. (Auch später, z. B. 1648), — Thom. **Simpson**, Trigonometry plane and spherical, with the construction of logarithms. London 1765 in 8., — Andrea **Cagnoli** (Zante 1743 — Verona 1816; Director der Sternwarte zu Mailand und Professor der Astronomie zu Modena; vergl. Carlini, Notizie sulla vita e sugli studii di A. Cagnoli, Modena 1819 in 4.), Trigonometria piana e sferica. Paris 1786 in 4. (2 ed. Bologna 1804; franz. durch Chompré, Paris 1786 und 1808), — **Lacroix**, Traité élémentaire de trigonométrie. Paris 1798 in 8. (8 ed. 1837; deutsch von Ideler, Berlin 1822), — Christoph Friedrich von **Pfleiderer** (Kirchheim 1736 — Tübingen 1821; Professor der Mathematik und Physik zu Warschau und Tübingen) und **Bohnenberger**, Ebene Trigonometrie, mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben. Tübingen 1802 in 8., — Christian Ludwig **Gerling** (Hamburg 1788; Professor der Mathematik und Astronomie zu Marburg), Grundriss der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Göttingen 1815 in 8., — F. R. **Hassler**, Elements of analytical Trigonometry. New-York 1826 in 8., — Georg Karl Justus **Ulrich** (Göttingen 1798; Professor der Mathematik zu Göttingen), Trigonometrie und Stereometrie. Göttingen 1828 in 8., — J. A. **Grunert**, Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig 1837 in 8. (Letztere auch speciell, Berlin 1833 in 4.), — Joseph **Dienger** (Hausen bei Breisach 1818; Professor der Mathematik zu Karlsruhe), Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Anwendungen. Stuttgart 1855 in 8., — W. **Brennecke**, Trigonometrie für das Bedürfniss höherer Lehranstalten. Berlin 1856 in 8., — etc."



104. Weitere Formeln. Aus 103 : 1 ergibt sich mit Hülfe von 98 : 4

$$(a+b):(a-b) = \mathrm{Tg}\,\frac{A+B}{2} : \mathrm{Tg}\,\frac{A-B}{2} \qquad \mathbf{1}$$

oder mit Benutzung von 98 : 1

$$\mathrm{Tg}\,\frac{A-B}{2} = \mathrm{Tg}\,(45^0 - \varphi)\,.\,\mathrm{Ctg}\,\frac{C}{2} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{b}{a} \qquad \mathbf{2}$$

Ferner folgt aus 103

$$\mathrm{Tg}\,A = \frac{h}{c-y} = \frac{a\,.\,\mathrm{Sin}\,B}{c - a\,.\,\mathrm{Cos}\,B} \qquad \mathbf{3}$$

und aus 103 : 2, wenn man die drei Gleichheiten der Reihe nach mit a, b, c multiplicirt, und die zwei letztern von der ersten abzieht (oder aus 93 : 3)

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,.\,\mathrm{Cos}\,A} \qquad \mathbf{4}$$

$$= \sqrt{(b+c+d)\,(b+c-d)} \qquad \text{wo} \qquad d = 2\sqrt{b\,c}\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{A}{2} \qquad \mathbf{5}$$

Aus 4 folgt

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{(b \pm c)^2 - a^2}{2\,b\,c} \mp 1 \qquad \mathbf{6}$$

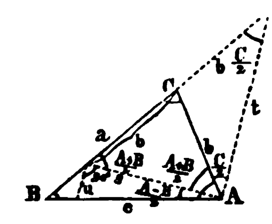
und somit (98), wenn $a + b + c = 2\,s$,

$$\mathrm{Sin}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}},\quad \mathrm{Cos}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\,c}},\quad \mathrm{Tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}} \qquad \mathbf{7}$$

$$\mathrm{Sin}\,A = \frac{2}{b\,c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,s-c)} \qquad \mathbf{8}$$

und so weiter.

Die Proportion 1, aus der sich 2 sofort ergibt, da $\frac{A+B}{2}$ und $\frac{C}{2}$ wegen der Winkelsumme des Dreiecks complementär sind, — kann auch, wie ich schon 1846 in Grunert's Archiv (Bd. 7) zeigte, so zu sagen unmittelbar der beistehenden Figur entnommen werden; dieselbe gibt nämlich



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{t}{u} = \frac{t:s}{u:s} = \frac{\mathrm{Tg}\,\frac{A+B}{2}}{\mathrm{Tg}\,\frac{A-B}{2}}$$

Aus derselben Figur folgen ferner

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\mathrm{Sin}\,(A + \frac{C}{2})}{\mathrm{Sin}\,\frac{C}{2}} = \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{A-B}{2}}{\mathrm{Sin}\,\frac{C}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}}{\mathrm{Sin}\,\frac{A+B}{2}} = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}}{\mathrm{Cos}\,\frac{C}{2}} \qquad \mathbf{9}$$

zwei Formeln, auf welche schon Karl Brandan **Mollweide** (Wolfenbüttel 1774 — Leipzig 1825; Professor der Mathematik in Halle und Leipzig) in Zach's monatlicher Correspondenz von 1808 aufmerksam machte, und welche gegenüber 1 dasselbe sind, was (161) die sog. Gauss'schen Formeln gegenüber

den Neper'schen Analogien. — Für die Formeln 3 und 4 genügen die im Texte gegebenen Andeutungen. Statt 4 kann man auch schreiben

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc - 2bc(1 + \operatorname{Cos} A)} = \sqrt{(b + c)^2 - 4bc \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2}}$$

woraus 5 leicht folgt. — Mit Hülfe von 96:5 und der sich aus 4 unmittelbar ergebenden 6 folgen

$$\operatorname{Sin} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} A}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(2s - 2c)(2s - 2b)}{4bc}}$$

$$\operatorname{Cos} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos} A}{2}} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2s \cdot (2s - 2a)}{4bc}}$$

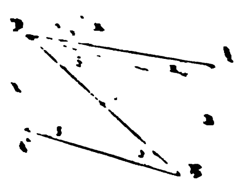
d. h. die zwei ersten Formeln 7; dividirt man sie durch einander, so erhält man die dritte 7, — multiplicirt man sie dagegen mit einander, so folgt mit Hülfe von 96:2 sofort 8. — Mit Hülfe von 103:2 erhält man

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= a(b \operatorname{Cos} C + c \operatorname{Cos} B) + b(a \operatorname{Cos} C + c \operatorname{Cos} A) + \\ &\quad + c(a \operatorname{Cos} B + b \operatorname{Cos} A) + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= 2[ab(1 + \operatorname{Cos} C) + ac(1 + \operatorname{Cos} B) + bc(1 + \operatorname{Cos} A)] \\ &= 4\left[ab \operatorname{Cos}^2 \frac{C}{2} + ac \operatorname{Cos}^2 \frac{B}{2} + bc \operatorname{Cos}^2 \frac{A}{2}\right] \qquad \mathbf{10}\end{aligned}$$

oder unter Benutzung von 96:2 und 103:1

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= 2\left[ab \operatorname{Sin} C \cdot \operatorname{Ctg} \frac{C}{2} + ac \operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Ctg} \frac{B}{2} + bc \operatorname{Sin} A \cdot \operatorname{Ctg} \frac{A}{2}\right] \\ &= 2bc \operatorname{Sin} A \left[\operatorname{Ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{Ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{Ctg} \frac{C}{2}\right] \qquad \mathbf{11}\end{aligned}$$

Als vorläufiges Beispiel einer Anwendung der obigen Formeln mag Folgendes dienen: Jean-Pierre **Pictet** (Genève 1739 — Genève 1781; Rechtsgelehrter und später Syndic von Genf) bestimmte 1769 in Umba, einem Dorfe in Lappland, wo er sich im Auftrage der russischen Regierung aufhielt, um den



Venusdurchgang (vergl. 356) zu beobachten, — die Höhe x seines Quadranten über dem benachbarten Meerbusen, indem er (vergl. „Collectio omnium observationum quae occasione transitus Veneris per Solem A. 1769 iussu augustae per Imperium Russicum institutae fuerunt. Petropoli 1770 in 4°, pag. 110) auf dem Eise des Letztern eine Basis $a = 3[illegible]$, und sodann von D aus die Depressionswinkel $\alpha = 4^\circ 1' 54''$, $\beta = 3^\circ 33' 3[illegible]''$ und den Horizontalwinkel $\gamma = 43^\circ 34'$ maass. Man hat nämlich nach 4

$$a^2 = CA^2 + CB^2 - 2 CA \cdot CB \operatorname{Cos} \gamma$$

während nach 34:2

$$CA = x \operatorname{Ctg} \alpha \qquad\qquad CB = x \operatorname{Ctg} \beta$$

also ist

$$a^2 = x^2 \operatorname{Ctg}^2 \alpha + x^2 \operatorname{Ctg}^2 \beta - 2x^2 \operatorname{Ctg} \alpha \operatorname{Ctg} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$

folglich kann man x nach

$$x = \frac{a}{\sqrt{Ctg^2\alpha + Ctg^2\beta - 2\,Ctg\,\alpha\,.\,Ctg\,\beta\,.\,Cos\,\gamma}} = \frac{a\,.\,Tg\,\alpha\,.\,Tg\,\beta}{\sqrt{Tg^2\alpha + Tg^2\beta - 2\,Tg\,\alpha\,.\,Tg\,\beta\,.\,Cos\,\gamma}} \qquad 12$$

berechnen, und diese Formel, welche auch noch (ganz entsprechend wie 4 in 5) umgestaltet werden könnte, ergibt für Pictet's Daten $x = 248',55$.

105. Die Berechnung der Dreiecksfläche. Bezeichnet F die Fläche des Dreiecks A B C (s. 103 Fig.), so ist (92, 104)

$$F = \frac{x\,.\,h}{2} + \frac{y\,.\,h}{2} = \frac{c\,.\,h}{2} \qquad 1$$

$$= \frac{b\,c}{2}\,.\,Sin\,A = c^2\,\frac{Sin\,A\,.\,Sin\,B}{2\,Sin\,C} \qquad 2$$

$$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \qquad 3$$

Letztere Formel kannten schon die Alten.

Da nach 103 und 104 : 8

$$h = b\,.\,Sin\,A \qquad b = c\,.\,Sin\,B : Sin\,C$$

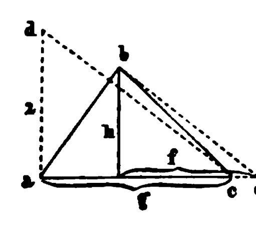
$$b\,c\,.\,Sin\,A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

so gehen die Formeln 2 und 3 sehr leicht successive aus 1 hervor. — Die Formel 3, welche schon der im 7. Jahrhundert lebende griechische Mathematiker **Hero** (der Jüngere genannt, zum Unterschiede von dem 277 erwähnten Hero) in seiner durch Francesco **Barozzi** (Venedig 1538 — Venedig 1587?; ein Edelmann) herausgegebenen „Geodaesia. Venet. 1572 in 4.", wenn auch ohne Beweis und natürlich noch in Form einer Regel, gab, — kann auch ohne Hülfe der Trigonometrie sehr leicht erhalten werden, da nach 93 : 2,3

$$h^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,c}\right)^2 = \frac{(2\,b\,c)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4\,c^2}$$

$$= \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4\,c^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4\,c^2}$$

$$= \frac{4\,s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{c^2}$$



erhalten wird, woraus mit Hülfe von 1 in der That sofort 3 folgt. — Beim sog. graphischen Rechnen (vergl. 89) kann man die Fläche eines gegebenen Dreiecks a b c auf folgende Weise bestimmen: Man zieht a d parallel zur Höhe h des Dreiecks, trägt darauf von a aus zwei Längeneinheiten ab, zieht d c und sodann b e ∥ d c; dann hat man

$$2 : g = h : f \qquad \text{oder} \qquad f = \frac{g\,h}{2}$$

also ist f die Fläche.

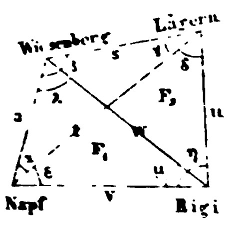
106. Die Trigonometrie. Sind in einem Dreiecke eine Seite und die Winkel gegeben, so kann man nach 103, — sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, nach 104 : 5 und 103, oder nach 104 : 2 und 103, — sind alle drei Seiten gegeben,

nach 104:7, je die übrigen Elemente, sowie nach 105 die Fläche berechnen.

Aus den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln ergibt sich als Werth einer Secunde in Einheiten der 7. Stelle:

bei	für Sinus	für Cosinus	für Tangens
0°	301030,0	0,0	301030,0
15	78,6	5,6	84,2
30	36,5	12,2	48,6
45	21,1	21,1	42,1
60	12,2	36,5	48,6
75	5,6	78,6	84,2
90	0,0	301030,0	301030,0

wo bei 0° und 90° der Werth einer Secunde bei 0° 0′ 10″ und 89° 59′ 50″ eingetragen wurde. Es geht hieraus namentlich hervor, dass bei der Tangente noch im ungünstigsten Falle, nämlich bei 45°, eine Secunde 42,1 Einheiten der 7-stelligen Mantisse entspricht, also eine Einheit der letztern nur 0″,024, — dass dagegen der Sinus nur für Winkel unter 30°, der Cosinus nur für Winkel über 60° eben so günstige Chancen zeigt, während ersterer gegen 90° hin, letzterer gegen 0° hin zur Bestimmung eines Winkels ganz unbrauchbar wird; daher der grosse Vorzug, welchen praktische Rechner den Tangentenformeln geben. — Als Rechnungsbeispiele mögen den von Johannes **Eschmann** (Wädenschweil 1808 — Zürich 1852; Ingenieur und Docent der Astronomie in Zürich; vergl. Bd. 2 meiner Biographieen) herausgegebenen „Ergebnissen der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz. Zürich 1840 in Fol." beistehende zwei Dreiecke entnommen werden, in denen successive aus



a, α, β, γ	die Grössen	s, t
$t, \delta, \varepsilon, \eta$		u, v
$a, v, (\alpha+\varepsilon)$		w, F_1
w, s, u		$\gamma+\delta, F_2$
$a, v, (\alpha+\varepsilon)$		x, μ, w

theils als wirklich Gesuchte, theils zur Probe zu berechnen sind, wofür nach 103:1; 104:5,7; 105:2,3 und 104:7 die Formeln

$$s = a\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\gamma} \qquad t = a\frac{\mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,\gamma} \qquad u = t\frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{\mathrm{Sin}\,\eta} \qquad v = t\frac{\mathrm{Sin}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,\eta}$$

$$w = \sqrt{(a+v+x)(a+v-x)} \qquad \text{wo} \qquad x = 2\sqrt{av}\,\mathrm{Cos}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}$$

$$\mathrm{Tg}\frac{\gamma+\delta}{2} = \sqrt{\frac{(y-s)(y-u)}{y(y-w)}} \qquad \text{wo} \qquad y = \frac{s+u+w}{2}$$

$$\mathrm{Tg}\frac{\mu-\lambda}{2} = \mathrm{Tg}(45-\varphi)\,\mathrm{Ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{v}{a}$$

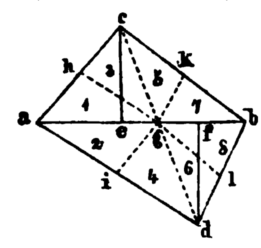
$$w = a\frac{\mathrm{Sin}(\alpha+\varepsilon)}{\mathrm{Sin}\,\mu}, \qquad \frac{\gamma+\delta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta+\eta}{2} + \frac{\lambda+\mu}{2}$$

$$F_1 = \frac{av}{2}\,\mathrm{Sin}(\alpha+\varepsilon) \qquad F_2 = \sqrt{y(y-s)(y-u)(y-w)}$$

$$F = F_1 + F_2 \qquad F = \tfrac{1}{2}\,t\,(a\,\mathrm{Sin}\,\alpha + v\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)$$

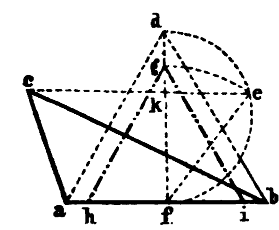
benutzt werden können. Gegeben sind

folgende Weise nachgewiesen werden: Legt man die beiden Dreiecke acb und adb mit ihrer gleichen Grundlinie an einander, so werden die Höhen ce = df, als senkrecht zu derselben Geraden, parallel, bestimmen daher mit der Verbindungslinie der Spitzen zwei congruente Dreiecke ceg und dgf; es ist daher cg = gd Zieht man nun durch g die Parallelen gh ∥ ad, gi ∥ ac, gl ∥ cb und gk ∥ db, so hat man (entsprechend 90) die Dreiecke 1, 3, 5, 7 der Reihe nach den Dreiecken 2, 4, 6, 8 congruent, also



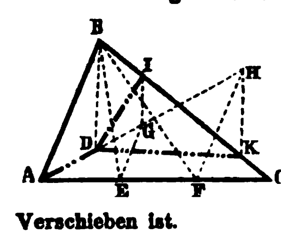
$$\triangle acb = 1 + 3 + 5 + 7 = 2 + 4 + 6 + 8 = \triangle adb$$

w. z. b. w. — Mit Hülfe des soeben neu bewiesenen Satzes lässt sich z. B. die Aufgabe lösen, ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, das mit einem gegebenen Dreiecke abc gleiche Fläche hat: Man verzeichne über ab ein gleichseitiges Dreieck abd, und über dessen Höhe df einen Halbkreis (der übrigens auch leicht entbehrt werden kann, wenn sich Jemand daran stossen sollte, in der Dreieckslehre einen Kreis zu finden), — ziehe ce ∥ ab, — trage fg = fe ab, und ziehe von g aus gh ∥ ad und gi ∥ db. Da $\triangle akb = \triangle acb$, so ist die Construction offenbar richtig, wenn gb ∥ ki, also entsprechend ag ∥ kh. Nun ist (91, 93) nach Construction wirklich



$$fg : fk = fe : fk = fd : fe = fd : fg = fb : fi$$

oder gb ∥ ki. — Ebenso lässt sich z. B. ein Dreieck ABC von einem Puncte D aus in drei gleiche Theile theilen, wie beistehende Figur zeigt, in der AE = EF = FC, EG ∥ AB ∥ FH, und endlich GI ∥ BD ∥ HK. Der Beweis braucht wohl kaum beigefügt zu werden, da die Construction eine unmittelbare Anwendung des Satzes vom Ecken-Verschieben ist.



108. Einige isoperimetrische Sätze. Haben zwei Dreiecke gleicher Basis gleichen Umfang, so entspricht (90) demjenigen, das den kleinsten und grössten Basiswinkel hat, die kleinere Höhe, und es hat somit auch die kleinere Fläche, während das gleichschenklige von allen solchen Dreiecken, das gleichseitige somit aber von allen isoperimetrischen Dreiecken überhaupt die grösste Fläche besitzt.

Für den Beweis der ersteren Theile des Satzes dürften die gegebenen Andeutungen genügen, — die Schlussbehauptung aber ist ohnehin schon in 63 strenge bewiesen worden. — Für Isoperimetrie überhaupt vergl. „Simon **Lhuilier**, De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, seu de maximis et minimis. Pars I. Varsoviæ 1782 in 4., und: Polygonométrie et abrégé d'isopèrimétrie élémentaire. Genève 1789 in 4., — Jak. **Steiner**, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Hauptsätze (Crelle 18), und: Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général (Crelle 24), — etc."

109. Die Transversalen. Jeder von drei Puncten einer Geraden bestimmt mit den beiden andern zwei Abschnitte, deren Summe oder Differenz ihre Distanz darstellt, je nachdem er zwischen ihnen (innerer Theilpunct), oder auf derselben Seite von beiden (äusserer Theilpunct) liegt. So z. B. bildet eine beliebige Gerade oder sog. **Transversale** auf den Seiten eines Dreiecks entweder zwei innere und einen äussern, oder drei äussere Theilpuncte, und in beiden Fällen werden die Producte der nicht an einander liegenden Abschnitte gleich, oder bilden (vergl. 116) eine sog. **Involution.**

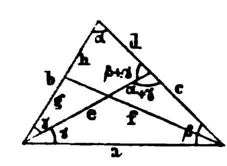
Dieser spätestens von dem um 80 n. Chr. in Rom lebenden, aber von Alexandrien stammenden Mathematiker und Astronomen **Menelaus** aufgefundene, in neuerer Zeit jedoch erst wieder seit **Carnot** zu Ehren gezogene, sog. Transversalensatz lässt sich leicht erweisen, wenn man durch eine Dreieckecke (z. B. a) eine Parallele (ag) zur Gegenseite (bc) zieht; denn man erhält aus den entstehenden ähnlichen Dreiecken die Proportionen

$$ag : be = ad : db$$
$$fa : ag = cf : ce$$

aus deren Multiplication $ad \cdot be \cdot cf = db \cdot ec \cdot fa$ sofort hervorgeht. Er lässt sich offenbar auch umkehren, d. h. wenn drei Puncte die Seiten eines Dreiecks so theilen, dass jene Involution besteht, so müssen die drei Puncte in einer Geraden liegen; ferner ist er auf jedes Vieleck ausdehnbar, und hat sogar (vergl. 1[illegible]) sein Analogon am sphärischen Dreiecke. Er ist überhaupt ein Fundamentalsatz, und wird im Folgenden manche Anwendung finden. Für mehreren Detail kann z. B. auf „Charles-Julien **Brianchon** (Sèvres 1785; Artillerieofficier), Application de la théorie des transversales. Paris 1818 in 8, — **Adams**, Die Lehre von den Transversalen. Winterthur 1843 in 8, — etc.“ verwiesen werden.

110. Einige weitere Sätze. Jede Gerade, welche durch eine Dreieckecke geht, theilt ([illegible]) die Gegenseite und eine zu ihr Parallele proportional, — und zwar ([illegible]), wenn sie den Dreieckswinkel halbirt, im Verhältnisse der einschliessenden Seiten. — Verbindet man die Mitte einer Dreieckseite mit der Gegenecke, so ist ([illegible]) die Quadratsumme der beiden andern Seiten gleich der doppelten Quadratsumme der Verbindungslinie und einer der Hälften. — Zieht man von den Dreieckecken durch einen Punct Gerade, so theilen sie ([illegible]) die Seiten so, dass die Producte der nicht an einander liegenden Abschnitte gleich werden. — Die Senkrechten von einem Puncte auf die Dreieckseiten theilen diese ([illegible]) so, dass die Quadratsummen der nicht an einander liegenden Abschnitte gleich werden.

Die [illegible] der ersten Hälfte des ersten Satzes geht aus der im Texte gegebenen Anmerkung hervor. [illegible] die zweite Hälfte zu beweisen, hat man [illegible], da die Dreiecke (a, [illegible]) und (b, [illegible]) einerseits einen gleichen



Winkel haben,

$$(a, e, c) : (b, e, d) = a . e : b . e = a : b$$

und, da sie anderseits gleiche Höhe besitzen,

$$(a, e, c) : (b, e, d) = c : d$$

also muss sich

$$a : b = c : d$$

verhalten, w. z. b. w. Da ferner (103, 98)

$$\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{e} - \frac{c}{e} \cdot \frac{d}{e} = \frac{\text{Sin}(\alpha+\gamma)}{\text{Sin}\,\beta} \cdot \frac{\text{Sin}(\beta+\gamma)}{\text{Sin}\,\alpha} - \frac{\text{Sin}\,\gamma}{\text{Sin}\,\beta} \cdot \frac{\text{Sin}\,\gamma}{\text{Sin}\,\alpha} =$$

$$= \frac{\text{Sin}^2(\alpha+\gamma) - \text{Sin}^2\gamma}{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta} = \frac{[\text{Sin}(\alpha+\gamma)+\text{Sin}\,\gamma][\text{Sin}(\alpha+\gamma)-\text{Sin}\,\gamma]}{\text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta} =$$

$$= \frac{4\,\text{Sin}\,\frac{\alpha+2\gamma}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\alpha}{2} \,.\, \text{Sin}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{Cos}\,\frac{\alpha+2\gamma}{2}}{\text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta} = 1$$

so hat man auch

$$a . b - c . d = e^2 \qquad \text{oder} \qquad a . b = c . d + e^2$$

d. h. es ist das Product zweier Dreiecksseiten gleich dem Producte der durch die Bissectrix ihres Winkels gebildeten Abschnitte mehr dem Quadrate dieser Bissectrix. Ist auch f die Bissectrix von β, so ist entsprechend $a(c+d) = g . h + f^2$ und da überdiess nach dem oben bewiesenen Satze

$$d : c = b : a \qquad \text{oder} \qquad d = \frac{b(d+c)}{a+b} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{a(d+c)}{a+b}$$

$$g : h = a : (c+d) \qquad \text{oder} \qquad g = \frac{a . b}{a+c+d} \qquad \text{und} \qquad h = \frac{b(d+c)}{a+c+d}$$

so folgt

$$a . b = c . d + e^2 = \frac{a\,b\,(c+d)^2}{(a+b)^2} + e^2 \quad \text{und} \quad a(c+d) = g . h + f^2 = \frac{a(c+d)\,b^2}{(a+c+d)^2} + f^2$$

Sollten in einem Dreieck $e = f$ sein, so müsste daher

$$a(b-c-d) = a\,b\,(c+d)\left[\frac{c+d}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a+c+d)^2}\right]$$

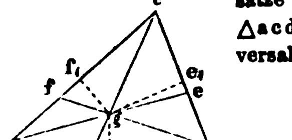
sein, was offenbar für $b = c + d$ statt hat. Wäre dagegen $b \gtrless (c+d)$, so wäre auch $a + b \gtrless (a+c+d)$, und es würde sich also aus obiger Gleichheit die Ungereimtheit $\pm = \mp$ ergeben. Es bedingt also $e = f$, wie ich schon 1843 (Grunert's Archiv III 445) zeigte, das Vorhandensein eines gleichschenkligen Dreieckes. — Der zweite Satz geht aus 93 : 3 hervor; denn aus

$$c_1^2 = a_1^2 + b^2 - 2\,a_1 . x \qquad \text{und} \qquad c_2^2 = a_2^2 + b^2 + 2\,a_2\,x$$

folgt, unter Voraussetzung von $a_1 = a_2$, durch Addition

$$c_1^2 + c_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

w. z. b. w. — Der dritte Satz, welcher durch Giovanni **Ceva** (Mailand 16.. — 17..; Commissar der erzherzoglichen Kammer zu Mantua und Bruder des Jesuiten Tommaso Ceva 1648—1737, der Professor der Mathematik zu Mailand war), dessen Namen er oft trägt, in seiner Schrift „De lineis se invicem secantibus. Mediolani 1678", und dann später wieder von Johannes **Bernoulli** (Opera IV 33) ausgesprochen wurde, geht sehr leicht aus dem Transversalensatze (109) hervor; schreibt man diesen nämlich für $\triangle acd$ mit Transversale bf, sowie für $\triangle bcd$ mit Transversale ae auf, so erhält man



$$ab . dg . cf = bd . gc . fa \qquad 1$$

$$da . be . cg = ab . ec . gd \qquad 2$$

$$\overline{ad . be . cf = db . ec . fa} \; \times \qquad 3$$

w. z. b. w. Verhält sich $ad:db = m:n$ und $be:ce = o:m$, so muss sich nach 3 nothwendig auch $cf:fa = n:o$ verhalten, und aus 1 folgt sodann

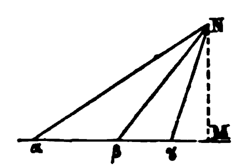
$$\frac{cg}{dg} = \frac{ab}{bd} \cdot \frac{cf}{fa} = \frac{m+n}{n} \cdot \frac{n}{o} = \frac{m+n}{o} \qquad 4$$

Aus derselben Figur ergibt sich nach 98, dass

$$\begin{aligned} a d_1^2 + d_1 g^2 &= a g^2 = f_1 a^2 + f_1 g^2 \\ f_1 g^2 + c f_1^2 &= c g^2 = e_1 c^2 + e_1 g^2 \\ e_1 g^2 + b e_1^2 &= b g^2 = d_1 b^2 + d_1 g^2 \end{aligned} \quad +$$

$$a d_1^2 + b e_1^2 + c f_1^2 = d_1 b^2 + e_1 c^2 + f_1 a^2 \qquad 5$$

womit auch noch der vierte Satz erwiesen ist. — Mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes findet man ferner, dass, wenn α, β, γ irgend welche Puncte einer Geraden, und M die Projection eines äussern Punctes N auf dieselbe,



$$N\alpha^2 . \beta\gamma + N\gamma^2 . \alpha\beta =$$
$$(M\alpha^2 + NM^2)\beta\gamma + (M\gamma^2 + NM^2)\alpha\beta =$$
$$M\alpha(M\beta + \alpha\beta)\beta\gamma + M\gamma(M\beta - \beta\gamma)\alpha\beta + NM^2 . \alpha\gamma$$

Nun ist aber offenbar

$$M\alpha . \beta\gamma + M\gamma . \alpha\beta = (M\beta + \alpha\beta)\beta\gamma + (M\beta - \beta\gamma)\alpha\beta = M\beta . \alpha\gamma \qquad 6$$

also hat man

$$N\alpha^2.\beta\gamma + N\gamma^2.\alpha\beta = M\beta^2.\alpha\gamma + \alpha\gamma.\alpha\beta.\beta\gamma + NM^2.\alpha\gamma = N\beta^2.\alpha\gamma + \alpha\beta.\alpha\gamma.\beta\gamma \qquad 7$$

d. h. den sog. Satz von **Stewart**, welcher auch als eine Erweiterung des obigen zweiten Satzes betrachtet werden kann, da dieser aus ihm für $\alpha\beta = \beta\gamma$ sofort hervorgeht.

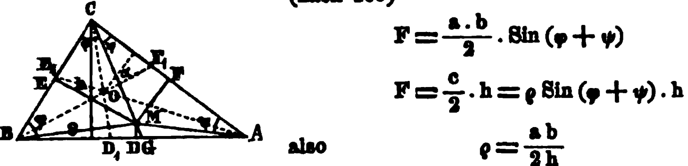
111. Das Centrum der Ecken und das Centrum der Seiten. Die in den Mitten der Dreiecksseiten errichteten Senkrechten schneiden sich (110) in Einem Puncte, der von allen Ecken gleich weit, nämlich um den sog. **Radius** (ϱ), absteht, daher **Centrum der Ecken** heisst, und (83) überdiess die Eigenschaft besitzt, dass von ihm aus jede Seite unter doppelt so grossem Winkel erscheint als von der Gegenecke aus. Da ferner ein von beiden Schenkeln eines Winkels equidistanter Punct (91) in seiner Bissectrix liegt, und jeder in der Bissectrix liegende Punct equidistant ist, so fällt der Durchschnittspunct der Bissectrissen zweier Dreieckswinkel auch in die Bissectrix des dritten, und dieser von allen Seiten gleich weit, nämlich um das sog. **Apothema** (α), abstehende Punct, heisst **Centrum der Seiten.** Hat das Dreieck die Seiten a, b, c und ist h die der Seite c entsprechende Höhe, so findet man (94, 105) leicht, dass

$$\varrho = \frac{ab}{2h} \qquad \text{und} \qquad \alpha = \frac{ch}{a+b+c}$$

zu setzen sind.

Schneiden sich die in den Mitten D und E der Dreiecksseiten $AB = c$ und $BC = a$ errichteten Senkrechten in M, und fällt man von M die Senkrechte MF auf die dritte Seite $AC = b$, so muss nach 110:5 auch F in der Mitte von AC liegen, und M hat (nach 84) von allen Ecken denselben Abstand ϱ,

oder ist Centrum der Ecken. Da ferner (nach 83) $\angle BMG = 2\varphi$ und $\angle GMA = 2\psi$, so ist $\angle BMA = 2(\varphi + \psi) = 2 . \angle BCA$. Endlich folgt (nach 105)



$$F = \frac{a . b}{2} . \operatorname{Sin}(\varphi + \psi)$$

$$F = \frac{c}{2} . h = \varrho \operatorname{Sin}(\varphi + \psi) . h$$

also

$$\varrho = \frac{ab}{2h}$$

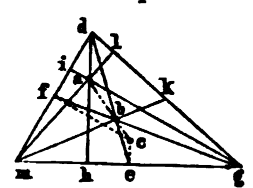
w. z. b. w. — Dass sich die Bissectrissen der Dreieckswinkel in Einem, von allen Seiten equidistanten Puncte O, dem Centrum der Seiten, schneiden, kann wie im Texte erwiesen werden, — oder auch, unter Annahme, dass z. B. CD_1 und AE_1 Bissectrissen seien und BF_1 durch ihren Schnittpunct O gezogen werde, nach 110:3 und dem zweiten Theile des ersten Satzes von 110. Endlich folgt

$$F = \frac{ch}{2} \quad \text{und} \quad F = \frac{a\alpha}{2} + \frac{b\alpha}{2} + \frac{c\alpha}{2} \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{ch}{a + b + c}$$

wie zu beweisen war.

112. Der Schwerpunct und der Höhenpunct. — Die von den Dreiecksecken nach den Mitten der Gegenseiten gehenden Geraden schneiden sich (110) in Einem Puncte, dem sog. **Schwerpuncte,** der (89) von jeder Ecke um $^2/_3$ der Verbindungslinie absteht. Ebenso treffen sich (110) die drei Höhen eines Dreiecks in Einem Puncte, dem sog. **Höhenpuncte,** und verbindet man diesen Letztern mit dem Centrum der Ecken, und theilt die Verbindungslinie in drei gleiche Theile, so fällt, wie Euler zuerst zeigte, der zweite Theilpunct mit dem Schwerpuncte zusammen.

Dass sich sowohl die von den Dreiecksecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Geraden, als die drei Höhen, je in Einem Puncte schneiden, lässt sich entsprechend den im vorigen Satze durchgeführten Beweisen nach 110:3, 5 zeigen. Ersteres braucht kaum weiter ausgeführt zu werden, und dass $db : be = 2 : 1$ oder also $db : de = 2 : 3$ und ebenso $gb : bf = 2 : 1$ folgt ebenfalls unmittelbar aus 110:4. Für Letzteres kann man folgenden Gang einschlagen: Ist der Höhenpunct a durch $gi \perp md$ und $ml \perp dg$ gefunden, und trifft die von ihm auf mg gezogene Senkrechte in h_1 auf, so hat man nach 110:5



$$m i^2 + d l^2 + g h_1{}^2 = i d^2 + l g^2 + h_1 m^2$$

oder, wenn man auf beiden Seiten $i g^2 + m l^2$ mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes addirt

$$m g^2 + m d^2 + g h_1{}^2 = d g^2 + m g^2 + h_1 m^2 \quad \text{oder} \quad g h_1{}^2 - h_1 m^2 = d g^2 - m d^2$$

Fällt aber die Senkrechte von d auf mg in h_2 ein, so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$d g^2 - g h_2{}^2 = m d^2 - h_2 m^2 \qquad \text{oder} \qquad g h_2{}^2 - h_2 m^2 = d g^2 - m d^2$$

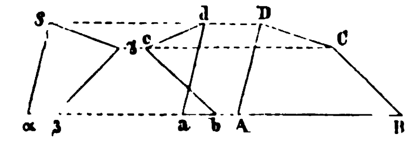
also muss

$g h_1^2 - h_1 m^2 = g h_2^2 - h_2 m^2$ oder $g h_1 - h_1 m = g h_2 - h_2 m$ sein, was nur möglich ist, wenn h_1 und h_2 zusammenfallen. — Um endlich den von **Euler** (Novi Comment. Petrop. XI) ausgesprochenen merkwürdigen Satz zu erweisen, verlängere man ab über b hinaus um $bc = \frac{1}{2} ab$, und verbinde den so erhaltenen Punct c mit e und f: dann ist offenbar $\triangle bce \backsim \triangle adb$ und $\triangle bcf \backsim \triangle abg$, also $ce \parallel dh$ und $fc \parallel gi$, also e nothwendig Centrum der Ecken, w. z. b. w.

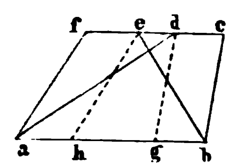
XIII. Das Viereck und Vieleck.

113. Das Viereck. Das Viereck ist (81) der zwei gemeinen Formen (0,1) und (1,2) mit der Winkelsumme 4 R, und der überschlagenen Form (2,2) mit der Winkelsumme 8 R fähig. Für Congruenz und Aehnlichkeit vergl. 82, — für die Fläche im Allgemeinen 117. Speciell für das gemeine Viereck ist Letztere (107) gleich dem halben Producte einer Diagonale in die Summe der Entfernungen der Gegenecken von derselben, — oder gleich dem halben Producte beider Diagonalen in den Sinus ihres Winkels. — Ein gemeines Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten (Basen) heisst **Trapez**, und seine Fläche ist gleich ihrem arithmetischen Mittel multiplicirt mit ihrem Abstande. Werden auch noch die beiden andern Seiten (Schenkel) parallel, und daher (89) jede zwei Gegenseiten gleich, so hat man ein **Parallelogramm** oder **Zeileck**; jede seiner Diagonalen hälftet dasselbe und die andere Diagonale, — seine Nebenwinkel sind supplementär, seine Gegenwinkel gleich, — und seine Fläche ist gleich dem Producte einer Seite (Grundlinie) in ihre Entfernung von der Gegenseite (Höhe). — Ein gleichseitiges Parallelogramm heisst **Rhombus**, ein gleichwinkliges **Rechteck**, ein gleichseitig-gleichwinkliges **Quadrat**. Die Fläche des Quadrates ist gleich der zweiten Potenz einer Seite, — im Rhombus aber halbiren die Diagonalen die Winkel, und stehen zu einander senkrecht.

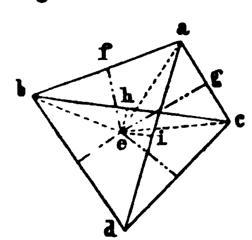
Sehr häufig findet man angegeben, es seien zwei Vierecke auch congruent, wenn sie 4 Seiten und einen Winkel, oder wenn sie 3 Seiten und die der 4. Seite anliegenden zwei Winkel gleich haben. Es können jedoch diese Sätze schon durch blosse Anschauung zurückgewiesen werden; denn die Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$ und abcd haben die Seiten $\alpha\delta = ad$, $\delta\gamma = dc$, $\gamma\beta = cb$, $\beta\alpha = ba$ und die Winkel $\alpha = a$, — und ebenso haben die Vierecke abcd und ABCD die Winkel $a = A$, $b = B$, und die Seiten $ad = AD$, $dc = DC$, $cb = CB$,



wie es jene Sätze fordern, und sind doch nichts weniger als congruent. Es sind also jene Sätze nicht allgemein, sondern nur bedingt richtig. — Von



allen Trapezen, die gleiche Höhe und gleiche Basen haben, besitzt das gleichschenklige den kleinsten Umfang; denn zieht man dg ‖ cb und eh ‖ af, so haben die Dreiecke adg und heb bei gleicher Basis gleiche Höhe, also ist (90) $he + eb < ad + dg$. — Zieht man in einem Vierecke zu jeder Diagonale eine Parallele durch die Mitte der andern, und verbindet den Durchschnittspunct der Parallelen mit den Mitten der Seiten, so zerfällt das Viereck in 4 gleiche Theile. So z. B. ist



$$afeg = \tfrac{1}{2}(abe + aec) = \tfrac{1}{2}(abc + bec) = \tfrac{1}{2}(abc + bic) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(abi + aic) = \frac{1}{4}(abd + acd)$$

w. z. b. w. Es soll dieser Satz zuerst von **Brune** (Crelle 22) mitgetheilt worden sein. — Hälftet man die Seiten eines Vierecks, und verbindet je die Mitten zweier Nebenseiten durch Gerade, so ist offenbar das so entstehende Viereck ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des erzeugenden Vierecks und gleich ihren Hälften sind. Mit Benutzung hiervon hat man aber nach 104:4

$$g^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2.\frac{e}{2}.\frac{f}{2}.\mathrm{Cos}\,\psi$$
$$h^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2.\frac{e}{2}.\frac{f}{2}.\mathrm{Cos}(180^0 - \psi)$$
$$+$$
$$g^2 + h^2 = 2.\left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(e^2 + f^2)$$

oder: In jedem Vierecke ist die Quadratsumme der die Mitten der Gegenseiten verbindenden Geraden gleich der Hälfte der Quadratsumme der Diagonalen. — Nach derselben Formel hat man ferner

$$a^2 = (\frac{e}{2} + y)^2 + (\frac{f}{2} - x)^2 - 2(\frac{e}{2} + y)(\frac{f}{2} - x)\,\mathrm{Cos}\,(180 - \varphi)$$
$$b^2 = (\frac{e}{2} - y)^2 + (\frac{f}{2} - x)^2 - 2(\frac{e}{2} - y)(\frac{f}{2} - x)\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$c^2 = (\frac{e}{2} - y)^2 + (\frac{f}{2} + x)^2 - 2(\frac{e}{2} - y)(\frac{f}{2} + x)\,\mathrm{Cos}\,(180 - \varphi)$$
$$d^2 = (\frac{e}{2} + y)^2 + (\frac{f}{2} + x)^2 - 2(\frac{e}{2} + y)(\frac{f}{2} + x)\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

also durch Addition

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4(y^2 + x^2 - 2xy\,\mathrm{Cos}\,\varphi) = e^2 + f^2 + 4i^2$$

oder: Die Quadratsumme der Seiten eines Vierecks ist gleich der Quadratsumme seiner Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat der die Mitten der Diagonalen verbindenden Geraden. Aus diesem, schon von **Euler** ausgesprochenen Satze, folgt für das Parallelogramm, wo $i = 0$ ist, speciell: In jedem Parallelogramme ist die Quadratsumme der Seiten gleich der Quadratsumme der Diagonalen.

114. Die Tetragonometrie. Statt analog der Trigonometrie eine eigene Tetragonometrie aufzustellen, lassen sich die Aufgaben am Vierecke bequemer mit Hülfe der erstern auflösen. Sind z. B. die

Winkel α, β, γ, δ bekannt, so erhält man (vergl. Fig., sowie 103; 104:5) um b aus a, oder a aus b zu bestimmen:

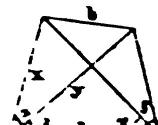
$$b = a\sqrt{(f+g+h)\,(f+g-h)} \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$f = \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)} \qquad g = \frac{\operatorname{Sin}\delta}{\operatorname{Sin}(\beta+\delta)} \qquad h = 2\sqrt{fg}\operatorname{Cos}\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \mathbf{2}$$

angenommen wurden.

Nach 103 und 104:5 erhält man zunächst aus der Figur



$$x : a = \operatorname{Sin}\gamma : \operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)$$
$$y : a = \operatorname{Sin}\delta : \operatorname{Sin}(\beta+\delta)$$
$$b = \sqrt{(x+y+d)\,(x+y-d)}$$

wo

$$d = 2\sqrt{xy}\operatorname{Cos}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und hieraus durch Einführung der Hülfsgrössen 2 sofort 1. — Für eine andere betreffende Aufgabe, die sog. Pothenot'sche, vergl. 217. — Vergl. auch „St. Biörnsen, Introductio in tetragonometriam. Hafniae 1780 in 8."

115. Einige Eigenschaften des Parallelogrammes. Verlängert man zwei Nebenseiten eines Parallelogrammes so, dass die Endpuncte mit der Gegenecke eine Gerade bilden (s. Fig. 1), und hält den einen Endpunct (a) als Pol fest, so beschreiben (83, 89) die Ecke (c) und der andere Endpunct (b) ähnliche Wege, indem $bb' \parallel cc'$ und $bb' : cc' = ba : ca$. Es beruht hierauf der sog. **Storchschnabel** oder **Pantograph.** — Construirt man über zwei Seiten eines Dreiecks Parallelogramme (s. Fig. 2), und verlegt die Verbindungslinie (a) des Durchschnittspunctes der Gegenseiten und der gemeinschaftlichen Ecke an die dritte Seite, so bestimmt sie (113) mit ihr ein Summenparallelogramm. Sind speciell jene Seiten Katheten und die Parallelogramme Quadrate, so erhält auch das Summenparallelogramm über der Hypotenuse diese letztere zur Höhe, so dass auf diese Weise der sog. pythagoräische Lehrsatz (93) neuerdings erwiesen wird.

Wenn b e a gerade ist, so verhält sich

$$be : ec = bd : da$$

also verhält sich auch

$$b'e' : e'c' = b'd' : d'a$$

folglich ist b'e'a auch gerade. Somit hat man

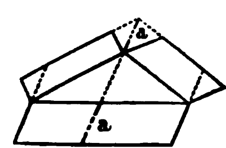
$$bc : ba = be : bd = b'e' : b'd' = b'c' : b'a$$

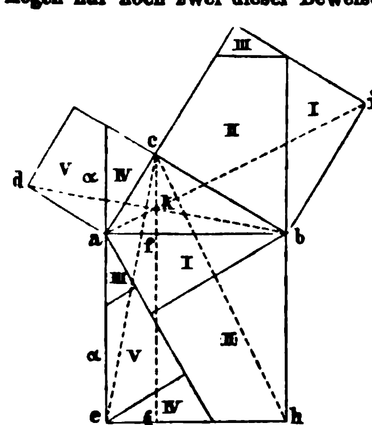
oder es ist $cc' \parallel bb'$. Endlich hat man

$$bb' : cc' = ba : ca = bd : cd = da : fa$$

u. s. w. Um letztere Verhältnisse beliebig abändern zu können, sind gewöhnlich die Stäbe bd, da, ec und cf mit einer Reihe equidistanter Löcher versehen, in welche bei e und f Stifte gesteckt werden. Oft wählt man auch den Punct c als Pol, in welchem Falle sodann a und b ähnliche Wege beschreiben. Die Idee dieses zur Vergängung von Silhouetten,

Plänen, etc. sehr bequemen Instrumentes gab etwa 1603 der Jesuit Christoph **Scheiner** (Walda in Schwaben 1575 — Neisse 1650; Professor der Mathematik zu Freiburg i. B. und Ingolstadt, zuletzt Rector des Jesuitencollegiums zu Neisse); auch beschrieb er dasselbe später in einer eigenen Schrift „Pantographice seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum, mobile. Romæ 1631 in 4.“ Seither ist der ursprünglich nur aus hölzernen Stäben bestehende Pantograph vielfach umgestaltet worden, wofür z. B. „Georg Friedrich **Parrot** (Mömpelgard 1767 — Helsingfors 1852; Professor der Physik zu Dorpat und später Academiker in Petersburg), Description d'un nouveau pantographe (Mém. de Pétersb. 1831), — D. **Kuen**, Abbildung zweier vervollkommneter Pantographen. Quedlinburg 1856 in 8., — etc.“ verglichen werden können. — Für den Beweis des Satzes vom Summenparallelogramm genügt wohl ein Blick auf die beistehende Figur. Für den sog. pythagoräischen Lehrsatz, dessen Erfindung **Pythagoras** nach einer zwar wohl (vergl. 93) irrigen Sage mit einem Opfer von hundert Ochsen feierte, so dass (nach Lichtenberg) seit dieser Zeit bei jeder grossen Erfindung alle Ochsen zittern, — hat man nach und nach alle möglichen Beweise aufgestellt, wofür z. B. auf „Joh. Joseph Ignatz **Hoffmann** (Mainz 1777; Professor der Mathematik und Physik zu Aschaffenburg), Der pythagoräische Lehrsatz mit 32 Beweisen. Mainz 1819 in 4. (2. A. 1821)“ verwiesen werden kann. Hier mögen nur noch zwei dieser Beweise gegeben werden, die beide das gemeinschaftliche haben, dass die Quadrate der Seiten des rechtwinkligen Dreieckes wirklich dargestellt sind: Bei dem Einen, durch ganze Linien angedeuteten Beweise sind die drei Quadrate so in Stücke zerlegt, dass die mit gleichen Nummern versehenen Theile, wie man ohne Mühe nachweisen kann, congruent sind. — Bei dem Andern, durch punctirte Linien angedeuteten und schon von **Euklid** gegebenen Beweise ist zu zeigen, dass b a d ≅ c a e und b a i ≅ c b h, und dass je die ersten Dreiecke die Hälften der Kathetenquadrate, die zweiten aber die Hälften der Rechtecke a f g e und b f g h sind, in welche das Hypotenusenquadrat durch die zur Hypotenuse Senkrechte e g zerfällt wird. Dass sich die Hülfslinien a i, b d und c g wirklich in Einem Puncte k schneiden, kann (vergl. Grunert's Archiv IV 112) leicht nachgewiesen werden.



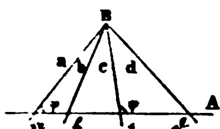


116. Das Vierseit und die harmonische Theilung. Sind (s. Fig. 1) 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 vier Puncte einer Geraden A, und a, b, c, d die von einem Puncte B nach ihnen führenden Strahlen, so findet man (103) die Proportion

$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{dc}} = \frac{\text{Sin}\,(a, b)}{\text{Sin}\,(b, c)} : \frac{\text{Sin}\,(a, d)}{\text{Sin}\,(d, c)} \qquad 1$$

so dass, wenn die einen 4 Elemente sich gleich bleiben, auch das den andern entsprechende Doppelverhältniss gleich bleibt. Werden die Doppelverhältnisse, wie z. B. für $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \infty$, oder für $(a, b) = (b, c)$ und $(b, d) = 90^0$ gleich der Einheit, so heissen die Puncte und Strahlen **harmonisch**, und entsprechend heisst eine durch einen innern und äussern Theilpunct in gleichem Verhältnisse getheilte Distanz **harmonisch getheilt.** So z. B. wird (109) jede der drei Diagonalen eines Vierseits (s. Fig. 2; z. B. a c) durch die beiden übrigen (g e und h i) in gleichem Verhältnisse (a b : b c = a d : d c) oder harmonisch geschnitten. Allgemeiner steht das Punctenpaar, in welchem zwei Diagonalen eine Transversale schneiden, zu den zwei Punctenpaaren, welche die von den beiden übrigen Ecken ausgehenden Seiten auf derselben bilden, in **Involution.**

Die wechselseitigen Beziehungen, welche (76) zwischen den Elementen einer Geraden und eines Strahlenbüschel's bestehen, können offenbar festgehalten werden, wenn wir die beiden Gebilde aus ihrer ursprünglichen oder sog. **perspectivischen** Lage in eine andere gegenseitige, eine sog. **schiefe** Lage versetzen, — nur lässt sich in letzterm Falle (wo nun eben nicht mehr jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punct geht) zu einem Elemente des einen Gebildes das ihm entsprechende Element des andern Gebildes nicht mehr unmittelbar finden, wohl aber mit Hülfe der durch Multiplication der Proportionen



$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{b} &= \text{Sin}\,(a, b) : \text{Sin}\,\varphi \\ b : \mathfrak{b}\mathfrak{c} &= \text{Sin}\,\varphi : \text{Sin}\,(b, c) \\ d : \mathfrak{a}\mathfrak{d} &= \text{Sin}\,\varphi : \text{Sin}\,(a, d) \\ \mathfrak{c}\mathfrak{d} : d &= \text{Sin}\,(c, d) : \text{Sin}\,\varphi \end{aligned}$$

entstehenden Proportion 1, welche das Wesen dieser gegenseitigen Beziehung oder sog. **Projectivität** der beiden Gebilde in sich fasst. Sie zeigt uns nämlich, dass, wenn man sich irgend drei Elementenpaare: $\mathfrak{a}a$, $\mathfrak{b}b$, $\mathfrak{c}c$ entsprechen lässt, zu jedem vierten Elemente $\mathfrak{d}$ oder d des einen Gebildes das ihm entsprechende vierte Element d oder $\mathfrak{d}$ des andern Gebildes gefunden werden kann; denn setzen wir

$$p = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.\,\text{Sin}\,(c, b)\,.\,\text{Sin}\,(a, d)}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,.\,\text{Sin}\,(c, d)\ \text{Sin}\,(a, b)} \qquad q = \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,.\,\text{Sin}\,(a, b)}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.\,\text{Sin}\,(c, b)} \tag{2}$$

so dass im erstern Falle q, im zweiten p nur bekannte Grössen enthält, so folgen aus 1

$$p = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{c}\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{p - 1}$$

$$q = \frac{\text{Sin}\,(a, d)}{\text{Sin}\,(c, d)} = \frac{\text{Sin}\,[(a, c) + (c, d)]}{\text{Sin}\,(c, d)} \qquad \text{Ctg}\,(c, d) = \frac{q - \text{Cos}\,(a, c)}{\text{Sin}\,(a, c)} \tag{3}$$

Ferner zeigt uns 1, dass immer zwei Elemente jedes Gebildes auf gleiche Weise vorkommen: $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$, a und c, b und d. Man nennt solche Elemente sich **zugeordnet**, und es sind daher die entsprechenden Elemente von zugeordneten Elementen ebenfalls einander zugeordnet. Da endlich jene Proportion keine Grösse enthält, welche die gegenseitige Lage der beiden Gebilde bestimmt, und kein Verhältniss einer Proportion gleich bleiben kann,

ohne dass das andere auch gleich bleibe, so haben wir den merkwürdigen, schon im Texte angedeuteten und von **Steiner** zuerst ausgesprochenen Doppelsatz: Wenn die vier Strahlen a, b, c, d ihre gegenseitige Lage nicht verändern, so schneiden sie jede Transversale so in vier Puncten, dass ein gewisses Doppelverhältniss ihrer Entfernungen unverändert bleibt, — wenn dagegen die vier Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ihre Lage nicht verändern, so bilden jede vier Strahlen eines Büschels, welche durch diese Puncte gehen, solche Winkel mit einander, dass ein gewisses Doppelverhältniss ihrer Sinuszahlen unverändert bleibt. — Von diesem Satze, dessen ersten Theil allerdings **Pappos** schon kannte, wollen wir auf den uns vorzüglich wichtigen speciellen Fall übergehen, wo das Doppelverhältniss der Distanzen

$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{ad}} : \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{cd}} = 1 \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{ad} : \mathfrak{ab} = \mathfrak{ad} - \mathfrak{ac} : \mathfrak{ac} - \mathfrak{ab} \qquad 4$$

wird, also die Distanzen der 4 Puncte eine harmonische Proportion eingehen, um deren willen die Puncte selbst **harmonische Puncte** heissen, während man das für sie speciell gleich der Einheit werdende Doppelverhältniss im Allgemeinen das **anharmonische Verhältniss** genannt hat. Gleichzeitig wird auch das Doppelverhältniss der Sinuszahlen

$$\frac{\text{Sin}\,(a, b)}{\text{Sin}\,(a, d)} : \frac{\text{Sin}\,(c, b)}{\text{Sin}\,(c, d)} = 1 \qquad 5$$

Die Strahlen erhalten entsprechend den Namen **harmonische Strahlen.** — 2 und 3 ziehen sich in

$$\mathfrak{cd} = \frac{\mathfrak{ac} \cdot \mathfrak{cb}}{\mathfrak{ab} - \mathfrak{cb}} \qquad \text{Tg}\,(c, d) = \frac{\text{Sin}\,(a, c) \cdot \text{Sin}\,(c, b)}{\text{Sin}\,(a, b) - \text{Sin}\,(c, b) \cdot \text{Cos}\,(a, c)} \qquad 6$$

zusammen, und der obige Doppelsatz kann jetzt folgendermassen ausgesprochen werden: Jede vier harmonischen Strahlen schneiden jede Transversale harmonisch, — und wenn irgend ein Punct mit vier harmonischen Puncten verbunden wird, so entstehen dadurch vier harmonische Strahlen. — Setzen wir $\mathfrak{ab} = \frac{\mathfrak{ac}}{2} + \delta$, so folgt nach 6

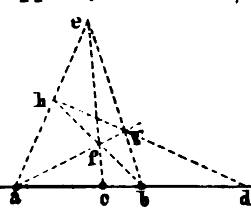
$$\mathfrak{cd} = \frac{\mathfrak{ac}\,(\mathfrak{ac} - 2\,\delta)}{4\,\delta} \qquad 7$$

und hieraus ergibt sich für $\delta = \frac{1}{2}\,\mathfrak{ac}$ sofort $\mathfrak{cd} = 0$ und $\mathfrak{bc} = 0$, — für $\delta = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{ac}$ dagegen $\mathfrak{cd} = -\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{ab} = 0$. Wenn daher ein Punct $\mathfrak{b}$ mit einem der einander zugeordneten Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenfällt, so fällt auch der ihm zugeordnete vierte harmonische Punct $\mathfrak{d}$ mit demselben zusammen. Setzen wir endlich $\delta = 0$, so wird $\mathfrak{cd} = \infty$ und $\mathfrak{ab} = \frac{\mathfrak{ac}}{2} = \mathfrak{bc}$. Wenn daher ein Punct $\mathfrak{b}$ die Distanz zweier zugeordneten Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ hälftet, so liegt der ihm zugeordnete vierte harmonische Punct $\mathfrak{d}$ im Unendlichen. Verbindet man somit eine Dreiecksecke mit der Mitte der Gegenseite, und zieht durch die Ecke eine Parallele zur Letztern, so bilden diese beiden Linien mit den zwei übrigen Dreiecksseiten vier harmonische Strahlen. — Aus 6 folgt

$$\text{Tg}\,(b, d) = \text{Tg}\,[(b, c) + (c, d)] = \frac{2\,\text{Sin}\,(a, b) \cdot \text{Sin}\,(b, c)}{\text{Sin}\,[(a, b) - (b, c)]} \qquad 8$$

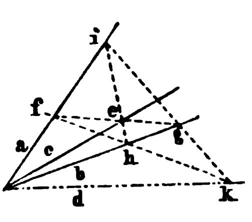
Setzen wir hier $(a, b) = (b, c)$, so folgt $(b, d) = 90^{\circ}$. Wenn somit ein Strahl b den Winkel zweier einander zugeordneter Strahlen a und c hälftet, so steht der ihm zugeordnete vierte harmonische Strahl d zu ihm senkrecht. — Schreibt man den Transversalensatz (109) für die Dreiecke $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{agc}$, $\mathfrak{bgc}$

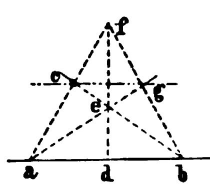
und die Transversalen gb, hd, ai auf, so erhält man die Gleichheiten

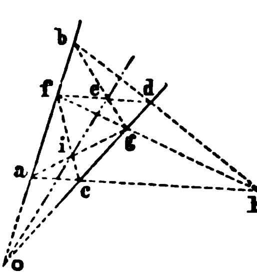


$$ab \cdot ce \cdot hg = bc \cdot eh \cdot ga$$
$$cd \cdot ah \cdot gi = da \cdot hg \cdot ic$$
$$ga \cdot he \cdot ci = ah \cdot ec \cdot ig$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \times$$
$$ab \cdot cd = bc \cdot ga \qquad 9$$

w. z. b. w. Auf diesen merkwürdigen Satz, zu welchem man schon in den Sammlungen von **Pappes** (Lib. VII, prop. 131) ein Analogon findet, hat **Steiner** in seinen „Geometrischen Constructionen. Berlin 1833 in 8." die Lösung mehrerer Aufgaben durch blosse Anwendung des Lineals gegründet: Soll zu den drei Puncten a, b, c der c zugeordnete vierte harmonische Punct d gefunden werden, so zieht man ae, ag und cf beliebig, — sodann bf und be, — endlich hg, welche in dem gesuchten Puncte d einschneidet. — Soll zu drei Strahlen a, b, c der c zugeordnete vierte harmonische Strahl d gefunden werden, so zieht man durch einen beliebigen Punct e in c zwei Beliebige fg und hi, — dann die Verbindungslinien fh und ig, die sich in k schneiden, und damit d bestimmen. — Soll zu der Geraden ab durch c eine Parallele gezogen werden, so trägt man auf ab irgend zwei gleiche Distanzen ad = db ab, — zieht ac und bc, — von a aus die Beliebige ae, — dann de und endlich bf, welche ae in dem Puncte g schneidet, der mit c die Parallele bestimmt. — Soll durch einen Punct e eine Gerade ei gezogen werden, welche mit zwei gegebenen Geraden ab und cd in demselben unzugänglichen Puncte o zusammentrifft, so ziehe man durch e zwei Beliebige bg und df, — von dem dadurch bestimmten h die Beliebige ha, — endlich fc und ag, welche sich in dem Puncte i schneiden, der mit e die verlangte Gerade bestimmt. — Etc. — Die von h (Fig. 2) ausgehenden 4 Strahlen ha', ha'', hc', hd' werden einerseits, und die von g ausgehenden 4 Strahlen ga', ga'', gb', gc'' werden anderseits von den Transversalen a'd' und ai so geschnitten, dass nach dem Steiner'schen Hauptsatze die anharmonischen Verhältnisse







$$\frac{a'c'}{a''c'} : \frac{a'd'}{a''d'} = \frac{ae}{a''e} : \frac{ai}{a''i} \quad \text{und} \quad \frac{a'b'}{a''b'} : \frac{a'c''}{a''c''} = \frac{ae}{a''e} : \frac{ai}{a''i}$$

werden; also hat man

$$\frac{a'c'}{a''c'} : \frac{a'd'}{a''d'} = \frac{a'b'}{a''b'} : \frac{a'c''}{a''c''}$$

oder, wenn der Symmetrie wegen d' durch b'' ersetzt wird,

$$a'b' \cdot a'b'' : a'c' \cdot a'c'' = a''b' \cdot a''b'' : a''c' \cdot a'' \cdot c'' \qquad 10$$

und ganz ebenso werden die Beziehungen

$$b'c' . b'c'' : b'a' . b'a'' = b''c' . b''c'' : b''a' . b''a'' \quad 11$$

$$c'a' . c'a'' : c'b' . c'b'' = c''a' . c''a'' : c''b' . c''b'' \quad 12$$

gefunden. Von diesen Beziehungen zwischen den Distanzen der drei Punctenpaare

$$a', a'' \qquad b', b'' \qquad c', c''$$

ist die erste von Gérard **Désargues** (Lyon 1593? — Lyon 1662?; erst Officier, dann als Privatmann in Paris oder auf einem Landgute bei Condrieux lebend) als Definition für ihre sog. **Involution** gegeben worden. Da aber die von h ausgehenden 4 Strahlen ha', hb', hc', hb'' einerseits, und die von i ausgehenden 4 Strahlen ia'', ib', ic'', ib'' anderseits von den Transversalen $a'd'$ und gb auch so geschnitten werden, dass

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'b''}{b'b''} = \frac{ge}{b'e} : \frac{gf}{b'f} \quad \text{und} \quad \frac{a''c''}{a''b'} : \frac{b''c''}{b''b'} = \frac{ge}{b'e} : \frac{gf}{b'f}$$

also

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'b''}{b'b''} = \frac{a''c''}{a''b'} : \frac{b''c''}{b'b''}$$

so lassen sich 10—12 auch durch

$$a'c' . b'a'' . c''b'' = c'b' . a''c'' . b''a' \quad 13$$

und die analog gefundenen Gleichheiten

$$b'a' . c'b'' . a''c'' = a'c' . b''a'' . c'' . b' \quad 14$$

$$c'b' . a'c'' . b''a'' = b'a' . c''b'' . a'' . c' \quad 15$$

ersetzen, welche somit ebenfalls als Bedingungen der Involution angesehen werden können, und (da sie Gleichheiten der Producte von nicht an einander liegenden Abschnitten enthalten) zugleich begreiflich machen, wie man dazu kommen konnte, der Involution von 6 Puncten einer Geraden eine Involution der Dreiecksecken und gewisser Theilpuncte der Seiten (109, 110) gegenüberzustellen. Dass endlich, wenn man einen Punct mit 6 in Involution stehenden Puncten einer Geraden verbindet, auch die so erhaltenen Strahlen **in Involution** genannt werden, dass zwischen den Sinus ihrer Winkel entsprechende Relationen bestehen, dass sie jede andere Gerade wieder in 6 Puncten schneiden, welche in Involution sind, etc., lässt sich mit Hülfe von 1 und 10—12 oder 13—15 ebenfalls sehr leicht nachweisen. — Für die sog. **neuere** Geometrie, welche theils durch Obiges, theils durch einiges beiläufig später Mitgetheilte in ihren ersten Elementen repräsentirt wird, vergl. „**Carnot**, Géométrie de position. Paris 1803 in 4. (Deutsch von Schumacher, Altona 1807—1810, 2 Bde. in 8.), — **Poncelet**, Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822 in 4. (2 éd. 1865—1866, 2 Vol. in 4.), und: Applications d'analyse et de géométrie. Paris 1862—1864, 2 Vol. in 8., — Jak. **Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Erster (und einziger) Theil. Berlin 1832 in 8., — Franz **Seidewitz** (Erfurt 1807 — Heiligenstadt 1852; Lehrer in Heiligenstadt), Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene. Heiligenstadt 1846 in 8., — Karl Georg Christian von **Staudt** (Rothenburg 1798 — Erlangen 1867; Professor der Mathematik zu Nürnberg und Erlangen), Geometrie der Lage. Nürnberg 1847 in 8., und: Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856—1860, 3 Hefte in 8., — Christoph **Paulus**, Lehrer der Mathematik zu Ludwigsburg: Grundlinien der neuern Geometrie. Stuttgart 1853 in 8., — Benjamin **Witzschel** (Oschatz 1822 — Dresden 1860; Lehrer zu Zwickau

und Dresden), Grundlinien der neuern Geometrie. Leipzig 1858 in 8., — W. **Blumberger,** Grundzüge einiger Theorieen aus der neueren Geometrie in ihrer engeren Beziehung auf die ebene Geometrie. Halle 1858 in 8., — Karl Theodor **Reye** (Hannover 1838; Professor der Mathematik am schweizerischen Polytechnikum), Die Geometrie der Lage. Hannover 1866—1868, 2 Abth. in 8., — Jak. **Steiner,** Vorlesungen über synthetische Geometrie. Herausgegeben von Karl Friedrich **Geiser** (Langenthal 1843, Docent der Mathematik am schweizerischen Polytechnikum) und Heinrich Eduard **Schröter** (Königsberg 1829; Professor der Mathematik zu Breslau). Leipzig 1867, 2 Th. in 8., — Joh. Heinrich Ulrich Vitalis **Pfaff** (Erlangen 1824; Professor der Mathematik in Erlangen), Neuere Geometrie. Erlangen 1867, 2 Th. in 8., — Heinrich **Gretschel,** Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie. Leipzig 1868 in 8., — etc.", — sowie für praktische Verwerthung derselben die schon 89 citirte „Graphische Statik" von **Culmann.** — Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass, wenn man in 1: $\mathfrak{ab} = a$, $\mathfrak{bc} = x$, $\mathfrak{cd} = b$, $(a, b) = \alpha$, $(b, c) = \beta$ und $(c, d) = \gamma$ setzt, die Beziehung

$$\frac{a}{x} : \frac{a+b+x}{b} = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta} : \frac{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

hervorgeht, und hieraus folgt (wie ich 1843 in Grunert's Archiv III 444 zeigte), wenn

$$\operatorname{Tg}\varphi = \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\beta \cdot \operatorname{Sin}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Sin}\gamma} \cdot a\,b} \qquad 9$$

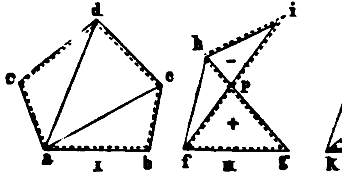
gesetzt wird,

$$x = \frac{a+b}{\operatorname{Cos}\varphi} \cdot \operatorname{Sin}^2 \frac{\varphi}{2} \qquad 10$$

eine Formel, welche das zwischen zwei messbaren Theilen a und b einer Geraden liegende unmessbare Stück x finden lehrt, indem man von einem seitlichen Puncte (B) die entsprechenden scheinbaren Distanzen α, β, γ misst.

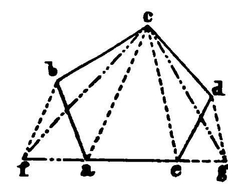
117. Das Vieleck. Ein Vieleck kann man sich seiner Fläche nach durch Drehung einer Geraden von veränderlicher Länge entstanden denken: Man wählt irgend eine Ecke als Pol, eine der durch sie gehenden zwei Seiten als Ausgangslage, die zweite als Endlage der erzeugenden Geraden, und dreht nun die Erzeugende so um den Pol, dass ihr Endpunct den Umfang des Vielecks durchläuft, — wobei ein Drehen in entgegengesetztem Sinne offenbar negativen Räumen entspricht. Da hiernach jedes Vieleck durch eine algebraische Summe von Dreiecken dargestellt werden kann, so verhalten sich (107) ähnliche Vielecke wie die Quadrate homologer Seiten.

Einige Beispiele werden hinreichen, die im Texte gegebene Vorschrift zur Bestimmung der Fläche irgend einer Figur zu verdeutlichen: Wählt man bei I, II, III je a, f, k als Pol, und ab, fg, kl als Ausgangslage der erzeugenden Geraden, so ist offenbar nach jener Vorschrift



$$\mathrm{I} = abc + acd + ade$$
$$\mathrm{II} = fgh - fhi = fgp - phi$$
$$\mathrm{III} = klm - kmn + kno = klmq + noq$$

Zu denselben Resultaten gelangt man auch, wenn man einen Punct die innere Seite (vergl. 78) des die Figur bildenden Zuges durchlaufen lässt, und die dabei umschlossenen Theile als negative, die übrigen als positive Flächen in Rechnung bringt. — Ein erster, der obigen Darstellung nahekommender, mir aber erst kürzlich, nachdem ich schon seit bald drei Decennien meine Methode benutzt hatte, bekannt gewordener Versuch, die Fläche in einer alle Figuren beherrschenden Weise zu ermitteln, findet sich in „Albrecht Ludwig Friedrich **Meister** (Hohenlohe 1724 — Göttingen 1788; Professor der Philosophie und Mitglied der Academie in Göttingen), Generalia de genesi figurarum planarum, et inde pendentibus earum affectionibus (Novi Comment. Soc. Gotting. Tom I. 1771)". — Ein Vieleck kann mit Hülfe von 107 der Fläche nach leicht in ein Dreieck verwandelt werden, wie beistehende Figur zeigt, in der das Fünfeck abcde, indem b durch bf || ca und d durch dg || ce in die Verlängerung von ae gebracht wurden, in ein eben so grosses Dreieck fcg umgesetzt worden ist.



118. Die Polygonometrie. Bezeichnen $a_1\, a_2 \ldots a_n$ die Seiten, $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Drehwinkel eines n-Ecks, $x_1\, y_1,\ x_2\, y_2, \ldots x_n\, y_n$ die Coordinaten seiner Ecken in Beziehung auf a_1 als Abscissenaxe und den Anfangspunct von a_1 als Pol, endlich r die Anzahl der Umdrehungen, so hat man (94)

$$x_1 = a_1 \quad x_2 = x_1 + a_2 \operatorname{Cos} \alpha_1 \quad x_3 = x_2 + a_3 \operatorname{Cos} (\alpha_1 + \alpha_2) \ldots$$
$$x_n = x_{n-1} + a_n \operatorname{Cos} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1})$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = a_2 \operatorname{Sin} \alpha_1 \quad y_3 = y_2 + a_3 \operatorname{Sin} (\alpha_1 + \alpha_2) \ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + a_n \operatorname{Sin} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1})$$

und daher je durch Addition, da $x_n = 0 = y_n$ sein muss,

$$0 = a_1 + a_2 \operatorname{Cos} \alpha_1 + a_3 \operatorname{Cos} (\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots + a_n \operatorname{Cos} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) \quad \mathbf{1}$$
$$0 = a_2 \operatorname{Sin} \alpha_1 + a_3 \operatorname{Sin} (\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots + a_n \operatorname{Sin} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) \quad \mathbf{2}$$
und (80) $$4 r R = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \quad \mathbf{3}$$

welches die Grundformeln der Polygonometrie sind, aus denen sich auf ähnliche Weise Formeln zur Berechnung einzelner Elemente herleiten lassen, wie diess aus den entsprechenden Grundformeln (103) in 104 für das Dreieck geschah.

Auf die Ableitung der Formeln 1—3 dürfte es, nach dem im Texte darüber Gegebenen, unnöthig sein, zurückzukommen. Dagegen mag einerseits in Beziehung auf ihren Gebrauch theils auf eine entsprechende Entwicklung in 224 hingewiesen, theils folgende directe Anwendung gemacht werden: Bringt man in 1 und 2 je das Glied mit a_n auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, quadrirt und addirt, so erhält man nach ganz einfacher Reduction die 104 : 4 analoge Formel

$$a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 2\,a_1\,a_2 \operatorname{Cos} \alpha_1 + 2\,a_2\,a_3 \operatorname{Cos} \alpha_2 + $$
$$+ 2\,a_1\,a_3 \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + 2\,a_h\,a_k \operatorname{Cos}(\alpha_h + \alpha_{h+1} + \dots + \alpha_{k-1})$$
$$+ \dots\dots + 2\,a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot \operatorname{Cos} \alpha_{n-2} \qquad 4$$

eine Formel, welche offenbar die Aufgabe löst, aus (n — 1) Seiten und den (n — 2) von ihnen eingeschlossenen Winkeln die n^te Seite zu berechnen. — Anderseits ist zu erwähnen, dass die Formeln 1 und 2 zuerst von Anders Johann **Lexell** (Abo 1740 — Petersburg 1784; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie zu Petersburg) in verschiedenen Abhandlungen „De resolutione polygonorum rectilineorum dissertatio 1 et 2 (Novi Comment. Petrop. 19—20, 1775—1776)" und „Two theorems, by which the solution of polygons will be as easy as that of triangles by common trigonometry (Phil. Trans. 1775) aufgestellt, und bald darauf auch von Simon **Lhuilier** in seiner schon 108 erwähnten Polygonometrie gegeben wurden.

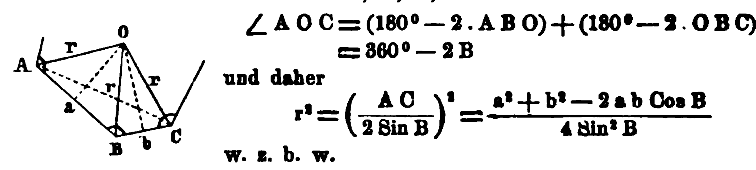
XIV. Das centrische Vieleck und der Kreis.

119. Die nach den Ecken centrischen Vielecke. Findet sich zu einem Vielecke ein Punct, der von allen Ecken denselben Abstand hat, so heisst es **centrisch nach den Ecken,** der Punct **Mittelpunct der Ecken** und der gleiche Abstand **Radius.** Zerlegt man es vom Centrum aus durch Radien und Senkrechte in 2 n Dreiecke, so sind jede zwei an derselben Seite liegenden Dreiecke congruent, und alle Seiten halbirt. Bezeichnen a und b zwei Nebenseiten und B ihren Winkel, so kann man nach

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \,.\, \operatorname{Cos} B}{4 \operatorname{Sin}^2 B}$$

den Radius berechnen.

Ist O das Centrum der Ecken A, B, C, ... so hat man



$$\angle A\,O\,C = (180^\circ - 2\,.\,A\,B\,O) + (180^\circ - 2\,.\,O\,B\,C)$$
$$= 360^\circ - 2\,B$$

und daher

$$r^2 = \left(\frac{A\,C}{2 \operatorname{Sin} B}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \operatorname{Cos} B}{4 \operatorname{Sin}^2 B}$$

w. z. b. w.

120. Die nach den Seiten centrischen Vielecke. Findet sich zu einem Vielecke ein Punct, der von allen Seiten denselben Abstand hat, so heisst es **centrisch nach den Seiten,** der Punct **Mittelpunct der Seiten,** und der gleiche Abstand **Apothema.** Zerlegt man es vom Centrum aus durch Apothema's und Verbindungslinien mit den Ecken in 2 n Dreiecke, so sind jede zwei an derselben Ecke liegenden Dreiecke congruent und alle Winkel halbirt. Ueberdiess ist die Fläche gleich dem halben Umfange multiplicirt mit dem Apothema, und wenn a eine Seite, A und B aber die an-

liegenden Winkel bezeichnen, so kann das Apothema nach

$$\alpha = \frac{a \,.\, \text{Sin}\,\frac{A}{2} \,.\, \text{Sin}\,\frac{B}{2}}{\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}}$$

berechnet werden.

Ist O das Centrum der Seiten a, b, ..., so hat man

O, C, A, α, α, a, b, B

$$a = \alpha\left(\text{Ctg}\,\frac{A}{2} + \text{Ctg}\,\frac{B}{2}\right)$$

oder also

$$\alpha = \frac{a \,.\, \text{Sin}\,\frac{A}{2} \,.\, \text{Sin}\,\frac{B}{2}}{\text{Sin}\,\frac{A+B}{2}}$$

Ferner ist die Fläche

$$F = \frac{a\alpha}{2} + \frac{b\alpha}{2} + \ldots = \frac{a+b+\ldots}{2} \,.\, \alpha$$

w. z. b. w.

121. Die centrischen Vielecke. Findet sich zu einem Vielecke ein Punct, welcher Centrum seiner Ecken und seiner Seiten ist, so heisst es **centrisch**, und die von diesem Mittelpuncte mit den einzelnen Seiten bestimmten Dreiecke, die sog. **Bestimmungsdreiecke**, sind (119, 120) sämmtlich congruent, — folglich ist das centrische Vieleck regelmässig. — In dem regelmässigen n-Ecke von einfacher Umdrehung bestehen zwischen Winkel (W), Seite (S), Radius (R) und Apothema (A) die Beziehungen

$$W = \left(2 - \frac{4}{n}\right) . 90^0 \qquad R = \frac{S}{2}\,\text{Sec}\,\frac{W}{2} \qquad A = \frac{S}{2}\,\text{Tg}\,\frac{W}{2} \qquad \mathbf{1}$$

Ist ferner in dem gleichschenkligen Dreiecke bcd (s. Fig.) $\varphi = \frac{90^0}{n}$, so stellen S, R, A Seite, Radius und Apothema eines n-Ecks, — s, R, r und s', r, a aber dieselben Grössen für zwei 2n-Ecke dar, deren erstes mit dem n-Ecke gleichen Radius, deren zweites dagegen gleichen Umfang mit ihm besitzt, und man hat (93, 94)

$$S = 2R\,.\,\text{Sin}\,2\varphi = \frac{s}{R}\sqrt{4R^2 - s^2}, \qquad a = \frac{A+R}{2}, \qquad r = \sqrt{aR} \qquad \mathbf{2}$$

Im Bestimmungsdreiecke des 10-Ecks der Seite s macht die Bissectrix eines Basiswinkels auf dem Gegenschenkel R einen sog. **goldenen Schnitt**, da $R : s = s : R - s$. Es folgt hieraus (18) der leicht construirbare Werth

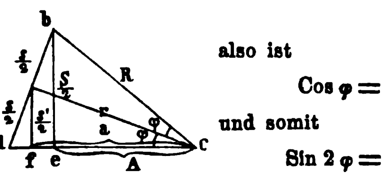
$$s = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \text{während nach 2} \qquad S^2 = R^2 + s^2 \qquad \mathbf{3}$$

gefunden wird.

Bezeichnet P die Länge des ganzen Umfangs oder den sog. **Perimeter** des regelmässigen n-Ecks von einfacher Umdrehung, so folgt nach den Formeln 1, welche wohl keiner Ableitung bedürfen, und mit Hülfe von 100:2

$$P = n . S = 2 n R \operatorname{Sin} \frac{180^0}{n} =$$
$$= 2 R [3,1415927 - \frac{8}{n^2} . 0,6459641 + \ldots] \qquad 4$$

Zur Ableitung der ersten Formel 2 erhält man aus der Figur



$$\operatorname{Sin} \varphi = \frac{s}{2 R}$$

also ist

$$\operatorname{Cos} \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi} = \frac{1}{2 R} \sqrt{4 R^2 - s^2}$$

und somit

$$\operatorname{Sin} 2 \varphi = 2 \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi = \frac{s}{2 R^2} \sqrt{4 R^2 - s^2}$$

Alles Uebrige ist wohl selbstverständlich, — sowie die Ableitung der übrigen Formeln 2; dagegen ist auf die nothwendige Grössenfolge

$$A < a < r < R$$

aufmerksam zu machen, auf der ihre Anwendung in 122 beruht. — Im Bestimmungsdreiecke des Zehnecks ist offenbar der Winkel an der Spitze $\alpha = 36^0$, — also beträgt jeder Basiswinkel $72^0 = 2 \alpha$, und es zerfällt durch die Bisectrix eines der Letztern das Bestimmungsdreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke, von denen das Eine dem Ganzen ähnlich ist, und so die im Texte erwähnte Proportion ergibt. Aus dieser folgt

$$s^2 + R s - R^2 = o \quad \text{oder} \quad s = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{R^2}{2} (3 - \sqrt{5}) \qquad 5$$

und hiemit nach 2

$$S^2 = s^2 (4 - \frac{s^2}{R^2}) = s^2 (4 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}) = s^2 (1 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2})$$
$$= s^2 (1 + \frac{2}{3 - \sqrt{5}}) = s^2 (1 + \frac{R^2}{s^2}) = s^2 + R^2$$

oder 3. Construirt man ein rechtwinkliges Dreieck der Katheten R und $\frac{1}{2}$ R, so stellt die Hypotenuse $\frac{1}{2}$ R $\sqrt{5}$ dar, also der Ueberschuss derselben über $\frac{1}{2}$ R nach 5 die Seite des Zehnecks, und aus dieser und R lässt sich sodann offenbar nach 3 auch die Seite des Fünfecks construiren.

123. Das centrische Unendlicheck. Im Quadrate der Seite 1 ist $A = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,707107$. Berechnet man hieraus successive nach 121:2 für das 8, 16, 32, ...-Eck a und r, so nähern sich beide dem Werthe 0,636620, der somit für das Unendlicheck gilt. Bezeichnet man daher in einem solchen das Verhältniss vom halben Umfange zum Radius oder die sog. **Ludolph'sche Zahl** mit π, so ist

$$\pi = \frac{2}{0,636620} = 3,14159$$

oder angenähert 22:7, 355:113, etc.

Rechnet man, theils wie im Texte vom Quadrat der Seite 1, theils auch vom Sechseck der Seite 1 (wo $A = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025$ und $R = 1$) ausgehend, so erhält man nach 121 : 2 successive

Eck	a	r	Eck	a	r
8	0,603553	0,653282	12	0,933013	0,965926
16	28417	40729	24	49469	57662
32	34573	37643	48	53566	55612
64	36108	36875	96	54589	55100
128	36492	36683	192	54845	54973
256	36588	36636	384	54909	54940
512	36612	36624	768	54925	54933
1024	36618	36621	1536	54929	54931
2048	36619	36620	3072	54930	54930

und somit

$$\pi = \frac{2}{0{,}636620} = 3{,}14159 \qquad \pi = \frac{3}{0{,}954930} = 3{,}14159$$

Vergl. für die spätern Decimalen von π die Tafel VII, — für die arithmetische Bestimmung 51 und 52, — für die betreffenden Näherungsbrüche 29; auch aus 121 : 4 kann π für $n = \infty$ entnommen werden. — Ueber den von **Antiphon**, einem kurz vor Aristoteles lebenden Geometer, gemachten Versuch, den Kreis zu berechnen, vergl. meine Note in den Berner-Mittheilungen von 1846. Etwas später fand **Archimedes** (vergl. das in seinen unter 2 aufgeführten Werken enthaltene Buch „Αρχιμηδους κυκλου μετρησις“ oder „Archimedis dimensio circuli), indem er den Kreis zwischen ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes 96-Eck einschloss, dass der Kreisumfang kleiner als das $3\frac{1}{7}$fache, und grösser als das $3\frac{10}{71}$fache des Durchmessers sei, und es wurde von da weg der Annäherungswerth $\pi = 3\frac{1}{7}$, den wir oben aus dem 96-Eck, d. h. $a = 0{,}955 = r$ setzend, gerade auch hätten erhalten können, fast allgemein in der Kreisrechnung gebraucht. Während sich dann z. B. Nicolaus von Cusa oder **Cusanus** (Cuss bei Trier 1401 — Todi in Umbrien 1464; folgeweise Archidiakon zu Lüttich, Bischof zu Brixen, Cardinal und Statthalter von Rom) vergeblich bemühte, durch verschiedene Constructionen (vergl. für solche 128) den Kreis zu rectificiren (die Beste derselben soll nach Kästner I 480 mit $\pi = 3{,}14234$ übereingekommen sein), gab **Ludolph** in seinem Werke „Van den circkel, daerin gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circkels-diameter teghen synen omloop. Delft 1596 in fol.“ die zum Dank dafür vielfach nach ihm benannte Zahl π auf 20 Decimalen, — ja in einer zweiten, von seiner Wittwe 1615 besorgten Ausgabe, sowie in den spätern Ausgaben des in 5 erwähnten Werkes wurden sogar 32 Decimalen mitgetheilt, — und ungefähr gleichzeitig machte Adriaan Adriaanszoon, genannt **Metius** (Alkmaar 1571 — Franeker 1635; Professor der Mathematik und Medicin zu Franeker), oder sogar schon sein Vater, der aus den niederländischen Befreiungskriegen bekannte Adriaan Anthoniszoon, auf die vorzügliche Annäherungszahl $\frac{355}{113}$ aufmerksam. In der neusten Zeit hat sich **Dase** die wenig lohnende Mühe genommen, π noch viel genauer zu berechnen; vergl. die Abhandlung „Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalen berechnet (Crelle Bd. 27 von 1844)“.

123. Die Kreislinie. Der Ort eines Punctes, der von einem gegebenen Puncte, dem **Centrum**, einen gegebenen Abstand, den **Radius** r, hat, heisst **Kreislinie**, und kömmt offenbar mit einem centrischen Unendlichecke überein, so dass (122, 120), wenn die Länge der Kreislinie, die sog. **Peripherie** des Kreises, mit p, und die von ihr umschlossene Fläche mit f bezeichnet werden,

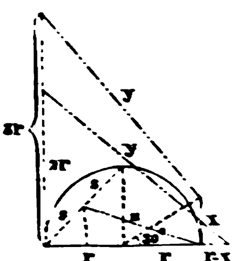
$$p = 2 r \pi \qquad f = \frac{p}{2} . r = r^2 \pi \qquad \mathbf{1}$$

woraus sofort

$$r = \frac{p}{2\pi} = \sqrt{\frac{f}{\pi}} \qquad p = 2\sqrt{f\pi} \qquad f = \frac{p^2}{4\pi} \qquad \mathbf{2}$$

folgen.

Drei Ecken bestimmen (111) ein Centrum der Ecken, also drei Puncte eine Kreislinie. — Von den vielen Constructionen, welche (vergl. auch 122) im Laufe der Zeiten gegeben wurden, um annähernd die Länge der Kreislinie zu finden oder die Fläche des Kreises zu bestimmen (den Kreis zu rectificiren oder zu quadriren), und die von den vielen, noch immer vorkommenden Versuchen Unwissender oder Halbverrückter, die strenge Quadratur auf solchem Wege zu finden, wohl zu unterscheiden sind, ist die von **Kochanski** 1685 in den Leipziger-Acten Mitgetheilten eine der Besten: Bei ihr wird Tg 30° = x construirt, und sodann ein rechtwinkliges Dreieck gebildet, dessen eine Kathete 2 r, die Andere 3 r — x ist. Da



$$x = r \operatorname{Tg} 30° = \frac{r \operatorname{Sin} 30°}{\sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 30°}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

ist, so ist nämlich die Hypotenuse dieses Dreiecks

$$y = \sqrt{(2r)^2 + (3r - x)^2} = \sqrt{13 . r^2 - 6 r x + x^2} =$$
$$= r \sqrt{13 \tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}1416 . r$$

oder es stellt wirklich y sehr nahe die Länge des Halbkreises dar. Etwas weniger genau, aber sehr bequem, ist die von Praktikern gebrauchte und von mir 1843 (Grunert's Archiv III 445) mitgetheilte Vorschrift, den Abstand s der Mitte der Quadrantensehne vom Endpuncte des Durchmessers als Länge des Quadranten zu benutzen; denn es ist

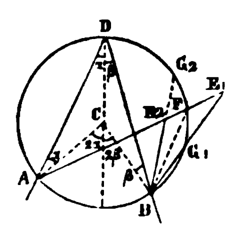
$$s = \sqrt{(\tfrac{3}{2} r)^2 + (\tfrac{1}{2} r)^2} = 1{,}581 . r \quad \text{während} \quad \frac{r\pi}{2} = 1{,}571 . r$$

Wenn also der Radius 1ᵐ, so beträgt der Fehler gerade 10ᵐᵐ, und merkt man sich daher noch die Regel, für jeden Radius-Meter schliesslich 10ᵐᵐ abzuziehen, so hat man in der That eine selbst bei grössern Kreisen für die meisten praktischen Bedürfnisse ganz hinlängliche Annäherung. — Vergl. noch Tafel II für die Berechnung der Kreisumfänge und Kreisflächen.

124. Die Secanten und ihre Winkel. Bezeichnet d den Abstand einer Geraden vom Centrum, so hat sie für d < r, wo sie **Secante** heisst, zwei Puncte mit der Kreislinie gemein, die von einander um die sog. **Sehne** $s = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ abstehen; für d = r hat sie nur

Einen Punct gemein, und heisst **Tangente** in demselben; für $d > r$ liegt sie ganz ausserhalb. — Mittelpunct, Mitte der Sehne und Mitte des Bogens liegen in einer Senkrechten zur Sehne. Gleichen Sehnen entsprechen gleiche Bogen und gleiche Mittelpunctswinkel; Bogen und Mittelpunctswinkel messen sich somit gegenseitig. — Ein Winkel, dessen Scheitel in der Kreislinie liegt, heisst **Peripheriewinkel**, und ist (111) gleich der Hälfte des mit ihm auf gleichem Bogen stehenden Mittelpunctswinkels. Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind somit gleich; umgekehrt liegen die Durchschnittspuncte zweier Geraden, die sich um zwei fixe Puncte so drehen, dass die Differenz ihrer Winkel mit einer fixen Geraden sich gleich bleibt, — ja überhaupt die Scheitel gleicher Winkel, deren Schenkel zwei Puncte gemein haben, auf einer durch diese Puncte gehenden Kreislinie. — Zwischen parallelen Secanten enthaltene Kreisbogen sind gleich lang, und der Winkel zweier Secanten ist daher gleich einem Peripheriewinkel, der auf der Summe oder Differenz der zwischen den Secanten liegenden Bogen steht, je nachdem die Secanten sich innerhalb oder ausserhalb des Kreises schneiden.

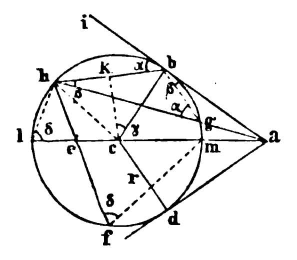
Die im Texte gegebenen Sätze bedürfen kaum weitern Beweises; doch mögen noch folgende Bemerkungen beigefügt werden: Für $d > r$ wird $s = 2i\sqrt{d^2 - r^2}$ der Werth der sog. **idealen** Sehne, deren Betrachtung mit der gleichseitigen Hyperbel (146) zusammenhängt. — Dass sich zwei Mittelpunctswinkel eines Kreises wie die Kreisbogen verhalten, auf welchen sie stehen, ergibt sich leicht, wenn man Erstere nach ihrem Verhältnisse in gleiche Theile theilt; hieraus folgt aber unmittelbar, dass ein Mittelpunctswinkel durch den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen eines Kreises von bestimmtem (am Besten, vergl. 129, der Einheit entsprechendem) Radius gemessen werden kann. Es ergibt sich hieraus auch, wie es zu verstehen ist, wenn man sagt, es werde ein Peripheriewinkel $ADB = \alpha + \beta = \frac{1}{2} ACB$ durch die Hälfte des Bogens AB gemessen, auf dem er stehe. — Soll $\angle AEB = \angle ADB$ sein, so kann sein Scheitel weder in E_1 noch in E_2, sondern er muss in dem durch A, B, D gehenden Kreise liegen; denn es ist $\angle AE_1B = \angle AFB - \angle FBE_1 = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} FG_1$, also $\angle AE_1B < ADB$, — und $\angle AE_2B = \angle AFB + \angle FBG_2 = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} FG_2$, also $\angle AE_2B > ADB$, — womit zugleich der im Texte ausgesprochene Satz über die Winkel zweier Secanten bewiesen ist.



125. Die Tangenten und ihre Winkel. Der Durchschnittspunct zweier Tangenten steht von ihren Berührungspuncten gleich weit ab, — ihr Winkel ist zum Winkel der Berührungsradien supplementär, und beide Winkel werden durch die Verbindungslinie ihrer Scheitel halbirt. — Zieht man durch irgend einen nicht in der

Kreislinie liegenden Punct Secanten zu einem Kreise, so bestimmt der Punct auf ihnen Sehnensegmente von gleichem Producte, und zwar ist dieses Product, welches **Potenz** des Punctes heisst, für einen äussern Punct gleich dem Quadrate der von ihm an die Kreislinie gezogenen Tangente.

Wenn ba ⊥ bc und da ⊥ dc, d. h. wenn a der Durchschnittspunct zweier Tangenten an b und d ist, so haben offenbar die somit rechtwinkligen Dreiecke abc und adc die Hypotenuse als gemeinschaftlich und eine Kathete als Radius gleich, — folglich sind sie congruent, und aus dieser Congruenz gehen die betreffenden Behauptungen des Textes unmittelbar hervor. — Ist ck ⊥ bh, so ist ∠hbi = γ, da die Schenkel dieser Winkel zu einander senkrecht stehen, — also wird hbi durch die Hälfte des Bogens hb, oder es wird also der Winkel einer Sehne und einer Tangente durch die Hälfte des zwischenliegenden Bogens, oder durch die Hälfte des auf derselben Sehne stehenden Peripheriewinkels gemessen, — und wenn man in der Mitte k einer Geraden hb, sowie im Scheitel b des an ihr liegenden Winkels hbi die Senkrechten kc ⊥ hb und bc ⊥ bi zieht, so schneiden sie sich in einem Puncte c, der mit b einen Kreis bestimmt, in welchem hb Sehne, und jeder auf ihr stehende Peripheriewinkel gleich ∠hbi ist. — Da je die beiden α, β und δ als Winkel von gleichem Maasse gleich sind, so ist △leh ∾ △efm und △abh ∾ △abg, also



$$he : em = le : ef \quad \text{oder} \quad he \cdot ef = em \cdot le = (r + ec)(r - ec)$$
$$ha : ba = ba : ag \quad\quad ha \cdot ag = ab^2 \quad = (ac + r)(ac - r)$$

womit der zweite Satz des Textes bewiesen, und zugleich gezeigt ist, wie für einen bestimmten Kreis die Potenz eines Punctes von seiner Distanz vom Centrum abhängt. Dass dieser zweite Satz dazu verwendet werden kann, eine mittlere Proportionale zu construiren oder ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, liegt auf der Hand.

126. Die ein- und umgeschriebenen Vielecke. Ein Vieleck, dessen Ecken in der Kreislinie liegen, heisst **eingeschrieben,** — dagegen **umgeschrieben,** wenn seine Seiten Tangenten sind. — In jedem eingeschriebenen Vierecke besteht (125; 93 : 3) der sog. **Ptolemäische Lehrsatz:** Das Product der Diagonalen ist gleich der Summe oder Differenz der Producte der Gegenseiten, je nachdem das Viereck gemein oder überschlagen ist. — In jedem eingeschriebenen Sechsecke, dem sog. **Hexagrammum mysticum** Pascal's, liegen (109, 125) die Durchschnittspuncte der Gegenseiten in einer Geraden.

Zieht man an n Puncte einer Kreislinie Tangenten, so bestimmen (79) die n Puncte eben so viele eingeschriebene, als die n Geraden umgeschriebene n-Ecke, und man kann somit jedem Eingeschriebenen ein Umgeschriebenes zuordnen: Den zwei Endpuncten jeder Seite des Eingeschriebenen entsprechen nun zwei Tangenten, welche eine Ecke des umgeschriebenen Vielseits be-

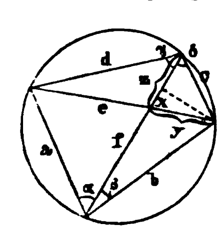
stimmen; diese Ecke sei jener Seite zugeordnet, — das umgeschriebene n-Eck aber demjenigen Eingeschriebenen, dessen n Seiten seine n Ecken zugeordnet sind. — Bezeichnet man den Umfang eines Kreises des Radius r mit u, den Perimeter des eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks mit p, den des umgeschriebenen mit P, so ist für $180 : n = \varphi$

$$u = n . 2\varphi . \text{Arc } 1^0 . r \qquad p = 2 n r \text{ Sin } \varphi \qquad P = 2 n r \text{ Tg } \varphi \qquad \mathbf{1}$$

also mit Hülfe von 100 : 7 sehr nahe

$$u = 2 n r . \frac{3 \text{ Sin } \varphi}{2 + \text{Cos } \varphi} = \frac{3 p P}{2 P + p} \qquad \mathbf{2}$$

Mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke (a, e — y, f — z) und (c, y, z), (d, z, e — y) und (b, f — z, y), sowie des Satzes von der Potenz (125) und des erweiterten Pythagoräischen Lehrsatzes (93 : 3) hat man



$$a . e + b . d = \frac{f - z}{y} . c^2 + \frac{z}{y} . b^2$$
$$= \frac{f - z}{y} (y^2 + z^2 - 2 z x) +$$
$$+ \frac{z}{y} [(f - z)^2 + y^2 + 2 (f - z) x]$$
$$= f . y + \frac{f - z}{y} . z . f$$
$$= f . y + f (e - y) = f . e \qquad \mathbf{3}$$

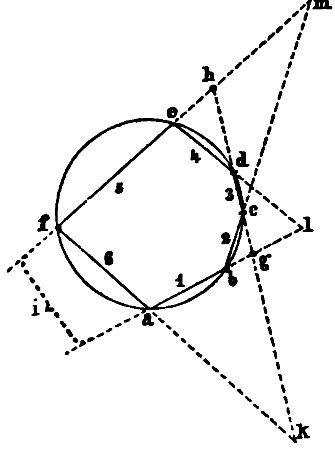
womit der Ptolemäische Lehrsatz für das gemeine Viereck erwiesen ist, und da aus 3

$$e . f - a . c = b . d \qquad \mathbf{4}$$

folgt, so ist er zugleich auch für das überschlagene Viereck in der ausgesprochenen Weise richtig. Ist $f = 2 r$, so werden γ und δ zu α und β complementär, und es geht 3 in

$$\frac{e}{2r} = \frac{d}{2r} . \frac{b}{2r} + \frac{a}{2r} . \frac{c}{2r} \quad \text{oder} \quad \text{Sin}(\alpha + \beta) = \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \beta + \text{Cos } \alpha . \text{Sin } \beta$$

über, woraus hervorgeht, wie der Ptolemäische Lehrsatz für die Sehnenrechnung der Alten so grosse Wichtigkeit haben konnte. — Schreibt man für das von den Seiten 1, 3, 5 des eingeschriebenen Sechsecks bestimmte Dreieck g h i und jede der übrigen Seiten als Transversale die Involution 109, für jede seiner Ecken aber die Potenzengleichheit 125 auf, so erhält man



$$\begin{aligned} i a . g k . h f &= a g . k h . f i \\ i l . g d . h e &= l g . d h . e i \\ i b . g c . h m &= b g . c h . m i \\ g b . g a &= g c . g d \\ h d . h c &= h e . h f \\ i f . i e &= i a . i b \\ \hline i l . g k . h m &= l g . k h . m i \end{aligned} \quad \times$$

Es liegen also die Puncte k, l, m so auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks g h i, dass die von ihnen gebildeten Abschnitte eine Involution bilden, — also müssen k, l, m in einer Geraden liegen, womit der Pascal'sche Satz (der sich durch Projection auf alle Kegelschnitte ausdehnen lässt) bewiesen ist. **Pascal** hatte diesen

berühmten Satz schon in seinem 16. Jahre gefunden, und an die Spitze seines auf sieben Seiten publicirten „Essai pour les coniques. Paris 1640 in 8.“ gestellt.

127. Beziehungen zwischen verschiedenen Kreislinien. Bezeichnet a die Centraldistanz zweier Kreise der Radien R und r, so haben die Kreise für $R + r > a > R - r$ eine von der Centrallinie unter rechtem Winkel halbirte gemeinschaftliche Sehne, — für $a = R + r$ (äussere Berührung) und $a = R - r$ (innere Berührung) eine zu der Centrallinie senkrechte gemeinschaftliche Tangente, — während sie für $a = 0$ **concentrisch,** in allen übrigen Fällen **excentrisch** heissen. Für den Ort eines Punctes, von dem aus die Tangenten an zwei Kreise gleich lang werden (s. Fig. 1), findet man (93)

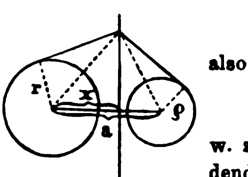
$$x = \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a} \qquad \mathbf{1}$$

d. h. dieser Ort, die sog. **Radicalaxe, Chordale** oder **Linie der gleichen Potenzen** ist eine zur Centrallinie senkrechte Gerade. Für zwei sich schneidende Kreise fällt sie mit der gemeinschaftlichen Secante zusammen, — für andere wird sie mittelst eines beide schneidenden Hülfskreises construirt. Die paarweisen Radicalaxen dreier Kreise schneiden sich (110) in Einem Puncte, dem sog. **Radicalcentrum.**

Bezeichnet man die beiden gleichen Tangenten mit t, und die Distanzen des Punctes von den beiden Centren mit d und δ, so hat man nach 93 : **2**, 3

$$d^2 = r^2 + t^2 \qquad \delta^2 = \varrho^2 + t^2$$

$$\delta^2 = d^2 + a^2 - 2ax \qquad \mathbf{2}$$



also

$$x = \frac{a^2 + d^2 - \delta^2}{2a} = \frac{a^2 + r^2 - \varrho^2}{2a}$$

w. z. b. w. — Dass die Radicalaxe zweier sich schneidenden Kreise mit ihrer gemeinschaftlichen Secante zusammenfällt, geht von selbst oder auch daraus hervor, dass für die gemeinschaftlichen Puncte 2 und 1 identisch werden. — Hat man noch einen dritten Kreis, so kann man entsprechend 1 die zwei weitern Beziehungen

$$y = \frac{\alpha^2 + \varrho^2 - R^2}{2\alpha} \qquad z = \frac{A^2 + R^2 - r^2}{2A}$$

aufschreiben, und alle drei ergeben

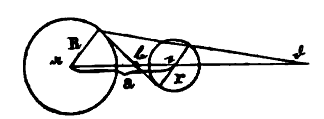
$$2ax + 2\alpha y + 2Az = a^2 + \alpha^2 + A^2$$

also wird

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a - x)^2 + (\alpha - y)^2 + (A - z)^2$$

und hierin liegt nach 110 die Bedingung für das Schneiden der drei Radicalaxen in Einem Puncte. — Zieht man in zwei ausser einander liegenden Kreisen der Radien R und r und der Mittelpuncte a und c parallele Radien und verbindet ihre Endpuncte, so

erhält man zwei neue Puncte b und d, und findet



$$\frac{R}{r} = \frac{ab}{bc} = \frac{ab}{a - ab}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{ad}{cd} = \frac{ad}{ad - a}$$

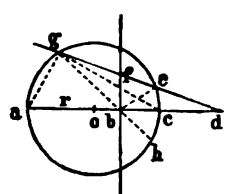
und hieraus erhält man sofort

$$ab : bc = ad : dc \qquad ab = \frac{aR}{R + r} \qquad ad = \frac{aR}{R - r} \qquad 2$$

Es sind also b und d einerseits in Beziehung auf a und c einander harmonisch zugeordnet, anderseits von der Lage der parallelen Radien unabhängig, so dass auch die gemeinschaftlichen Tangenten an die beiden Kreise durch sie gehen müssen. — Für das nach Gianfrancesco **Malfatti** (Ala di Roveredo 1731 — Ferrara 1807; Professor der Mathematik zu Ferrara) benannte Problem „In ein Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche einander und einzeln je zwei Seiten des Dreiecks berühren“ kann auf die Specialschrift „**Adams**, Das Malfattische Problem. Winterthur 1846 in 4.“ verwiesen werden.

128. Pol und Polare. Wenn (s. Fig. 1) $ob \cdot od = r^2$, so heissen die Puncte b und d **reciprok**, und theilen ac harmonisch. Zieht man durch einen derselben, den **Pol**, eine Secante, — durch den andern eine Senkrechte zu ac, die **Polare**, so theilen (116) Pol und Polare (z. B. d und bf) die entsprechende Sehne (eg) harmonisch. Liegt der Pol ausserhalb, so fällt die Polare mit der ihm entsprechenden Berührungssehne zusammen. — In jedem eingeschriebenen Vierecke bestimmen (116) die Durchschnittspuncte der Diagonalen und der Gegenseiten ein Dreieck, in welchem jede Ecke Pol ihrer Gegenseite ist. Man kann hiernach leicht zu jedem Puncte als Pol seine Polare, — und indem man für zwei Puncte einer Geraden die Polaren und sodann den Durchschnittspunct der Letztern aufsucht, den Pol der Geraden bestimmen.

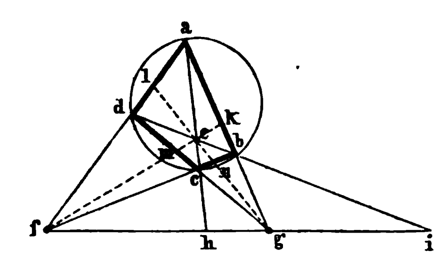
Liegen die Puncte b und d so in einem Radius, dass dieser Letztere mittlere Proportionale zwischen ihren Distanzen vom Mittelpuncte ist, so hat man



$$\frac{ad}{dc} = \frac{r + od}{od - r} = \frac{r + (r^2 : ob)}{(r^2 : ob) - r}$$

$$= \frac{r + ob}{r - ob} = \frac{ab}{bc}$$

oder es sind a, b, c, d harmonische Puncte, — folglich auch ga, gh, gc, ge harmonische Strahlen. Nun ist aber ga $\perp$ gc, folglich muss (116) Bogen ec = ch sein; also halbirt bc den Winkel der Strahlen be und bh, während bf $\perp$ bc, — also sind auch bh, bc, be, bf harmonische Strahlen, folglich g, f, e, d harmonische Puncte, w. z. b. w. Umgekehrt ist nothwendig von jeden zwei Puncten, welche eine Sehne harmonisch theilen, der Eine Pol einer Geraden, welche durch den Andern geht. — Da (116) aech und debi harmonische Puncte sind, — da ferner ga, ge, gc und gh, sowie fa, fe, fc und fh, weil sie durch diese harmonischen



Puncte gehen, auch harmonische Strahlen, also hinwieder a k b g, d m c g, a l d f und b n c f harmonische Puncte sein müssen, — so liegen somit i und h in der Polaren von e, k und m in der Polaren von g, l und n endlich in der Polaren von f, w. z. b. w.

129. Sehne, Pfeil, Sector und Segment. Bezeichnen für einen Mittelpunctswinkel φ : b Bogen, s Sehne oder Chorde (sog. doppelter Sinus), p Pfeil oder Bogenhöhe (sog. Sinus versus), F Kreisausschnitt oder Sector, und f Kreisabschnitt oder Segment, so hat man (100, 123), wenn φ'' die Anzahl der in φ enthaltenen Secunden ist, und

$$\text{Arc}\,\varphi = \frac{\varphi\pi}{180} = \varphi''\,.\,\text{Sin}\,1'' \qquad 1$$

die häufig als Maass des Winkels benutzte Bogenlänge für den Radius 1 ist,

$$b = \frac{\varphi}{180}\,r\,\pi = r\,.\,\text{Arc}\,\varphi = r\,.\,\varphi''\,.\,\text{Sin}\,1'' \qquad 2$$

Ferner (123, 105, 93, 94, 98)

$$F = \frac{\varphi}{360}\,r^2\pi = \frac{b\,r}{2} = \frac{r^2\,\text{Arc}\,\varphi}{2}, \quad f = \frac{r^2}{2}(\text{Arc}\,\varphi - \text{Sin}\,\varphi) = \frac{r(b-h)}{2} \qquad 3$$

$$s = 2\,r\,\text{Sin}\,\frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{p\,(2\,r - p)} \qquad r = \frac{s^2 + 4\,p^2}{8\,p} \qquad 4$$

$$p = r\,.\,\text{Sin vers}\,\frac{\varphi}{2} = 2\,r\,\text{Sin}^2\frac{\varphi}{4} = r - \frac{1}{2}\sqrt{(2\,r + s)\,(2\,r - s)} \qquad 5$$

Sind die Winkel so klein, dass, wenn man sie in Bogen ausdrückt, ihre dritten und höhern Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so hat man (50, 94)

$$\text{Sin}\,\varphi = \text{Arc}\,\varphi = \text{Tg}\,\varphi \qquad \text{Ctg}\,\varphi = \frac{1}{\text{Arc}\,\varphi} = \text{Cosec}\,\varphi \qquad 6$$

$$\text{Cos}\,\varphi = 1 - \frac{\text{Arc}^2\,\varphi}{2} \qquad \text{Sec}\,\varphi = 1 + \frac{\text{Arc}^2\,\varphi}{2} \qquad 7$$

$$\text{Sin vers.}\,\varphi = \frac{\text{Arc}^2\,\varphi}{2} \qquad \text{Cos vers.}\,\varphi = 1 - \text{Arc}\,\varphi \qquad 8$$

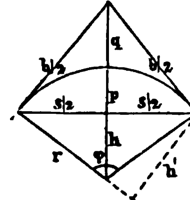
woraus sich manche, praktisch nicht unwichtige Näherungsformeln, wie z. B.

$$\text{Sin vers}\,2\,\varphi = 4\,.\,\text{Sin vers}\,\varphi = 4\,(\text{Sec}\,\varphi - 1) \qquad 9$$

$$p = \frac{r\,.\,\text{Arc}^2\,\varphi}{8} \qquad s = r\,.\,\text{Arc}\,\varphi \quad \text{etc.} \qquad 10$$

ergeben. (VI, VII).

Die Formeln 2—4 bedürfen kaum einer besondern Ableitung. — Die ersten Formeln 5 stimmen mit der selbstverständlichen



$$p = r\left(1 - \text{Cos}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

überein, und hieraus folgt auch mit Hülfe von 4

$$p = r - r\sqrt{1 - \text{Sin}^2\frac{\varphi}{2}} = r - r\sqrt{1 - \frac{s^2}{4r^2}}$$

$$= r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}$$

d. h. die letzte der Formeln 5. — Auch die Näherungsformeln 6—10 erhalten sich in der im Texte angegebenen Weise ganz leicht, und es mag einzig beigefügt werden, dass 9 und 10 besonders von den Artilleristen häufig angewandt werden. — Setzt man $\varphi = 4\alpha$ oder

$$\text{Tg}\,\alpha = \text{Tg}\,\frac{\varphi}{4} = \frac{4r\,\text{Sin}^2\frac{\varphi}{4}}{4r\,\text{Sin}\frac{\varphi}{4}\,\text{Cos}\frac{\varphi}{4}} = \frac{2p}{s}$$

so kann man die zweite Formel 4 durch

$$r = \frac{s^2}{8p}\left(1 + \frac{4p^2}{s^2}\right) = \frac{s^2}{8p}\left(1 + \text{Tg}^2\alpha\right) = \frac{s}{4}\cdot\frac{1 + \text{Tg}^2\alpha}{\text{Tg}\,\alpha} \qquad \textbf{11}$$

ersetzen. Ferner erhält man aus 2 und 3 mit Hülfe von 51:1

$$b = r\,.\,\text{Arc}\,\varphi = 4r\,.\,\text{Arc}\,\alpha =$$

$$= 4r\,\text{Tg}\,\alpha\left(1 - \frac{1}{3}\text{Tg}^2\alpha + \frac{1}{5}\text{Tg}^4\alpha - \frac{1}{7}\text{Tg}^6\alpha + \ldots\right)$$

$$= s\left(1 + \text{Tg}^2\alpha\right)\left(1 - \frac{1}{3}\text{Tg}^2\alpha + \frac{1}{5}\text{Tg}^4\alpha - \frac{1}{7}\text{Tg}^6\alpha + \ldots\right)$$

$$= s\left(1 + \frac{2}{1.3}\text{Tg}^2\alpha - \frac{2}{3.5}\text{Tg}^4\alpha + \frac{2}{5.7}\text{Tg}^6\alpha - \ldots\right) \qquad \textbf{12}$$

$$f = \frac{br}{2} - \frac{s(r-p)}{2} = \frac{b-s}{2}\,.\,r + \frac{ps}{2}$$

$$= \frac{ps}{2} + s\,r\,\text{Tg}^2\alpha\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5}\text{Tg}^2\alpha + \frac{1}{5.7}\text{Tg}^4\alpha - \ldots\right)$$

$$= 2ps\left[\frac{1}{4} + \frac{1 + \text{Tg}^2\alpha}{4}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5}\text{Tg}^2\alpha + \frac{1}{5.7}\text{Tg}^4\alpha - \ldots\right)\right]$$

$$= 2ps\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{1.3.5}\text{Tg}^2\alpha - \frac{1}{3.5.7}\text{Tg}^4\alpha + \frac{1}{5.7.9}\text{Tg}^6\alpha - \ldots\right] \qquad \textbf{13}$$

Ist α klein, so stimmt somit f sehr nahe (vergl. 145) mit der Parabelfläche $\frac{2}{3}ps$ überein, und weicht jedenfalls von ihr nicht um

$$\frac{2}{3}ps\,.\,\frac{\text{Tg}^2\alpha}{5} = \frac{2}{3}ps\,.\,\frac{4}{5}\left(\frac{p}{s}\right)^2 < \frac{2}{3}ps\,.\left(\frac{p}{s}\right)^2$$

also nicht einmal um das $\left(\frac{p}{s}\right)^2$ fache ab, wie diess **Culmann** in seinem 89 erwähnten Werke, wo er 13 mittheilt, des weitern ausführt. — Bezeichnet Γ den Mittelpunctswinkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist, und für den Wilhelm **Matzka** (Leipertitz in Mähren 1798; Professor der Mathematik in Wien und Prag) den Namen **Gehren** vorgeschlagen hat, so ist nach 2

$$\Gamma = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,295779 = 57^\circ\,17'\,44'',806$$

$$= 206264'',806 = (1 : \text{Sin}\,1'')''$$

und es können manche Formeln und Rechnungen durch Einführung desselben etwas vereinfacht werden; vergl. Matzka's betreffende Abhandlung in Bd. 8 von Grunert's Archiv. — Die zuweilen von Praktikern gebrauchte Grösse q (vergl. Fig.) kann nach

$$q = \left(\operatorname{Sec}\frac{\varphi}{2} - 1\right).r = \left(1 - \operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}\right) r \operatorname{Sec}\frac{\varphi}{2} = p.\operatorname{Sec}\frac{\varphi}{2} \qquad 14$$

berechnet werden. Für einen kleinen Werth von φ werden somit offenbar q und p sehr nahe gleich gross.

130. Noch einige Beziehungen. Bezeichnet x den Radius eines Kreises und b den Abstand zweier Sehnen 2 a und 2 c der Winkel 2α und 2β, so folgen (s. Fig.)

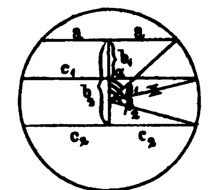
$$a = x.\operatorname{Sin}\alpha \qquad c = x.\operatorname{Sin}\beta \qquad b = x(\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Cos}\beta) \qquad 1$$

und hieraus (98)

$$\operatorname{Tg}\frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{b}{c-a} \qquad \operatorname{Tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{b}{c+a} \qquad 2$$

Die Gleichungen 1 lassen z. B. aus x, a, c zunächst α, β und dann b finden, — die 2 aber aus a, b, c die Winkel α, β und dann x nach 1.

Für eine Anwendung der im Texte gegebenen, kaum einer Erläuterung bedürfenden Formeln vergleiche z. B. 347. — Sollte man c aus a, b und x berechnen müssen, so könnte man sich entweder der aus 1 direct folgenden Formeln



$$\operatorname{Sin}\alpha = \frac{a}{x} \qquad \operatorname{Cos}\beta = \frac{x\operatorname{Cos}\alpha - b}{x} \qquad c = x\operatorname{Sin}\beta$$

bedienen, oder besser zur Hülfe zuerst den Abstand der Sehne 2 a vom Centrum

$$d = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(a+x)(a-x)} \qquad 3$$

berechnen, und sodann c nach der Formel

$$c = x.\operatorname{Sin}\beta = \sqrt{x^2 - x^2\operatorname{Cos}^2\beta} = \sqrt{x^2 - (d-b)^2}$$
$$= \sqrt{(x+d-b)(x-d+b)} \qquad 4$$

erhalten.

XV. Die analytische Geometrie der Ebene.

131. Die Gleichung der Geraden. Eine für jeden Punct einer Linie statthabende Beziehung zwischen Abscisse und Ordinate, oder zwischen Radius Vector und Winkel, heisst **Gleichung** der Linie, — und umgekehrt stellt jede continuirliche Gleichung zwischen zwei Coordinaten eine Linie vor. So besteht (s. Fig.) für jeden Punct m einer Geraden (1) die Beziehung

$$\frac{\alpha y}{2} + \frac{\beta x}{2} = \frac{\alpha\beta}{2} \qquad \text{also ist} \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad 1$$

die Gleichung einer Geraden, und umgekehrt stellt jede Gleichung ersten Grades

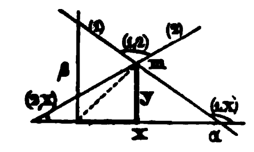
$$y = a_1 x + b_1 \qquad \text{oder} \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad 2$$

eine Gerade (1) vor, und zwar ist

$$a_1 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{A_1}{B_1} = \text{Tg}(1, x) \qquad b_1 = \beta = -\frac{C_1}{B_1} \qquad 3$$

Dabei heissen α und β **Parameter.**

Wenn die Coordinaten eines Punctes nicht einzeln gegeben sind, sondern nur eine Beziehung zwischen denselben, so wird der Punct dadurch auch nicht vollkommen bestimmt: Jeder Punct, dessen Coordinaten die gegebene Beziehung eingehen, entspricht derselben auf gleiche Weise. Die Gesammtheit der Lagen eines Punctes, welche einer Bedingung genügen, haben wir aber (73) Ort dieser Bedingung genannt, — eine Beziehung zwischen Coordinaten bestimmt also nicht einen einzelnen Punct, sondern einen Ort. Ist die, die Bedingung ausdrückende Function **continuirlich**, d. h. ändert sich, wenn der Werth der einen Coordinate einen kleinen Zuwachs erhält, auch der Werth der andern Coordinate um eine **kleine** Grösse, so bilden die der Bedingung entsprechenden Puncte eine Folge von Lagen, sind also mit dem Wege eines Punctes zu vergleichen, — oder es ist der Ort in diesem Falle eine Curve, und zwar heisst diese **algebraisch** (des n^{ten} Grades) oder **transcendent**, je nachdem die Gleichung algebraisch (des n^{ten} Grades) oder transcendent ist. — Die im Texte gegebenen Grundbeziehungen ergeben sich mit Hülfe der beistehenden Figur ohne Schwierigkeit; ja in manchen Fällen lässt sich die Gleichung einer Geraden ganz unmittelbar bestimmen: So ersieht man z. B. ohne weiteres, dass die Gleichungen



$$x = o \qquad y = o \qquad x = a \qquad y = b \qquad y = x \cdot \text{Tg}\, a \qquad \text{etc.}$$

Gerade vorstellen, welche der Reihe nach mit der der Ordinatenaxe oder mit der Abscissenaxe zusammenfallen, — zur Ordinatenaxe oder Abscissenaxe parallel, also zur Abscissenaxe oder Ordinatenaxe senkrecht sind, — durch den Anfangspunct gehen und mit der Abscissenaxe den Winkel a bilden, — etc. — Bezeichnet d die Distanz des Anfangspunctes von der Geraden 1, so ist offenbar

$$\frac{\alpha \beta}{2} = \frac{d}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \qquad \text{oder} \qquad d = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} \qquad 4$$

$$\text{Cos}(1, x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = -\frac{d}{\beta} \qquad \text{Sin}(1, x) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{d}{\alpha} \qquad 5$$

und mit Benutzung hievon geht 1 in

$$x\,\text{Sin}(1, x) - y\,\text{Cos}(1, x) = d \qquad 6$$

über, — eine Gleichung, welche Hesse in der unten angeführten Schrift als **Normalform** der allgemeinen Form 2 der Gleichung der geraden Linie gegenüberstellt. — Ausser vielen schon genannten allgemeinen und manchen später anzuführenden besondern Schriften, sind für analytische Geometrie überhaupt, und speciell für analytische Geometrie der Ebene etwa folgende Werke vorzumerken: „Jean Paul de Gua de Malves (Carcasonne 1714? —

Paris 1785; Prior von St.-George de Vigon, Mitglied der Pariser-Academie; vergl. sein Eloge durch Condorcet in Mém. de Par. 1786), Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres. Paris 1740 in 8., — Georg Wolfgang **Krafft** (Tuttlingen 1701 — Tübingen 1754; Professor der Mathematik in Petersburg und Tübingen), Institutiones geometriæ sublimioris. Tubingæ 1753 in 4., — Achille-Pierre **Dionis du Séjour** (Paris 1734 — Fontainebleau 1794; Parlamentsrath und Academiker in Paris) et Mathieu-Bernard **Goudin** (Paris 1734 — Paris 1817; Parlamentsrath in Paris), Traité des propriétés communes à toutes les courbes. Paris 1778 in 8., — Jean-Baptiste **Biot** (Paris 1774 — Paris 1862; Professor der Physik und Astronomie, und Mitglied der Academie in Paris), Essai de géométrie analytique. Paris 1802 in 8. (6 éd. 1823; deutsch von Ahrens 1817 und 1840), — **Monge**, Application de l'analyse à la géométrie. Paris 1805 in 4. (Nouv. édit. par Liouville 1850), — **Lhuilier**, Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique. Paris 1809 in 4., — Charles **Dupin** (Varzy 1784; Marine-Ingenieur und Mitglied der Pariser-Academie), Développements de géométrie. Paris 1813 in 4. (Suite 1822). — **Develey**, Application de l'algèbre à la géométrie. Lausanne 1816 in 4., — Heinrich Wilhelm **Brandes** (Groden bei Ritzebüttel 1777 — Leipzig 1834: erst Deichinspector im Oldenburgischen, dann Professor der Mathematik zu Breslau, zuletzt der Physik zu Leipzig), Lehrbuch der höhern Geometrie. Leipzig 1822—1824, 2 Bde. in 4., — J. J. **Littrow**, Analytische Geometrie. Wien 1823 in 8. (Lat. von Bujanovich, Viennæ 1828), — **Lefébure** de Fourcy, Géométrie analytique. Paris 1827 in 8. (5 éd. 1847), — Julius **Plücker** (Elberfeld 1801 — Bonn 1868: Professor der Mathematik und Physik in Halle und Bonn), Analytisch-geometrische Entwicklungen. Essen 1828—1831, 2 Bde. in 4., — und: System der analytischen Geometrie auf neue Betrachtungsweisen gegründet. Berlin 1835 in 4., — Ludwig Immanuel **Magnus** (Berlin 1790: früher Kaufmann, jetzt Privatgelehrter), Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin 1833 in 8., — D. **Chelini**, Saggio di geometria analitica. Roma 1838 in 8., — L. A. **Sohncke**, Analytische Geometrie. Halle 1851 in 8., — Mich. **Chasles**, Traité de géométrie supérieure. Paris 1852 in 8., — O. **Fort**, Professor der Mathematik zu Dresden, und O. **Schlömilch**, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig 1855, 2 Bde. in 8. (2. A. 1863). — Paul Heinrich **Zech** (Stuttgart 1828: Lehrer der Mathematik in Stuttgart), Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. Stuttgart 1857 in 8., — Ferdinand **Joachimsthal** (Goldberg in Schlesien 1818 — Breslau 1861: Professor der Mathematik zu Halle und Breslau), Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Berlin 1863 in 8., — W. A. **Whitworth**, Prof. of Mathem. in Liverpool, Trilinear Coordinates and other methods of modern analytical Geometry of two dimensions. Cambridge 1866 in 8., — Ludwig Otto **Hesse** (Königsberg 1811: Professor der Mathematik zu Königsberg, Halle und Heidelberg), Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punctes und des Kreises in der Ebene. Leipzig 1865 in 8., — **Housel**, Introduction à la géométrie supérieure. Paris 1865 in 4., — L. **Painvin**, Principes de géométrie analytique: Géométrie plane. Paris 1866 in 4., — etc.

183. Verschiedene Aufgaben. Für den Durchschnittspunct zweier Geraden (1) und (2) erhält man aus ihren Gleichungen

$$x = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \qquad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2} \tag{1}$$

während (83, 98, 131) ihr Winkel

$$(1, 2) = (1, x) - (2, x) = \text{Arc Tg} \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \tag{2}$$

also $a_1 = a_2$ die Bedingung des Parallelismus, und $1 + a_1 a_2 = 0$ die des Senkrechtstehens ist. — Zwei Puncte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ haben die Distanz

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{3}$$

während

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \tag{4}$$

die Gleichung der durch sie bestimmten Geraden ist. Für $y = 0$ folgt aus 4

$$x = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \tag{5}$$

und sind daher $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ kleine Werthe (Fehler), welche f (x) für zwei Annahmen x_1 und x_2 annimmt, so kann man nach 5 einen Werth x_3 ausrechnen, welcher einer Wurzel von $f(x) = 0$ bereits sehr nahe kömmt, f mag eine algebraische oder eine transcendente Function bezeichnen, — und durch Wiederholung des Verfahrens kann man x nach dieser Regel, der sog. **Regula Falsi,** mit beliebiger Annäherung finden. — Das durch drei Puncte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ oder durch drei Gerade (1), (2), (3) bestimmte Dreieck hat die Fläche

$$F = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2} \tag{6}$$

$$= \frac{[b_1(a_2 - a_3) + b_2(a_3 - a_1) + b_3(a_1 - a_2)]^2}{2(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)} \tag{7}$$

Der Abstand δ eines Punctes $(\alpha\beta)$ von der Geraden (1) kann (97) nach

$$\delta = \frac{\beta - b_1 - \alpha a_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} \tag{8}$$

berechnet werden.

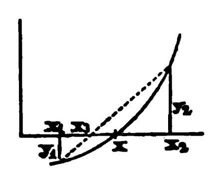
Statt 2 schreibt man auch oft

$$\text{Cos}(1, 2) = \text{Cos}(1, x) . \text{Cos}(2, x) + \text{Sin}(1, x) . \text{Sin}(2, x) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tg}^2(1, 2)}} = \frac{1 + a_1 a_2}{\sqrt{1 + a_1^2}\sqrt{1 + a_2^2}}$$

$$= \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}} = d_1 d_2 \left[\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{\beta_1 \beta_2}\right] \tag{10}$$

Um 4 zu finden, schreibt man 131 : 2 für die beiden gegebenen Puncte auf, berechnet daraus a_1 und b_1, und substituirt diese Werthe in 131 : 2. —



Die durch 5 ausgedrückte, schon in 20, 44 und 60 theils citirte, theils abgeleitete, hier aber ganz besonders klar nach ihrem innersten Wesen sich kennzeichnende Regula Falsi scheint zuerst etwa um 1600 durch den aus Amul gebürtigen, arabischen Mathematiker Mohammed **Behaeddin** ben Alhossain in seiner „Essenz der Rechenkunst (arabisch und deutsch von Nesselmann, Berlin 1843 in 8.; franz. durch A. Marre, Rome 1864 in 8.)" angedeutet worden zu sein. Ihre Anwendung mag durch folgende Beispiele erläutert werden: Macht man in der transcendenten (408 : 15 entsprechenden) Gleichung

$$0 = u - 14^0\, 3'\, 20'',1 \,.\, \mathrm{Sin}\, u - 329^0\, 44'\, 27'',7$$

für u die Annahmen $u' = 322^0\, 43'$ und $u'' = 320^0\, 0'$, so entsprechen ihnen, wie man durch Substitution dieser Annahmen in die Gleichung leicht findet, die Fehler $d' = +5363'',7$ und $d'' = -2542'',6$, und nun gibt die Regula Falsi

$$u''' = 320^0\, 0' + 2542'',6 \,.\, \frac{322^0\, 43' - 320^0\, 0'}{5363'',7 + 2542'',6} = 320^0\, 52'\, 32'',8$$

wofür durch Substitution in die Gleichung der Fehler $d''' = +14'',0$ erhalten wird. Wendet man auf u'' und u''' nochmals die Regula Falsi an, so erhält man $u^{IV} = 320^0\, 52'\, 15'',5$ mit dem Fehler $d^{IV} = 0'',0$, — also ist $u = 320^0\, 52'\, 15'',5$. — Entsprechend den in 358 mitgetheilten Beobachtungen des Kometen von 1866 I erhält man nach 412 zur Bestimmung von δ_1, r_1, r_2, k die 4 Gleichungen

$$r_1^2 = 1,571917 \,.\, \delta_1^2 - 0,037155 \,.\, \delta_1 + 0,966908$$
$$r_2^2 = 6,177862 \,.\, \delta_1^2 - 1,263657 \,.\, \delta_1 + 0,966681$$
$$k^2 = 2,144245 \,.\, \delta_1^2 - 0,378255 \,.\, \delta_1 + 0,018540$$
$$(r_2 + r_1 + k)^{3/2} - (r_2 + r_1 - k)^{3/2} - 0,8042144 = 0$$

Macht man zuerst die Annahme $\delta_1 = 0$, so ergeben die drei ersten Gleichungen

$$r_1 = 0,983315 \qquad r_2 = 0,983200 \qquad k = 0,136162$$

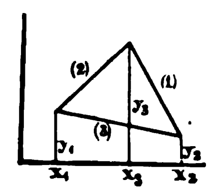
und hiefür nimmt in der vierten Gleichung die Seite links den fehlerhaften Werth $-0,231499$ an. Für die Annahmen $\delta_1 = 0,5$ ergeben sich dagegen die Werthe

$$r_1 = 1,158149 \qquad r_2 = 1,870882 \qquad k = 0,604544$$

und für diese der fehlerhafte Werth $+2,073049$. Sucht man nun zu beiden Annahmen und den ihnen entsprechenden Fehlern nach der Regula Falsi eine bessere Annahme, wiederholt damit die Rechnung, — wendet neuerdings auf die nunmehrigen zwei besten Annahmen und ihre Fehler die Regula Falsi an, etc., so erhält man schliesslich die Annahme $\delta_1 = 0,214141$, und damit

$$r_1 = 1,015398 \qquad r_2 = 0,989633 \qquad k = 0,189387$$

und hiefür reducirt sich nun die linke Seite der vierten Gleichung auf Null. Es ist somit die letzte Annahme eine gute, und ebenso sind die mit ihr berechneten Werthe von r_1, r_2 und k als gut zu betrachten. — Ein ähnliches Beispiel wird in 412 noch weiter ausgeführt und verfolgt werden. — Bezeichnet man die Fläche des durch die drei Puncte $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ bestimmten Dreieckes mit F, so hat man offenbar (118)



$$2\,F = (x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_3 + y_2) - - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)$$

woraus 6 sofort hervorgeht. Für die Durchschnittspuncte

der Geraden (1), (2), (3) aber erhält man nach 1

$$x_3 = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \qquad x_2 = -\frac{b_3 - b_1}{a_3 - a_1} \qquad x_1 = -\frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3}$$
$$y_3 = -\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 - a_2} \qquad y_2 = -\frac{b_3 a_1 - b_1 a_3}{a_3 - a_1} \qquad y_1 = -\frac{b_2 a_3 - b_3 a_2}{a_2 - a_3} \qquad \mathbf{11}$$

und, wenn $S_1\, S_2\, S_3$ die mit den Geraden (1), (2), (3) zusammenfallenden Dreiecksseiten sind, so ergeben sich nach 3 und 6, wenn

$$m = \frac{b_1 (a_2 - a_3) + b_2 (a_3 - a_1) + b_3 (a_1 - a_2)}{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)} \qquad \mathbf{12}$$

gesetzt wird,

$$S_1 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = m (a_2 - a_3) \sqrt{1 + a_1^2}$$
$$S_2 = m (a_3 - a_1) \sqrt{1 + a_2^2} \qquad S_3 = m (a_1 - a_2) \sqrt{1 + a_3^2} \qquad \mathbf{13}$$

$$2F = \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3}\left(\frac{b_3 a_1 - b_1 a_3}{a_3 - a_1} - \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 - a_2}\right) + \frac{b_3 - b_1}{a_3 - a_1}\left(\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 - a_2} - \frac{b_2 a_3 - b_3 a_2}{a_2 - a_3}\right)$$
$$+ \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}\left(\frac{b_2 a_3 - b_3 a_2}{a_2 - a_3} - \frac{b_3 a_1 - b_1 a_3}{a_3 - a_1}\right)$$
$$= a_1 (b_2 - b_3) m + a_2 (b_3 - b_1) m + a_3 (b_1 - b_2) m$$
$$= - m [b_1 (a_2 - a_3) + b_2 (a_3 - a_1) + b_3 (a_1 - a_2)]$$

mit welch' letzterer Formel (abgesehen vom Vorzeichen, das für die Fläche schliesslich immer positiv werden muss) die obige 7 vollkommen übereinstimmt. — Setzt man in 97:4 statt y', y, x, β, α und φ der Reihe nach: δ, β, α, b_1, o und $(1, x) = \operatorname{Arc} \operatorname{Tg} a_1$, so erhält man

$$\delta = (\beta - b_1) \operatorname{Cos} (1, x) - \alpha \operatorname{Sin} (1, x) = \frac{\beta - b_1 - \alpha \operatorname{Tg} (1, x)}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 (1, x)}}$$

wo die letztere Formel die im Texte gegebene 8 ist, während die erstere mit der von **Hesse** gebrauchten Form

$$\delta = d - \alpha \operatorname{Sin} (1, x) + \beta \operatorname{Cos} (1, x) \qquad \mathbf{14}$$

übereinkömmt. — Die vom Anfangspuncte auf die Gerade 131:2 gezogene Senkrechte hat offenbar die Gleichung $y = - x : a_1$, und trifft auf derselben in dem Puncte

$$x = -\frac{a_1 b_1}{1 + a_1^2} \qquad y = \frac{b_1}{1 + a_1^2} \qquad \mathbf{15}$$

auf.

133. Der Punct der mittlern Entfernungen. Das Product des Abstandes eines Punctes (x y) von einer Geraden in eine beliebige ihm zugetheilte Constante m heisst **Moment des Punctes in Beziehung auf die Gerade.** Hat man ein System solcher Puncte, so besitzt der Punct

$$x = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \qquad y = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m} \qquad \mathbf{1}$$

die Eigenschaft, dass, wenn man ihm Σm als Constante zuordnet, für jede Gerade (132:8) sein Moment gleich der Summe der Momente aller Puncte des Systemes ist; er heisst **Punct der mittlern Entfernungen** oder **Schwerpunct**, — jede durch ihn gehende Gerade **Schweraxe.** Wählt man den Schwerpunct zum Anfangs-

puncte der Coordinaten, und bezeichnet die Abstände der Puncte des Systemes von demselben mit r_1, r_2, etc., — ihre Abstände von einem Puncte (a, b) dagegen mit ϱ_1, ϱ_2, etc., — den Abstand des letztern vom Schwerpuncte endlich mit r, so werden $\Sigma m x = \Sigma m y = 0$, und man erhält (132:3) die merkwürdige Beziehung Steiner's

$$\Sigma m \varrho^2 = \Sigma m r^2 + r^2 \Sigma m \qquad 2$$

Zu jedem Puncte einer Geraden findet sich ein zweiter, mit ihm, in Beziehung auf die Mitte, symmetrischer Punct; werden somit allen Puncten der Geraden gleiche Constanten zugeschrieben, so fällt ihr Schwerpunct in die Mitte, und hat eine der Länge der Geraden proportionale Constante. — Ein Dreieck kann man sich als eine Folge von Parallelen zu einer Seite denken, und da deren Schwerpuncte (89) in der Geraden liegen, welche die Mitte der Seite mit der Gegenecke verbindet, so muss der Schwerpunct des ganzen Dreiecks mit dem (112) bestimmten Puncte zusammenfallen. — Der Schwerpunct irgend eines Vieleckes wird gefunden, indem man dasselbe durch Diagonalen auf zwei Weisen theilt, und je die Schwerpuncte der Theile verbindet. Der Schwerpunct eines centrischen Vieleckes oder eines Kreises fällt mit seinem Centrum zusammen.

Bezeichnet δ den Abstand des, schon von **Carnot** durch seine „Géométrie de position (vergl. 116)" in die Geometrie eingeführten, dann aber namentlich durch die Arbeiten von **Steiner** für sie wichtig gewordenen Punctes der mittlern Entfernungen, von der Geraden (1), während δ_1, δ_2, ... die Abstände der einzelnen Puncte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... des Systemes von derselben Geraden sein mögen, so hat man mit Hülfe von 1 und 132:14

$$\begin{aligned}\delta \cdot \Sigma m &= [d - x \,.\, \mathrm{Sin}\,(1,x) + y \,\mathrm{Cos}\,(1,x)]\, \Sigma m \\ &= d\, \Sigma m - \mathrm{Sin}\,(1,x)\, \Sigma m x + \mathrm{Cos}\,(1,x)\, \Sigma m y \\ &= d\,(m_1 + m_2 + \ldots) - \mathrm{Sin}\,(1,x)\,(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots) + \\ &\quad + \mathrm{Cos}\,(1,x)\,(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots) \\ &= m_1\,[d - x_1\,\mathrm{Sin}\,(1,x) + y_1\,\mathrm{Cos}\,(1,x)] + \\ &\quad + m_2\,[d - x_2\,\mathrm{Sin}\,(1,x) + y_2\,\mathrm{Cos}\,(1,x)] + \ldots \\ &= m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \ldots = \Sigma m \delta\end{aligned}$$

wodurch die im Texte aufgeführte Grundeigenschaft des Punctes der mittlern Entfernungen erhalten ist. — Um 2 zu erhalten, hat man mit Hülfe von 132:3

$$\begin{aligned}\Sigma m \varrho^2 &= \Sigma m\,[(x-a)^2 + (y-b)^2] \\ &= \Sigma m\,(x^2 + y^2) - 2a\,\Sigma m x - 2b\,\Sigma m y + (a^2 + b^2)\,\Sigma m\end{aligned}$$

d. h. eben, weil jetzt Abscissen- und Ordinatenaxe Schweraxen sind und somit $\Sigma m x$ und $\Sigma m y$ verschwinden, unsere 2, welche sich für n Puncte von gleicher Constante (oder gleichem Gewichte) auf

$$\Sigma \varrho^2 = n \,.\, r^2 + \Sigma r^2 \qquad 3$$

reducirt, so dass die Quadratsumme aller Abstände der Puncte eines Systemes von einem andern Puncte ein Minimum wird, wenn dieser letztere Punct mit dem Schwerpuncte des Systemes zusammenfällt. — Die nun folgenden Sätze über die Schwerpuncte der einfachsten Figuren bedürfen wohl keines weitern

Nachweises. — Zur Ergänzung mag beigefügt werden, dass, wenn n Puncte dieselbe Constante haben, nach 1 für ihren Schwerpunct

$$x = \frac{1}{n} \Sigma x = \frac{1}{n} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \ldots + \frac{x_n + x_1}{2} \right)$$

$$y = \frac{1}{n} \Sigma y = \frac{1}{n} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \frac{y_n + y_1}{2} \right)$$

folgen, dass also z. B. der Schwerpunct aller Ecken eines n Ecks mit demjenigen der Mitten seiner Seiten zusammenfällt. Endlich ist für allgemeine Formeln auf 140 und 141 zu verweisen.

134. Die Gleichung der Kreislinie. Die Gleichung einer Kreislinie des Mittelpunctes (a b) und Radius r ist (132 : 3)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad 1$$

und somit speciell für $b = 0$ und $a = r$

$$y = \sqrt{2 r x - x^2} \qquad 2$$

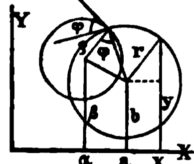
oder für $a = 0 = b$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad 3$$

Für den Winkel φ aber, unter dem sich zwei Kreise (s. Fig.) schneiden, folgt (132 : 3; 104 : 6)

$$\text{Cos}\, \varphi = \frac{r^2 + \varrho^2 - (a - \alpha)^2 - (b - \beta)^2}{2 r \varrho} \qquad 4$$

Und so weiter.



Die Gleichungen 1—4 bedürfen wohl, wenn man die im Texte gegebenen Andeutungen und die Figur benutzt, keiner weitern Ableitung, und für eine Anwendung von 4 kann auf 380 verwiesen werden. — Hat man ausser dem Kreise 3 noch eine Gerade

$$y = a_1 x + b_1 \qquad 5$$

so müssen für allfällige gemeinschaftliche Puncte beider Linien auch beide Gleichungen bestehen. Eliminirt man aber aus denselben y, so erhält man

$$x^2 + 2 x \frac{a_1 b_1}{1 + a_1^2} + \frac{b_1^2 - r^2}{1 + a_1^2} = 0 \qquad 6$$

eine Gleichung, welche, je nachdem

$$\frac{a_1^2 b_1^2}{(1 + a_1^2)^2} \gtreqless \frac{b_1^2 - r^2}{1 + a_1^2} \qquad \text{oder} \qquad r^2 \gtreqless \frac{b_1^2}{1 + a_1^2} \qquad 7$$

ist, zwei reelle, zwei gleiche oder zwei imaginäre Wurzeln hat, so dass die Gerade 5 in Beziehung auf den Kreis 3 eine Secante, oder Tangente, oder äussere Gerade darstellt, je nachdem (vergl. 131 : 4) ihr Abstand d vom Kreismittelpuncte kleiner, ebensogross oder grösser als der Radius ist. — Bleiben wir bei dem Falle der Tangente stehen, und sind x_1 y_1 die Coordinaten des Berührungspunctes, so folgen aus 6 und 5

$$x_1 = -\frac{a_1 b_1}{1 + a_1^2} \qquad y_1 = a_1 x_1 + b_1 = \frac{b_1}{1 + a_1^2}$$

oder

$$a_1 = -\frac{x_1}{y_1} \qquad b_1 = y_1 (1 + a_1^2) = y_1 \left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}\right) = \frac{r^2}{y_1}$$

und für diese letztern Werthe geht 5 über in

$$x x_1 + y y_1 = r^2 \qquad 8$$

so dass letztere Gleichung der Tangente an den Punct $x_1 y_1$ zugehört. — Bezeichnen $\alpha\beta$ die Mittelpunctscoordinaten, r den Radius eines durch drei Puncte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ gehenden Kreises, so bestehen nach 1 die drei Gleichungen

$$r^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = (x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = (x_3 - \alpha)^2 + (y_3 - \beta)^2 \qquad 9$$

und aus diesen folgen

$$\alpha = \frac{y_1(x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2) + y_2(x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2) + y_3(x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2)}{2[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]} \qquad 10$$

$$\beta = \frac{x_1(x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2) + x_2(x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2) + x_3(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)}{2[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]}$$

zur Bestimmung des Mittelpunctes; mit ihrer Hülfe kann sodann aus einer der Gleichungen 9 der Radius gefunden, und durch Einsetzung in 1 die Gleichung des durch die drei Puncte gehenden Kreises erhalten werden. Stellen in letzterer Gleichung (entsprechend dem in 182 bei Entwicklung der Regula Falsi Gesagten) $y_1\, y_2\, y_3$ kleine Werthe vor, welche $y = f(x)$ annimmt, wenn für x zweckmässige Annahmen $x_1\, x_2\, x_3$ gemacht werden, so stellt der aus ihr für $y = 0$ hervorgehende Werth von x offenbar nahe eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ dar; praktisch dürfte es jedoch zweckmässiger sein, einer solchen Rechnung, entsprechend dem von **Culmann** gemachten Vorschlage, eine graphische Bestimmung jenes Werthes zu substituiren.

185. Die Linien zweiten Grades. Auch die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$a y^2 + b x y + c x^2 + d y + e x + f = 0 \qquad 1$$

stellt, da sie continuirlich ist, eine Linie dar, — und zwar muss diese Linie zweiten Grades, da eine der Constanten durch Division weggeschafft werden kann, durch 5 Puncte bestimmt sein. Eliminirt man aus 1 und der Gleichung

$$y = \alpha x + \beta \qquad 2$$

einer Geraden die Grösse x, so findet man die Gleichung

$$y^2[a\alpha^2 + b\alpha + c] + y[\alpha(\alpha d + e) - \beta(\alpha b + 2c)] + \\ + [c\beta^2 - \alpha\beta e + \alpha^2 f] = 0 \qquad 3$$

und es hat daher eine Gerade mit einer Linie zweiten Grades zwei Puncte (Secante, Sehne), oder einen Doppelpunct (Tangente), oder gar keinen Punct gemein.

Da aus 1 durch Differentiation

$$dy = \frac{by + 2cx + e}{bx + 2ay + d} \cdot dx \qquad 4$$

folgt, so entspricht im Allgemeinen jedem kleinen Zuwachse von x ein kleiner Zuwachs von y, also 1 einer Folge von Puncten. — Die übrigen Aussprüche des Textes bedürfen kaum einer weitern Erläuterung. — Speciell für die Linien zweiten Grades sind ausser dem in 2 angeführten Fundamentalwerke von **Appollonius**, und den sie meistens sehr einlässlich behandelnden Werken, welche in 181 aufgezählt wurden, etwa noch folgende Schriften zu erwähnen: „Philippe de **La Hire** (Paris 1640 — Paris 1718; erst Maler und Architekt, dann Mitglied der Academie und Professor der Mathematik in Paris), Théorie des coniques, Paris 1672 in fol (lat. 1685), und: Nouveaux éléments des

sections coniques. Paris 1679 in 12. (Auch 1701 in 8.), — de **l'Hospital**, Traité analytique des sections coniques. Paris 1707 in 4. (2 éd. 1720), — Rob. **Simson**, Treatise on conic sections. Edinburgh 1735 in 4. (lat. Edinburgh 1750; drei erste Bücher deutsch von Camerer, Tübingen 1809 in 8.), — H. P. **Hamilton**, Analytical System of Conic Sections. Cambridge 1830 in 8., — **Schellbach**, Die Kegelschnitte. Berlin 1843 in 8., — G. **Salmon**, Conic Sections. 3. ed. London 1855 in 8. (4. ed. 1863; deutsch von Fiedler, Leipzig 1860), — **Chasles**, Traité des sections coniques. Vol. 1. Paris 1865 in 8., — etc."

136. Axen und Mittelpunct. Bezeichnen u und t die Coordinaten der Mitte der Sehne, so hat man (135:2, 3; 18)

$$t = \alpha u + \beta \quad \text{und} \quad t = \frac{\beta(\alpha b + 2c) - \alpha(\alpha d + e)}{2(a\alpha^2 + b\alpha + c)} \qquad 1$$

und eliminirt man hieraus β, so erhält man für den Ort der Mitten aller um Arc Tg α geneigten Sehnen

$$t = -\frac{\alpha b + 2c}{b + 2a\alpha} u - \frac{\alpha d + e}{b + 2a\alpha} \qquad 2$$

d. h. eine Gerade, eine sog. **Axe.** Setzt man in dieser Gleichung statt α den Factor von u, so erhält man für die Axe aller zu der ersten Axe parallelen Sehnen

$$t = \alpha u + M \qquad 3$$

so dass die neue Axe ein Element des ersten Sehnensystemes ist. Zwei solche Axen oder Sehnensysteme heissen **conjugirt**, und ihr Winkel μ ist (132:2) durch

$$\mathrm{Tg}\,\mu = 2\frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{b(1-\alpha^2) + 2(a-c)\alpha} \qquad 4$$

bestimmt. Für $\mu = 90^0$, d. h. für

$$\alpha = \frac{a - c \mp k}{b} \quad \text{wo} \quad k = \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \qquad 5$$

nennt man die conjugirten Axen **Hauptaxen**; es gibt also nur Ein Paar Hauptaxen, — denn das Doppelzeichen bezieht sich auf beide Axen, nicht auf zwei Paare. Für den Durchschnittspunct zweier Axen erhält man (132:1) nach 2 die von α unabhängigen Coordinaten

$$A = \frac{2ae - bd}{g} \quad B = \frac{2cd - be}{g} \quad \text{wo} \quad g = b^2 - 4ac \qquad 6$$

Es schneiden sich somit alle Axen in demselben Puncte, dem sog. **Mittelpuncte.**

Die erste Gleichung 1 folgt unmittelbar aus 135:2, — die zweite aus 135:3 nach 18 in Folge der Ueberlegung, dass die Ordinate der Sehnenmitte gleich dem arithmetischen Mittel der die Ordinaten der Sehnen-Endpuncte darstellenden Wurzeln der Gleichung 135:3 sein müsse. — Für Aufstellung der Gleichungen 2 und 3 genügen die im Texte gegebenen Andeutungen,

welche auch für Ableitung der Formel 4 ausreichen. — Soll $\mu = 90°$, also $\mathrm{Tg}\,\mu = \infty$ werden, so muss

$$b(1-\alpha^2) + 2(a-c)\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad b \cdot \alpha^2 - 2(a-c)\alpha - b = 0$$

sein, und hieraus ergibt sich 5 unmittelbar. Für diesen Werth von α aber wird der Factor von u in 2

$$-\frac{\alpha b + 2c}{b + 2a\alpha} = -\frac{(a+c\mp k)b}{b^2 + 2a(a-c\mp k)} = \frac{b(a+c\mp k)(b^2+2a^2-2ac\pm 2ak)}{4a^2k^2 - [b^2 + 2a(a-c)]^2}$$

$$= \frac{a-c\pm k}{b}$$

womit bewiesen ist, dass sich das Doppelzeichen, wie der Text behauptet, lediglich auf die beiden Hauptaxen bezieht. — Für den Durchschnittspunct zweier Axen erhält man nach 2 und 132:1 die Coordinaten

$$A = \frac{(\alpha_1 d + e)(b + 2a\alpha_2) - (\alpha_2 d + e)(b + 2a\alpha_1)}{(\alpha_2 b + 2c)(b + 2a\alpha_1) - (\alpha_1 b + 2c)(b + 2a\alpha_2)} = \frac{2ae - bd}{b_2 - 4ac}$$

$$B = \frac{(\alpha_1 b + 2c)(\alpha_2 d + e) - (\alpha_2 b + 2c)(\alpha_1 d + e)}{(\alpha_2 b + 2c)(b + 2a\alpha_1) - (\alpha_1 b + 2c)(b + 2a\alpha_2)} = \frac{2cd - be}{b_2 - 4ac}$$

d. h. 6. — Eine ähnliche Entwicklung wie in dieser und den folgenden Nummern gab ich schon 1837 in meiner damals von meinem unvergesslichen Lehrer J. J. v. **Littrow** provocirten und in den 17. Band der Annalen der Wiener-Sternwarte aufgenommenen Erstlingsarbeit „Beitrag zur Theorie der Curven zweiten Grades“, — nur steuerte ich damals zu Gunsten der Parabel auf den Scheitel los, statt auf den Mittelpunct.

137. Transformation und Eintheilung. Verlegt man den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct, und dreht die Abscissenaxe in die Richtung der einen Hauptaxe, d. h. setzt man (97) $\alpha = A$, $\beta = B$, und

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{a-c-k}{b} \qquad \mathrm{Sin}^2\varphi = \frac{k-a+c}{2k} \qquad \mathrm{Sin}\,2\varphi = -\frac{b}{k} \qquad 1$$

$$\mathrm{Tg}\,2\varphi = -\frac{b}{a-c} \qquad \mathrm{Cos}^2\varphi = \frac{k+a-c}{2k} \qquad \mathrm{Cos}\,2\varphi = \frac{a-c}{k}$$

so geht, wenn noch

$$h = bde - a \cdot e^2 - c \cdot d^2 \qquad 2$$

gesetzt wird, 135:1 in

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} - \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1 \qquad 3$$

über, wo

$$\mathfrak{a}^2 = -\frac{2(h-fg)}{g(a+c-k)} \qquad \mathfrak{b}^2 = \frac{2(h-fg)}{g(a-c-k)} \qquad 4$$

so dass die Linien zweiten Grades nach beiden Axen symmetrisch, und die in die Hauptaxen fallenden Sehnen gleich $2\mathfrak{a}$ (grosse Axe) und $2\mathfrak{b}$ (kleine Axe) sind. — Diejenigen Puncte der grossen Axe, welche von den Endpuncten oder sog. **Scheiteln** der kleinen Axe um die halbe grosse Axe abstehen, heissen **Brennpuncte** und

ihre Entfernung $\mathfrak{a}\,e$ vom Mittelpuncte **Excentricität.** Nach dieser Definition ist

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^2 e^2 + \mathfrak{b}^2 \quad \text{oder, wenn} \quad p = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{2(fg-h)}{(a+c+k)^3}} \qquad 5$$

$$e^2 = 1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} = 1 + \frac{g}{(a+c+k)^2} = 1 - \frac{p}{\mathfrak{a}} \qquad 6$$

Für $x = \mathfrak{a}\,e$ wird $y = p$, d. h. der sog. **Parameter** p ist die Ordinate im Brennpuncte. Umgekehrt hat man

$$\mathfrak{a} = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{p}{g}(a+c+k)^2 \qquad 7$$

$$\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}\,p} = \mathfrak{a}\sqrt{1-e^2} = p\,(a+c+k) : \sqrt{-g} \qquad 8$$

Man sieht aus diesen Beziehungen, dass die Werthe

$g = -$	$e < 1$	$\mathfrak{a} = +$	$\mathfrak{b} = +$
0	$= 1$	∞	∞
$+$	> 1	$-$	i

mit einander correspondiren, und hierauf stützt sich die Eintheilung der Linien zweiten Grades in **Ellipsen** ($g = -$), **Parabeln** ($g = 0$) und **Hyperbeln** ($g = +$). — Verlegt man den Anfangspunct in einen Scheitel der grossen Axe, d. h. lässt man in $3 : x$ in $x - \mathfrak{a}$ übergehen, so erhält man für Ellipse, Parabel, Hyperbel

$$y^2 = 2px - \frac{p}{\mathfrak{a}}x^2 \qquad y^2 = 2px \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{\mathfrak{a}}x^2 \qquad 9$$

Bezeichnen ferner r_1 und r_2 die Radien-Vectoren eines Punctes in Beziehung auf die beiden Brennpuncte, so hat man

$$\begin{matrix} r_1^2 = (x + \mathfrak{a}\,e)^2 + y^2 & \text{oder} & r_1 = \mathfrak{a} + e\,x \\ r_2^2 = (x - \mathfrak{a}\,e)^2 + y^2 & & r_2 = \mathfrak{a} - e\,x \end{matrix} \qquad 10$$

also für die Ellipse, wo $e\,x < \mathfrak{a}$, $r_1 + r_2 = 2\,\mathfrak{a}$, — für die Hyperbel, wo $e\,x > \mathfrak{a}$, $r_1 - r_2 = 2\,\mathfrak{a}$. — Bezeichnet man endlich die Winkel, welche r_1 und r_2 mit der grossen Axe gegen den nächstliegenden Scheitel hin bilden, mit v, so hat man noch

$$r = \mathfrak{a} \pm e\,(\mp r \operatorname{Cos} v \mp \mathfrak{a}\,e) \quad \text{oder} \quad r = \frac{p}{1 + e \,.\, \operatorname{Cos} v} \qquad 11$$

als Polargleichung der Linien zweiten Grades in Beziehung auf den Brennpunct. — Bildet die grosse Axe mit der Abscissenaxe einen Winkel n, so geht in $11 : v$ in $(v - n)$ über, und man erhält für drei Puncte successive

$$p = r_1[1 + e\operatorname{Cos}(v_1 - n)] = r_2[1 + e\operatorname{Cos}(v_2 - n)] = r_3[1 + e\operatorname{Cos}(v_3 - n)]$$

$$e = \frac{r_1 - r_2}{r_2\operatorname{Cos}(v_2 - n) - r_1\operatorname{Cos}(v_1 - n)} = \frac{r_1 - r_3}{r_3\operatorname{Cos}(v_3 - n) - r_1\operatorname{Cos}(v_1 - n)} \qquad 12$$

$$\operatorname{Tg} n = \frac{r_1 r_2(\operatorname{Cos} v_2 - \operatorname{Cos} v_1) + r_2 r_3(\operatorname{Cos} v_3 - \operatorname{Cos} v_2) + r_3 r_1(\operatorname{C} v_1 - \operatorname{C} v_3)}{r_1 r_2(\operatorname{Sin} v_1 - \operatorname{Sin} v_2) + r_2 r_3(\operatorname{Sin} v_2 - \operatorname{Sin} v_3) + r_3 r_1(\operatorname{S} v_3 - \operatorname{S} v_1)}$$

so dass eine Linie zweiten Grades bestimmt ist, wenn man ausser dem Brennpuncte drei ihrer Puncte kennt.

Die erste der Formeln 1 entspricht dem einen Werthe aus 136 : 1, — die übrigen sind daraus mit Hülfe der goniometrischen Formeln 96 : 3 und 98 : 9, 11 abgeleitet. — Führt man nach 97 : 1

$$x = A + x' \operatorname{Cos}\varphi - y' \operatorname{Sin}\varphi \qquad y = B + x' \operatorname{Sin}\varphi + y' \operatorname{Cos}\varphi$$

in 135 : 1 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= a(B + x'\operatorname{Sin}\varphi + y'\operatorname{Cos}\varphi)^2 + \\ &+ b(B + x'\operatorname{Sin}\varphi + y'\operatorname{Cos}\varphi)(A + x'\operatorname{Cos}\varphi - y'\operatorname{Sin}\varphi) + \\ &+ c(A + x'\operatorname{Cos}\varphi - y'\operatorname{Sin}\varphi)^2 + d(B + x'\operatorname{Sin}\varphi + y'\operatorname{Cos}\varphi) + \\ &+ e(A + x'\operatorname{Cos}\varphi - y'\operatorname{Sin}\varphi) + f \\ &= a'.y'^2 + b'.y'x' + c'.x'^2 + d'.y' + e'.x' + f' \end{aligned}$$

wo

$$a' = a\operatorname{Cos}^2\varphi - \frac{b}{2}\operatorname{Sin}2\varphi + c\operatorname{Sin}^2\varphi = a\frac{k + a - c}{2k} + \frac{b^2}{2k} + c\frac{k - a + c}{2k} = \\ = \frac{a + c + k}{2}$$

$$b' = a\operatorname{Sin}2\varphi + b\operatorname{Cos}2\varphi - c\operatorname{Sin}2\varphi = -\frac{ab}{k} + b\frac{a - c}{k} + \frac{bc}{k} = 0$$

$$c' = a\operatorname{Sin}^2\varphi + \frac{b}{2}\operatorname{Sin}2\varphi + c\operatorname{Cos}^2\varphi = a\frac{k - a + c}{2k} - \frac{b^2}{2k} + c\frac{k + a - c}{2k} = \\ = \frac{a + c - k}{2}$$

$$d' = 2aB + bA + d = 2a\frac{2cd - be}{g} + b\frac{2ae - bd}{g} + d = 0$$

$$e' = 2cA + bB + e = 2c\frac{2ae - bd}{g} + b\frac{2cd - be}{g} + e = 0$$

$$f' = aB^2 + bAB + cA^2 + dB + eA + f = \\ = \frac{a(2cd - be)^2 + b(2cd - be)(2ae - bd) + c(2ae - bd)^2}{g^2} + \\ + \frac{d(2cd - be) + e(2ae - bd)}{g} + f = \frac{h.g}{g^2} - \frac{2h}{g} + f = \frac{gf - h}{g}$$

oder also die mit 3 und 4 übereinstimmende Gleichung

$$0 = \frac{a + c + k}{2}.y'^2 + \frac{a + c - k}{2}.x'^2 - \frac{h - fg}{g}$$

Es geht aus dieser Ableitung hervor, dass wenn man

$$x = x'\operatorname{Cos}\varphi - y'\operatorname{Sin}\varphi \qquad y = x'\operatorname{Sin}\varphi + y'\operatorname{Cos}\varphi$$

in 135 : 1 eingeführt, d. h. nur die Abscissenaxe in die Richtung der einen Hauptaxe gedreht, und nicht auch den Anfangspunct verlegt hätte, a', b', c' dennoch dieselben Werthe erhalten haben würden, dagegen $d' = d$, $e' = e$ und $f' = f$ geblieben wäre. — Um in 5 und 6 je den zweiten Werth von p und e^2 zu erhalten, hat man mit Hülfe von 4

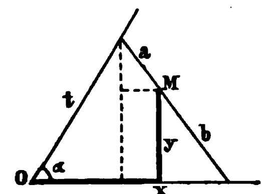
$$p^2 = \frac{b^4}{a^2} = \frac{4(h - fg)^2}{g^2(a + c + k)^2} \cdot \frac{g(a + c - k)}{2(h - fg)} = \frac{2(h - fg)[(a + c)^2 - k^2]}{g(a + c + k)^3} = \\ = \frac{2(h - fg)(4ac - b^2)}{g(a + c + k)^3} = \frac{2(fg - h)}{(a + c + k)^3}$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{a + c - k}{a + c + k} = 1 + \frac{g}{(a + c + k)^2}$$

alle übrigen Beziehungen, und so auch die in 7 und 8 enthaltenen brauchen keine weitere Ableitung. — Aus 3 folgt mit Hülfe von 8

$$y^2 = (a^2 - x^2)(1 - e^2) \qquad 13$$

und substituirt man diesen Werth von y^2 in die ersten, einfach dem pythagoräischen Lehrsatze entsprechenden Gleichungen 10, so erhält man die zweiten. — Die Gleichungen 11 und die ersten Gleichungen 12 bedürfen wohl keiner weitern Ableitung, — die zweiten und dritten Gleichungen 12 aber gehen aus den ersten ganz einfach hervor, indem man je zwei durch letztere gegebene Werthe von p einander gleichsetzt, aus jeder der zwei neuen Gleichungen e berechnet, die beiden Werthe wieder einander gleichsetzt, und aus der erhaltenen Gleichung, nachdem man sie beidseitig durch Cos n dividirt hat, die nunmehr einzige Unbekannte Tg n ermittelt. — Die schon von Proclus, Guido Ubaldi und Stevin behandelte, meist aber nach Claude **Mydorge** (Paris 1585 — Paris 1647; Schatzmeister in der Generalität von Amiens), welcher sie in seinem Werke „Prodromus catoptricorum et dioptricorum, sive conicorum operis libri 2. Parisiis 1631 in fol. (neue Ausgabe in 4 Büchern 1639 und später)" besprach, benannte Aufgabe „den Weg eines Punctes einer Geraden zu finden, welche auf zwei festen Geraden gleitet", lässt sich auf folgende Weise ganz einfach lösen: Theilt der beschreibende Punct M die Gerade im Verhältnisse $a : b = m$, so hat man



$$\frac{t \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha}{y} = \frac{a+b}{b} = 1 + m$$

oder

$$t \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha = y(1+m)$$
$$t \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = y(1+m)\,\mathrm{Ctg}\,\alpha$$

und somit, da nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$(x - t \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha)^2 + (t\,\mathrm{Sin}\,\alpha - y)^2 = a^2$$

ist, sofort

$$[(1+m)^2\,\mathrm{Ctg}^2\,\alpha + m^2]\,y^2 - 2\,x\,y\,(1+m)\,\mathrm{Ctg}\,\alpha + x^2 - a^2 = 0 \qquad 14$$

Es ist also der gesuchte Weg eine Linie zweiten Grades, und zwar, da $g = -4m^2$ wird, eine Ellipse, welche wegen $A = 0 = B$ ihren Mittelpunct in O hat. — Für den speciellen Fall, wo $\alpha = 90^0$ und $a < b$, folgt $k = 1 - m^2$, $\mathfrak{a} = b$, $\mathfrak{b} = a$. Für einlässlichere Behandlung dieser Aufgabe vergleiche z. B. „Heinr. **Brändli**, Das Problem des Mydorge. Schaffhausen 1860 in 4."

138. Die Tangenten und Normalen. Bezeichnen x_1 und $x_1 + i$ die Abscissen zweier Puncte einer Curve $y = f(x)$, so hat die sie verbindende Gerade (132 : 4; 60) die Gleichung

$$y - y_1 = \frac{f(x_1+i) - f(x_1)}{(x_1+i) - x_1}(x - x_1) = [f'(x_1) + \frac{i}{2}f''(x_1) + \ldots](x - x_1)$$

Setzt man $i = 0$, so gehen die beiden Puncte in einen Doppelpunct und die Secante in eine Tangente über, so dass Letztere die Gleichung

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1) = p \cdot (x - x_1) \qquad 1$$

die zu ihr senkrechte Normale aber (132) die Gleichung

$$y - y_1 = -(x_1 - x) : p \qquad 2$$

hat, wo zur Abkürzung $d\,y_1 : d\,x_1 = p$ gesetzt wurde.

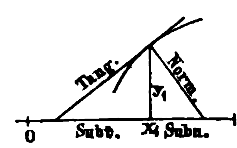
Die Gleichungen 1 und 2 bedürfen keiner weitern Ableitung. — Da aus 134:3 sofort $p = -x_1 : y_1$ folgt, so erhält man nach 1 für die Tangente an den Kreis

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \qquad \text{oder} \qquad y y_1 + x x_1 = y_1^2 + x_1^2 = r^2$$

und nach 2 für die Normale

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{y_1}{x_1} x$$

Erstere Gleichung stimmt mit 134:8 überein, — letztere sagt einfach aus, dass beim Kreise die Normale immer durch den Mittelpunct geht. Für weitere Anwendungen von 1 und 2 können die folgenden Sätze verglichen werden. —



Versteht man unter Tangente und Normale zunächst die zwischen dem betreffenden Puncte der Curve und der Abscissenaxe enthaltenen Stücke derselben, — unter Subtangente und Subnormale aber ihre Projectionen auf die Abscissenaxe, — und bedenkt, dass 1 oder 2 für $y = 0$

$$x = x_1 - \frac{y_1}{p} \qquad \text{oder} \qquad x = x_1 + y_1 \cdot p$$

ergeben, so erhält man offenbar

$$\text{Subt.} = \frac{y_1}{p} \qquad \text{Tang.} = \sqrt{y_1^2 + \text{Subt.}^2} = \frac{y_1}{p}\sqrt{1 + p^2} \qquad 3$$

$$\text{Subn.} = y_1 \cdot p \qquad \text{Norm.} = \sqrt{y_1^2 + \text{Subn.}^2} = y_1 \sqrt{1 + p^2} \qquad 4$$

wo p die Tangens des Winkels bezeichnet, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet.

139. Der Krümmungskreis. Bezeichnen x, $x + i$ und $x - i$ die Abscissen dreier Puncte der Curve $y = f(x)$, — A, B, R aber Mittelpunctscoordinaten und Radius des durch sie bestimmten Kreises, so hat man (134)

$$R^2 = [x - A]^2 + [f(x) - B]^2 = [x \pm i - A]^2 + [f(x \pm i) - B]^2 \qquad 1$$

und hieraus folgen (60)

$$B = \frac{1 + f(x) f''(x) + f'(x)^2 + i \cdot \varphi(x, i)}{f''(x) + i \cdot \psi(x, i)} \qquad 2$$

$$A = x + [f(x) - B] f'(x) + i \cdot \theta(x, i)$$

Setzt man $i = 0$, so wird aus den drei Puncten ein dreifacher Punct und der Kreis zum sog. **Krümmungskreise**, für welchen, wenn $k = 1 + f'(x)^2$,

$$A = x - \frac{k f'(x)}{f''(x)} \qquad B = f(x) + \frac{k}{f''(x)} \qquad R = \frac{k^{3/2}}{f''(x)} \qquad 3$$

Der Ort der Krümmungsmittelpuncte einer Curve heisst **Evolute**, — diejenige Curve, welche eine gegebene Linie zur Evolute hat, **Evolvente** derselben.

Aus 1 folgt zunächst

$$[x-A]^2+[f(x)-B]^2=[x-A]^2\pm 2i(x-A)+i^2+[f(x)-B]^2$$
$$\pm 2i[f(x)-B]f'(x)+$$
$$+i^2[f'(x)^2+(f(x)-B)f''(x)]\pm$$
$$\pm\frac{i^3}{3}[(f(x)-B)f'''(x)+3f'(x)f''(x)]+\ldots$$

oder, wenn man beidseitig hebt, und durch $\pm 2i$ theilt

$$0=x-A+[f(x)-B]f'(x)\pm {}^1/_2[1+f'(x)^2+(f(x)-B)f''(x)]+$$
$$+\frac{i^2}{6}[(f(x)-B)f'''(x)+3f'(x)f''(x)]\pm\ldots$$

Schreibt man letztere Gleichung für beide Zeichen auf, und addirt oder subtrahirt, so erhält man die beiden 2, und aus diesen folgen für $i=0$ sofort die beiden ersten der 3, während mit ihrer Hülfe sodann aus 1 die dritte 3 sofort hervorgeht. — Für die Anwendung dieser Formeln, sowie für Beispiele von Evoluten und Evolventen können die folgenden Sätze, z. B. 143 und 149, verglichen werden.

140. Die Quadratur. Betrachtet man die von zwei, den Abscissen x und $x+\Delta x$ entsprechenden Ordinaten y und $y+\Delta y$, der Curve und der Abscissenaxe eingeschlossene Fläche als Flächenelement, so hat man

$$\Delta F > y.\Delta x$$
$$\Delta F < (y+\Delta y)\Delta x$$

also an der Grenze

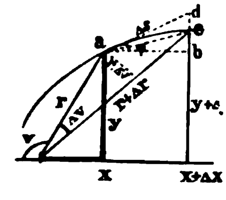
$$dF=y.dx \qquad \text{oder} \qquad F=\int_a^b y.dx \qquad \mathbf{1}$$

wo a und b die Grenzwerthe der die zu berechnende Fläche bestimmenden Abscisse bezeichnen. Entsprechend hat man für das von r, $r+\Delta r$ und der Curve eingeschlossene Flächenelement

$$df=\frac{r^2.dv}{2} \qquad \text{oder} \qquad f=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2.dv \qquad \mathbf{2}$$

Die zur sog. **Quadratur** nach 1 oder 2 geforderte Integration wird mechanisch durch Umfahren mit den sog. **Planimetern** von Oppikofer-Wetli, Amsler, etc. erhalten.

Die im Texte gegebene Ableitung der Formeln 1 und 2 dürfte genügen; dagegen möchte, abgesehen von den in folgenden Sätzen gegebenen Anwendungen, als vorläufiges Beispiel die Quadratur des Kreises hier Platz finden: Nach 1 hat man mit Hülfe von 134:3 die Fläche des Viertelkreises



$$\frac{F}{4}=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}.dx$$

oder also mit Hülfe von 67:14

$$\frac{F}{4}=\left[\frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}+\frac{r^2}{2}\text{Arc Sin}\frac{x}{r}\right]_0^r=\frac{r^2}{2}\text{Arc Sin }1$$
$$=\frac{r^2\pi}{4} \qquad \text{oder} \qquad F=r^2\pi$$

wie in 123 : 1. — Da der Schwerpunct des Flächenelementes d F offenbar die Coordinaten x und $^1/_2$ y hat, so liegt nach 133 : 1 der Schwerpunct der durch 1 gegebenen Fläche F in

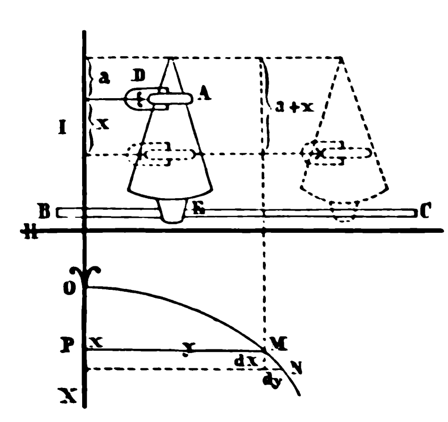
$$x = \frac{1}{F}\int_a^b x\,y\,d\,x \qquad y = \frac{1}{2F}\int_a^b y^2\,d\,x \qquad \mathbf{2}$$

So z. B. hat man für den Kreisquadranten mit Benutzung obiger Bestimmung und mit Hülfe von 68 : 4

$$x = \frac{4}{r^2\pi}\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,.\,x\,d\,x = \frac{4}{r^2\pi}\left[{}_0^r - \frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\right] = \frac{4\,r}{3\pi}$$

$$y = \frac{2}{r^2\pi}\int_0^r (r^2 - x^2)\,d\,x = \frac{2}{r^2\pi}\left[{}_0^r\, r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right] = \frac{4\,r}{3\pi}$$

und der Schwerpunct des Halbkreises steht somit ebenfalls um $4\,r : 3\pi$ vom Centrum ab. — Der 1826 von Johannes **Oppikofer** (Unter-Oppikon im Thurgau 1783 — Frauenfeld 1864; Ingenieur und Strasseninspector in Bern und Thurgau) erfundene Planimeter besteht aus einem Kegel, der über einem Brette so aufgestellt ist, dass einerseits seine obere Kante demselben parallel steht, und dass er anderseits frei um seine Axe rotiren kann. Auf dem Kegel liegt eine zu der erwähnten Kante senkrechte Rolle A, deren in eine Spitze auslaufender Träger in der Coulisse I des Brettes verschiebbar ist, während sich hinwieder das ganze Brett in einer zu I senkrechten Coulisse II eines zweiten Brettes bewegt, wobei der Kegel, indem ein ebenfalls



kegelförmiger Ansatz E desselben sich auf einer am zweiten Brette befestigten Schiene B C reibt, eine dieser Bewegung entsprechende Drehung erhält. Führt man die Spitze mit Hülfe der beiden Bewegungen zu irgend einem Puncte O, so erhält die Rolle A eine bestimmte Distanz a von der Spitze des Kegels, und zugleich steht ein bestimmter Punct α der auf ihrem Umfange befindlichen Theilung dem Index D gegenüber. Wird die Spitze von O nach P geführt, so gleitet die Rolle, ohne dass sich der Kegel dreht, um x auf der Kante fort; wird sie nachher von P nach M geführt, so behält die Rolle die Entfernung (a + x) von der Spitze des Kegels, dagegen wird, wie oben angegeben, durch die längs der Coulisse II nothwendig gewordene Verschiebung, der Kegel, und damit auch die sich an ihm reibende Rolle A, sich drehen, also Letztere nun eine neue Ablesung β' ergeben, — und zwar wird diese Drehung einerseits y, und anderseits (x + a) proportional sein, so dass

$$\beta' - \alpha = m\,(a + x)\,y$$

zu setzen ist, wo m eine vom Apparate abhängige Constante bezeichnet. Wird die Spitze von M nach N gebracht, so wird entsprechend eine neue

$$\Delta\beta = m\,(a + x + d\,x)\,d\,y = m\,(a + x)\,d\,y$$

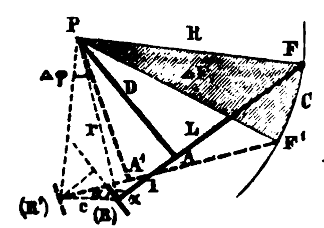
statt haben, und somit, wenn die Spitze von M nach O geführt wird, und dann die Rolle die Ablesung β ergibt, eine Summe von Drehungen

$$\beta-\beta'=m\int_y^o(a+x)\,dy=-m\int_o^y(a+x)\,dy=-m\,a\,y-m\int_o^y x\,dy=$$
$$=-m\,a\,y-m[x\,y-\int_o^x y.dx]=-m(a+x)y+m\int_o^x y.dx$$

entstehen, so dass schliesslich

$$\beta-\alpha=(\beta-\beta')+(\beta'-\alpha)=m\int_o^x y.dx \qquad 4$$

oder die Ablesungsdifferenz an der Rolle der umfahrenen Fläche proportional ist, somit Letztere wirklich durch Erstere gemessen werden kann. — Der Winkel des Kegels, der bei den ersten Erstellungen des Oppikofer'schen Planimeters durch die Mechaniker Johannes **Pfäffli** (Signau 1802 — Bern 1828) und Heinrich Rudolf **Ernst** (Bern 1803 — Boulogne 1863) nur $9\frac{1}{2}°$ betrug, ist nach der gegebenen Theorie willkürlich, und es ist das unbestrittene Verdienst des Ingenieur Kaspar **Wetli** (Männedorf 1822), etwa 1849 gezeigt zu haben, dass unter Vergrösserung desselben auf 90° die praktische Ausführung und Brauchbarkeit wesentlich gewinne. — Für die weitere Geschichte dieses Planimeters, — die zu Gunsten des Trigonometers Johann Martin **Hermann** (Pfronten bei Füssen 1785 — München 1841), der schon 1814 die, nachher aber wieder total in Vergessenheit gerathene Idee gehabt haben soll, in ähnlicher Weise eine Fläche durch blosses Umfahren zu bestimmen, in neuester Zeit erhobene Prioritätsfrage, — die verschiedenen nach und nach für die Construction vorgeschlagenen Modificationen, — etc., vergl. „Christoph **Trunk**, Ingenieur zu Eisenach: Die Planimeter, deren Theorie, Praxis und Geschichte. Halle 1865 in 8., — Ernst **Fischer**, Professor in Aarau und München: Die mechanische Planimetrie, ihre geschichtliche, theoretische und praktische Bedeutung (Schweiz. polyt. Zeitschr. 1868), — etc.“ — Der von Jakob **Amsler** (Stalden bei Brugg 1823; früher Professor der Mathematik in Schaffhausen, jetzt Chef einer mechanischen Werkstätte daselbst) etwa 1855 erfundene Polarplanimeter besteht aus zwei Stäben D und L + l, welche in A durch eine längs L + l etwas verschiebbare Charnière verbunden sind. Am Ende von D befindet sich eine Spitze P, um diesen Endpunct in der Operationsebene als eine Art Pol fixiren zu können. Bei F ist ein sog. Fahrstift, um den Endpunct von L längs einer gegebenen Contour hinzuführen. Am Ende von l sitzt eine getheilte Rolle (R), an der ein Index spielt, auf der Operationsebene. Wird der Fahrstift von F nach einem benachbarten Puncte F¹ geführt, so dreht sich der Radius Vector R um einen kleinen Winkel $\Delta\varphi$, und beschreibt dabei eine Fläche ΔF; gleichzeitig geht A nach A¹, und die Rolle nach (R¹), wobei der Radius Vector r ebenfalls nahe die Drehung $\Delta\varphi$ macht, während die Rolle in Folge ihrer Friction eine Drehung ΔM erleidet. Ist c der nahe mit einer Geraden zu verwechselnde Weg, den die Rolle zurücklegt, und α sein Winkel mit der Rolle, so ist, da nur die in die Rollenebene fallende Componente von c sich als Drehung der Rolle zeigen kann,



$$\Delta M=c.\mathrm{Cos}\,\alpha \qquad \text{und da nahe} \qquad \frac{c}{r}=\Delta\varphi=\frac{C}{R}$$

während aus den Dreiecken PFR und PAR trigonometrisch

$$R^2 = r^2 + (L+l)^2 - 2r(L+l)\operatorname{Cos}\alpha \qquad D^2 = r^2 + l^2 - 2rl\operatorname{Cos}\alpha$$

also durch Subtraction

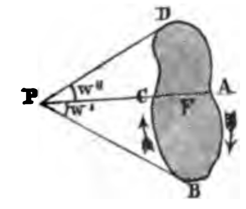
$$R^2 - D^2 = L^2 + 2Ll - 2rL\operatorname{Cos}\alpha \quad \text{oder} \quad \operatorname{Cos}\alpha = \frac{L^2 + D^2 + 2Ll - R^2}{2rL}$$

so erhält man somit

$$\Delta M = r\operatorname{Cos}\alpha \, . \, \Delta\varphi = \frac{L^2 + D^2 + 2Ll}{2L} \, . \, \Delta\varphi - \frac{R^2 \, . \, \Delta\varphi}{2 \, . \, L}$$

oder durch Integration zwischen den Grenzen 0 und φ, wenn die mit den Dimensionen des Instrumentes zusammenhängende Constante

$$\frac{L^2 + D^2 + 2Ll}{2} = C \qquad 5$$



gesetzt, und 2 berücksichtigt wird,

$$F = C \, . \, w - L \, . \, M \qquad 6$$

Umschreibt man mit dem Fahrstift eine geschlossene Figur, ausserhalb welcher der Pol P liegt, von A im Sinne des Uhrzeigers bis wieder nach A, und ist die Theilung der Rolle so beschaffen, dass Drehen nach links die Ablesung vermehrt, so hat man

$$\begin{aligned} F &= PABP - PBCP - PCDP + PDAP \\ &= Cw' + L \, . \, M' - (Cw' - LM'') - (Cw'' - LM''') + (Cw'' + LM^{IV}) \\ &= LM \end{aligned} \qquad 7$$

wo M die Gesammtdrehung der Rolle bezeichnet. Ist daher die Theilung an Letzterer so eingerichtet, dass sie für eine bestimmte Längeneinheit L M in entsprechenden Flächeneinheiten gibt, so erhält man in diesem Falle aus der Differenz der Ablesungen vor Beginn und am Schlusse der Umschreibung unmittelbar die Fläche. Um das Instrument hierauf zu prüfen, umschreibt man z. B. einen Kreis von gegebenem Radius, und sieht, ob die abgelesene Fläche mit der berechneten genau übereinstimmt; ist es nicht der Fall, so wird A (s. Fig. 3) etwas verschoben, die Probe wiederholt, etc. — Hat man eine grössere Figur zu messen, so wird der Pol innerhalb derselben befestigt, so dass man nun eine volle Umdrehung $w = 2\pi$ zu machen hat, um die Figur zu umfahren, wo sodann statt 6 die direct 5 entnommene Formel

$$F = C \, . \, 2\pi - L \, . \, M \qquad 8$$

anzuwenden ist. In diesem Falle ist also eine genaue Kenntniss von $C \, . \, 2\pi$ nothwendig, und um diese zu erhalten, wird wieder ein Kreis, aber von relativ grossem Radius, angewandt, — der Pol P in seinem Mittelpunct befestigt, — und das erhaltene L M um das berechnete F vermehrt. — Vergl. für den Polarplanimeter ausser den oben erwähnten Schriften: „Amsler, Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter (Zürch. Vierteljahrsschr. 1856), — Emil Schinz (Zürich 1817; Professor der Mathematik und Physik in Aarau, Bern und Chur), Ueber das Polarplanimeter von Prof. Amsler in Schaffhausen (Berner Mitth. 1857), — etc."

141. Die Rectification. Für das Bogenelement Δs hat man (s. Fig.)

$$\Delta s > ae = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{r^2 \, . \, \Delta v^2 + \Delta r^2}$$

$$\Delta s < ad + de = \frac{\Delta x}{\operatorname{Cos}\varphi} + \Delta x \, . \, \operatorname{Tg}\varphi - \Delta y$$

also $$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1+\mathrm{Tg}^2\varphi} + \mathrm{Tg}\,\varphi - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nun ist (138)

$$\lim.\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{Tg}\,\varphi$$

also, wenn $dy : dx = p$ und $dr : dv = q$ gesetzt werden,

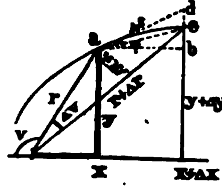
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2} \qquad \text{oder} \qquad s = \int_a^b \sqrt{1+p^2}\,.\,dx \qquad \textbf{1}$$

und entsprechend

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+q^2}\,.\,dv \qquad \textbf{2}$$

womit die sog. **Rectification** geleistet ist.

Die Aufstellung der Formeln 1 und 2 bedarf, ausser dem Hinweise auf die Figur, nach dem im Texte Gesagten kaum einer weitern Erläuterung. Beispielsweise hat man nach 1 und 65 : 4 für den Halbkreis, da wie 138 für den Kreis $p = -x : y$ ist,



$$s = \int_{-r}^{+r} \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = r\int_{-r}^{+r}\frac{dx}{y} = r\int_{-r}^{+r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} =$$

$$= r\left[\overset{+r}{\underset{-r}{}}\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{x}{r}\right] = r\,[\mathrm{Arc\,Sin}\,1 - \mathrm{Arc\,Sin}\,(-1)] = r\pi$$

Für weitere Anwendungen vergleiche die folgenden Sätze. — Der Schwerpunct eines Bogens, dessen Endpuncte die Abscissen a und b haben, hat nach 133 : 1 offenbar die Coordinaten

$$x = \frac{1}{s}\int_a^b x\,.\,ds \qquad y = \frac{1}{s}\int_a^b y\,.\,ds \qquad \textbf{3}$$

also z. B. derjenige des Halbkreises, da für den Kreis wie oben

$$ds = \frac{r\,dx}{y} = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

ist, mit Hülfe von 68 : 3 die Coordinaten

$$x = \frac{1}{r\pi}\int_{-r}^{+r}\frac{rx\,.\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{+r}\frac{2x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2\pi}\left[\overset{+r}{\underset{-r}{}} -2\sqrt{r^2-x^2}\right] = 0$$

$$y = \frac{1}{r\pi}\int_{-r}^{+r} r\,.\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\overset{+r}{\underset{-r}{}} x\right] = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366\,.\,r$$

und ähnlich in andern Fällen.

142. Die Ellipse. Hat man zwei concentrische Kreise der Radien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, zieht (s. Fig. 1) cd beliebig, ef ∥ cg und df ⊥ cg, so ist (137 : 3) f ein Punct einer Ellipse der Halbaxen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und eine durch zwei solche Puncte f_1 und f_2 bestimmte Gerade hat die Gleichung

$$y = x\,.\,\mathrm{Tg}\,\theta + \beta \qquad \textbf{1}$$

wo, wenn $\varphi + \psi = 2\gamma$ und $\varphi - \psi = 2\delta$ ist,

$$\mathrm{Tg}\,\theta = -\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\,\mathrm{Ctg}\,\gamma \qquad \beta = \mathfrak{b}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\delta}{\mathrm{Sin}\,\gamma} \qquad \textbf{2}$$

und die Länge

$$f_1 f_2 = \frac{a\,b \,\text{Sin}\, 2\,\delta}{\beta \,.\, \text{Cos}\, \theta} \qquad 3$$

Sind F_1 und F_2 (s. Fig. 2) die Brennpuncte der Ellipse, also (137) $r_1 + r_2 = 2\,a$, und macht man $m\,c = r_2$ und $m\,d \perp c\,F_2$, so ist $r_1 + r_2$ (87) die kürzeste Verbindung von F_1 und F_2 mit $m\,d$, — also liegt jeder andere Punct von $m\,d$ ausser der Ellipse, oder es ist $m\,d$ Tangente, — die dazu Senkrechte $m\,n$, welche $\angle(r_1, r_2)$ halbirt, Normale in m. — Für $a = b$ wird die Ellipse zum Kreise.

Es ist offenbar

$$x_1 = a\,\text{Cos}\,\varphi \qquad y_1 = b\,\text{Sin}\,\varphi \qquad 4$$

also

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \text{Cos}^2\varphi + \text{Sin}^2\varphi = 1$$

Ebenso hat man

$$x_2 = a\,\text{Cos}\,\psi \qquad y_2 = b\,\text{Sin}\,\psi$$

also nach 132 : 3

$$f_1 f_2 = \sqrt{(a\,\text{Cos}\,\varphi - a\,\text{Cos}\,\psi)^2 + (b\,\text{Sin}\,\varphi - b\,\text{Sin}\,\psi)^2}$$

$$= 2\,\text{Sin}\,\delta \sqrt{a^2\,\text{Sin}^2\gamma + b^2\,\text{Cos}^2\gamma} \qquad 5$$

Ferner erhält man

$$\text{Tg}\,\theta = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b\,(\text{Sin}\,\varphi - \text{Sin}\,\psi)}{a\,(\text{Cos}\,\varphi - \text{Cos}\,\psi)} = -\frac{b}{a}\,\text{Ctg}\,\gamma$$

$$\frac{\beta - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad \beta = y_1 + \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \,.\, x_1 = b\,(\text{Sin}\,\varphi + \text{Ctg}\,\gamma \,.\, \text{Cos}\,\varphi) = \frac{b\,\text{Cos}\,\delta}{\text{Sin}\,\gamma}$$

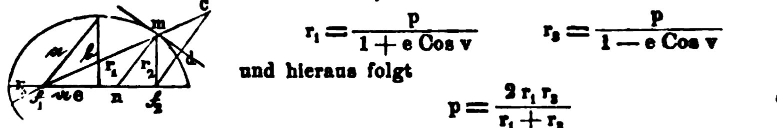
d. h. die 2, und mit ihrer Hülfe

$$b^2\,\text{Cos}^2\gamma = a^2\,\text{Sin}^2\gamma\,\text{Tg}^2\theta \qquad \text{Sin}\,\gamma = \frac{b \,.\, \text{Cos}\,\delta}{\beta}$$

also

$$\sqrt{a^2\,\text{Sin}^2\gamma + b^2\,\text{Cos}^2\gamma} = \frac{a\,\text{Sin}\,\gamma}{\text{Cos}\,\theta} = \frac{a\,b\,\text{Cos}\,\delta}{\beta\,\text{Cos}\,\theta} \qquad 6$$

woraus in Verbindung mit 5 sofort 3 folgt. — Verlängert man r_1 über F_1 hinaus bis an die Ellipse, so hat man, wenn diese Verlängerung mit r_2 bezeichnet wird, nach 137 : 11



$$r_1 = \frac{p}{1 + e\,\text{Cos}\,v} \qquad r_2 = \frac{p}{1 - e\,\text{Cos}\,v}$$

und hieraus folgt

$$p = \frac{2\,r_1\,r_2}{r_1 + r_2} \qquad 7$$

oder es ist nach 17 : 7 der Parameter das harmonische Mittel zwischen den beiden Segmenten einer sog. **Focalsehne.**

143. Weitere Beziehungen. Da aus der Mittelpunctsgleichung der Ellipse (137)

$$f'(x) = \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y} \qquad f''(x) = \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\frac{b^4}{a^2\,y^3} \qquad 1$$

folgen, so haben für sie (138) Tangente und Normale die Gleichungen

$$y - y_1 = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}(x - x_1) \quad \text{und} \quad y - y_1 = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}(x - x_1) \qquad 2$$

während für den Krümmungskreis (139)

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3 = \frac{e^2}{a^2} . x^3 \qquad B = \frac{b^2 - a^2}{b^4} . y^3 = -\frac{e^2}{p^2} . y^3 \qquad \mathbf{3}$$

$$R = \frac{[a^4 y^2 + b^4 x^2]^{3/2}}{a^4 b^4} = \frac{[a^2 - x^2 + b^2 - y^2]^{3/2}}{a b} \qquad \mathbf{4}$$

folgen. Ferner hat man, wenn α die sog. **Abplattung**, d. h. die Differenz der Axen in Theilen der grossen Axe, bezeichnet, mit Hülfe von 137 : 6—8

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{p}{b} \qquad \mathbf{5}$$

$$b = a(1 - \alpha) \qquad e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \qquad p = b(1 - \alpha) \qquad \mathbf{6}$$

$$\text{Tg}\,\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a^2}{b^2} . \text{Tg}\,v = \frac{\text{Tg}\,v}{1 - e^2} \qquad \mathbf{7}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \text{Tg}\,\varphi . \text{Tg}\,v}} = \frac{a \,\text{Cos}\,\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \,\text{Sin}^2 \varphi}} \qquad \mathbf{8}$$

$$y = x \,\text{Tg}\,v = \frac{a(1 - e^2)\,\text{Sin}\,\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \,\text{Sin}^2 \varphi}} \qquad \mathbf{9}$$

$$s = e^2 x = (2\alpha - \alpha^2)\, r \,\text{Cos}\,v \qquad \mathbf{10}$$

$$r = \frac{x}{\text{Cos}\,v} = \frac{a . \text{Sec}\,v}{\sqrt{1 + \text{Tg}\,\varphi . \text{Tg}\,v}} = a \sqrt{\frac{\text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}\,v . \text{Cos}\,(\varphi - v)}} =$$
$$= \text{nahe}\; a\sqrt{1 - e^2 \,\text{Sin}^2 \varphi} = a\left(1 - \frac{e^2}{2} \text{Sin}^2 \varphi\right) = a\left[1 - \alpha \,\text{Sin}^2 \varphi\right] \qquad \mathbf{11}$$

$$n = \frac{y}{\text{Sin}\varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \text{Sin}^2 \varphi}} = p\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \text{Sin}^2 \varphi + \frac{3}{8} e^4 \text{Sin}^4 \varphi + \ldots\right) \qquad \mathbf{12}$$

$$n = (1 - e^2)\, N \quad \mathbf{13} \qquad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \,\text{Sin}^2 \varphi}} \qquad \mathbf{14}$$

$$R = \frac{b^2 x^3}{a^4 \,\text{Cos}^3 \varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \,\text{Sin}^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{b^2 r^3 \,\text{Cos}^3 v}{a^4 \,\text{Cos}^3 \varphi} =$$
$$= \frac{1 - e^2}{a^2} . N^3 = \frac{b^2}{a^4} . N^3 = p\left(\frac{N}{a}\right)^3 \qquad \mathbf{15}$$

Für die Scheitel an der kleinen und grossen Axe, d. h. für $x = 0$, $y = b$ und $x = a$, $y = 0$ ergeben sich speciell

$$A = 0 \qquad B = \frac{b^2 - a^2}{b} = -\frac{a}{b}(a + b)\,\alpha \qquad R = \frac{a^2}{b} \qquad \mathbf{16}$$

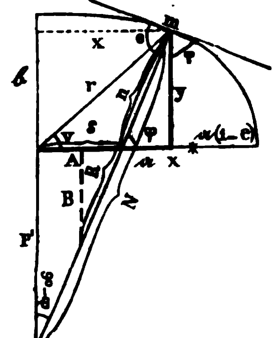
$$B = 0 \qquad A = \frac{a^2 - b^2}{a} = (a + b)\,\alpha \qquad R = \frac{b^2}{a} \qquad \mathbf{17}$$

Endlich erhält man (140 : 1; 67 : 14)

$$f = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, d x = \frac{a b}{4} . \pi \qquad \mathbf{18}$$

als Fläche des Ellipsenquadranten.

Die Formeln 1—6 gehen nach der im Texte gegebenen Anleitung ohne Schwierigkeit hervor, — ebenso 7 mit Hülfe von 2 und der beistehenden Figur. Aus 7 folgt



$$y = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{Tg} \varphi . x \qquad \mathbf{19}$$

und wenn man diesen Werth in 137:3 einsetzt, erhält man

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi}} \qquad \mathbf{20}$$

woraus mit Hülfe von 7 oder 137:8 die beiden Formeln 8 leicht hervorgehen. — Mit Hülfe von 7, 8 und der Figur findet sich 9 ohne Schwierigkeit. — Mit Hülfe von 19 und 137:6 erhält man

$$s = x - y . \operatorname{Ctg} \varphi = x - \frac{b^2}{a^2} . x = e^2 . x$$

d. h. die erste Formel 10, aus der sodann die zweite nach 6 sofort folgt. — Die drei ersten Formeln 11 gehen aus der Figur mit Hülfe von 8 hervor; ferner ergibt sich mit Hülfe von 8 und 9

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{\frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}} = a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi + \frac{e^4 \operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}}$$

woraus der erste Näherungswerth folgt, dem sodann die übrigen leicht entnommen werden. — Ebenso folgen die 12 mit Hülfe von 9 und 137:6 ohne Schwierigkeit. — Aus der Figur folgt

$$N : x = n : x - s \qquad \text{oder} \qquad n = \frac{x - s}{x} . N = (1 - e^2) . N$$

oder 13, woraus mit Hülfe von 12 auch sofort 14 hervorgeht. — Mit Hülfe von 19 folgt

$$a^4 y^2 + b^4 x^2 = b^4 x^2 \operatorname{Tg}^2 \varphi + b^4 x^2 = b^4 x^2 : \operatorname{Cos}^2 \varphi$$

und hieraus geht durch Einführung in 4 sogleich die erste Formel 15 hervor, aus der die übrigen mit Hülfe von 8, 11, 14 und 137:5,6 leicht folgen. — Die 16. und 17. sind Specialfälle von 3 und 4. — Aus 140:1 folgt mit Hülfe von 137:3 und 67:14 endlich

$$f = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{b}{a} \left[{}_0^a \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{x}{a} \right]$$

$$= \frac{b}{a} . \frac{a^2}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} 1 = \frac{a b}{4} . \pi$$

oder 18. — Für die Anwendung dieser wichtigen Formeln z. B. auf 375—377 verweisend, mag hier noch angeführt werden, dass **Gerling** (s. Grunert's Archiv V 61) für N den Namen **Conormale** gewählt, und sie mit Vortheil in eine Reihe von Formeln eingeführt hat. Bezeichnet man nämlich Tangente, Subtangente und Subnormale (vergl. 188) der Reihe nach mit t, st und sn, den durch die Normalen gebildeten Abschnitt auf der kleinen Axe mit p', und setzt die Differenz zwischen Conormale und Normale $N - n = q$, so hat man nach der Figur und mit Hülfe von 9, 10, 13 und 14

$$x = N . \operatorname{Cos} \varphi \qquad y = (1 - e^2) N \operatorname{Sin} \varphi \qquad \mathbf{21}$$

$$sn = n \operatorname{Cos} \varphi = (1 - e^2) N \operatorname{Cos} \varphi \qquad st = y \operatorname{Tg} \varphi = (1 - e^2) N \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Tg} \varphi \qquad \mathbf{22}$$

$$t = \frac{y}{\operatorname{Cos} \varphi} = (1 - e^2) N \operatorname{Tg} \varphi \qquad p' = s \operatorname{Tg} \varphi = e^2 N \operatorname{Sin} \varphi \qquad \mathbf{23}$$

$$q = \frac{s}{\operatorname{Cos}\varphi} = \frac{s\,N}{x} = e^2 N \qquad r \operatorname{Sin}(\varphi - v) = p' \operatorname{Cos}\varphi = \frac{e^2}{2} N \operatorname{Sin} 2\varphi \qquad \mathbf{24}$$

$$r \operatorname{Cos}(\varphi - v) = N - p' \operatorname{Sin}\varphi = N(1 - e^2 \operatorname{Sin}^2\varphi) = \frac{a^2}{N} \qquad \mathbf{25}$$

$$\operatorname{Tg}(\varphi - v) = \frac{e^2 N^2}{2a^2} \operatorname{Sin} 2\varphi \qquad \text{etc.} \qquad \mathbf{26}$$

In 25 liegt die merkwürdige Eigenschaft, dass das Rechteck aus der Conormale und der Projection des Radius Vectors auf dieselbe constant ist, — eine Eigenschaft, auf welche Gerling schon in einem Programme „De parallaxi elationis. Marb. 1830", wo er auch die meisten der eben aufgestellten Formeln zum ersten Mal mitgetheilt habe, hingewiesen zu haben scheint. — Aus 14 folgt, wenn $\operatorname{Sin}\varphi = z$ gesetzt wird,

$$N^2 = a^2(1 - e^2 z^2)^{-1} \qquad \text{und} \qquad N \,.\, dN = a^2(1 - e^2 z^2)^{-2} \,.\, e^2 z\, dz$$

also, wenn M der Modulus der gemeinen Logarithmen ist, mit Hülfe von 57 : 1

$$d \,.\, \log N = M \,.\, \frac{dN}{N} = M e^2 (1 - e^2 z^2)^{-1} \,.\, z\, dz$$

$$= M e^2 (1 + e^2 z^2 + e^4 z^4 + e^6 z^6 + \ldots) z\, dz$$

oder durch Integration, da für $\varphi = 0$ nothwendig $\log N = \log a$ werden muss,

$$\log N = M\left(\frac{1}{2} e^2 z^2 + \frac{1}{4} e^4 z^4 + \frac{1}{6} e^6 z^6 + \ldots\right) + \log a$$

$$= \frac{M}{2}\left(e^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + \frac{1}{2} e^4 \operatorname{Sin}^4\varphi + \frac{1}{3} e^6 \operatorname{Sin}^6\varphi + \ldots\right) + \log a \qquad \mathbf{27}$$

wornach sich leicht eine Tafel für log N entwerfen lässt (vergl. 377 und XV). — Substituirt man in 1 für y und b nach 137 : 3,5, so erhält man

$$f'(x) = x \sqrt{\frac{1 - e^2}{a^2 - x^2}} \qquad f''(x) = \frac{a^2}{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{1 - e^2}{a^2 - x^2}} \qquad \mathbf{28}$$

und mit Hülfe erstern Werthes nach 141 : 1 für den zwischen dem Scheitel der kleinen Axe und dem über dem Ende der Abscisse stehenden Puncte enthaltenen Ellipsenbogen

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + f'(x)^2} \,.\, dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \,.\, dx \qquad \mathbf{29}$$

Da 29 mit 69 : 4 übereinstimmt, so kann somit 69 : 5 zur Rectification der Ellipse verwendet werden. So folgt z. B. mit Hülfe davon die Länge des Ellipsenquadranten, da in diesem Falle offenbar $x = a$, also $\varphi = 0$ gesetzt werden muss,

$$S = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \ldots\right] \qquad \mathbf{30}$$

woraus z. B. für $e = 0$ und $a = r$ der bekannte Kreisumfang $4S = 2r\pi$ hervorgeht. — Bezeichnet ψ das Supplement des Tangentenwinkels, so hat man nach 2

$$\operatorname{Tg}\psi = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \qquad \text{während} \qquad \operatorname{Tg} v = \frac{y_1}{x_1}$$

und somit mit Hülfe von 137 : 3

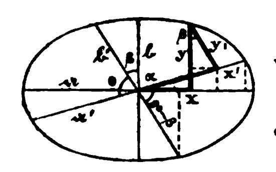
$$\operatorname{Tg}\theta = \operatorname{Tg}(v + \psi) = \frac{\operatorname{Tg} v + \operatorname{Tg}\psi}{1 - \operatorname{Tg} v \,.\, \operatorname{Tg}\psi} = \frac{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2}{(a^2 - b^2) x_1 y_1} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2) x_1 y_1} \qquad \mathbf{31}$$

Anderseits ergibt sich für den Winkel, welchen die mit dem Radius Vector r zusammenfallende Axe mit der zu ihr conjugirten Axe bildet, nach 136 : 4, wenn man $\alpha = \operatorname{Tg} v = y_1 : x_1$, $a = a^2$, $b = o$ und $c = b^2$ setzt, die Formel

$$\operatorname{Tg}\mu = 2\,\frac{(a^2 y_1^2 : x_1^2) + b^2}{2(a^2 - b^2)\, y_1 : x_1} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2) x_1 y_1} \qquad \mathbf{32}$$

Es ist also $\mu = \theta$, oder man erhält zu irgend einer Axe die conjugirte Axe, indem man an den Einen Endpunct der Erstern eine Tangente und zu dieser durch den Mittelpunct eine Parallele zieht. — Bezieht man einen Punct der Ellipse, anstatt durch rechtwinklige Coordinaten auf die Hauptaxen, durch schiefwinklige Coordinaten auf irgend zwei conjugirte Axen, d. h. setzt man

$$x = x' \operatorname{Cos} \alpha - y' \operatorname{Sin} \beta$$
$$y = x' \operatorname{Sin} \alpha + y' \operatorname{Cos} \beta$$



wo α ein beliebiger Winkel ist, und nach 136 : 2

$$\operatorname{Tg}(90^0 + \beta) = -\frac{2 b^2}{2 a^2 \operatorname{Tg} \alpha}$$

oder

$$\operatorname{Tg} \beta = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{Tg} \alpha \qquad 33$$

so erhält man nach 137 : 3 die neue Ellipsengleichung

$$x'^2 \left(\frac{\operatorname{Cos}^2 \alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha}{b^2}\right) + y'^2 \left(\frac{\operatorname{Sin}^2 \beta}{a^2} + \frac{\operatorname{Cos}^2 \beta}{b^2}\right) - 2 x' y' \left(\frac{\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \beta}{a^2} - \frac{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta}{b^2}\right) = 1$$

Bezeichnet man aber die halben conjugirten Axen mit a' und b', so hat man, da ihre Endpuncte Ellipsenpuncte sind, nach 137 : 3

$$\frac{a'^2 . \operatorname{Sin}^2 \alpha}{b^2} + \frac{a'^2 . \operatorname{Cos}^2 \alpha}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a'^2} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{Sin}^2 \alpha}{b^2}$$
$$\frac{b'^2 . \operatorname{Cos}^2 \beta}{b^2} + \frac{b'^2 . \operatorname{Sin}^2 \beta}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{b'^2} = \frac{\operatorname{Sin}^2 \beta}{a^2} + \frac{\operatorname{Cos}^2 \beta}{b^2} \qquad 34$$

während mit Hülfe von 33

$$\frac{\operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Sin} \beta}{a^2} - \frac{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta}{b^2} = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta \left(\frac{\operatorname{Tg} \beta}{a^2} - \frac{\operatorname{Tg} \alpha}{b^2}\right) = 0$$

folgt, wofür sich obige Gleichung in

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \qquad 35$$

zusammenzieht, so dass sich also für conjugirte Axen die Form der Ellipsengleichung nicht verändert. Aus 34 und 33 folgen

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} = \frac{a^4 b^2 (1 + \operatorname{Tg}^2 \alpha)}{a^4 \operatorname{Tg}^2 \alpha + a^2 b^2} = \frac{a^4 \operatorname{Cos}^2 \beta + b^4 \operatorname{Sin}^2 \beta}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \beta + b^2 \operatorname{Sin}^2 \beta}$$
$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{Cos}^2 \beta + b^2 \operatorname{Sin}^2 \beta} = \frac{a^2 b^4 (1 + \operatorname{Tg}^2 \beta)}{a^2 b^2 + b^4 \operatorname{Tg}^2 \beta} = \frac{a^4 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^4 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} \qquad 36$$

und hieraus durch Addition

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 b^2 (\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha) + a^4 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^4 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} = a^2 + b^2 \qquad 37$$

so dass die Quadratsumme der Halbaxen constant ist. — Da endlich $\theta + \beta + 90^0 - \alpha = 180^0$ oder $\theta = 90^0 - (\beta - \alpha)$, so folgt mit Hülfe von 33 und 36

$$\operatorname{Sin} \theta = \operatorname{Cos}(\beta - \alpha) = \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \alpha = \frac{\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 \beta}}$$
$$= \frac{a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{\sqrt{a^4 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^4 \operatorname{Cos}^2 \alpha}} = \frac{a b}{a' b'} \qquad 38$$

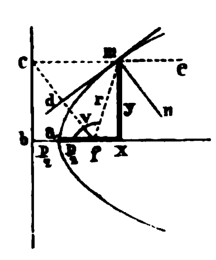
so dass (113) alle in die Ellipse eingeschriebenen Vierecke, welche conjugirte Axen zu Diagonalen haben, gleich gross sind.

144. Die Parabel. Ist (s. Fig.) $fb \perp bc$, fc beliebig, $fd = dc$, $dm \perp cf$ und $cm \parallel bf$, so ist (137 : 9) m ein Punct der Parabel des Brennpunctes f, Scheitels a und Parameters $p = 2q$. Die Hülfslinie dm hat offenbar nur m mit der Parabel gemein oder ist

Tangente, — die Normale $mn \perp dm$ hälftet $\angle emf$, — bc heisst **Leitlinie** oder **Directrix.** — Aus 137 : 11 folgt die Polargleichung

$$r = \frac{2q}{1 + \text{Cos}\, v} = \frac{q}{\text{Cos}^2 \frac{v}{2}} \quad \text{oder} \quad r = 2q - r\,\text{Cos}\, v = q + x \qquad 1$$

wo die letztere Form sich unmittelbar aus der Figur verificiren lässt.



Man hat offenbar

$$y^2 = mf^2 - (x-q)^2 = (x+q)^2 - (x-q)^2 = 4qx = 2px \qquad 2$$

also ist der Ort wirklich eine Parabel. — Befestigt man in e das eine, in f das andere Ende eines Fadens der Länge ce, lässt die z. B. durch die eine Kathete einer sog. Equerre dargestellte ce längs einem nach der Directrix gelegten Lineale gleiten, und sucht mit einem Stifte m den Faden fortwährend an jener Equerre festzuhalten, so beschreibt m die Parabel.

145. Weitere Beziehungen. Da für die Parabel $y.dy = p.dx$, so hat sie (138) die Tangentengleichung

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \qquad 1$$

aus der folgt, dass die Tangente in der Distanz x_1 hinter dem Scheitel auf die Abscissenaxe trifft. Für die Quadratur der Parabel folgt (140)

$$F = \int_0^x y\,dx = \sqrt{2p}\int_0^x x^{1/2}.dx = \frac{2}{3}xy = \frac{y^3}{6q} \qquad 2$$

Theilt man eine durch ein Curvenstück, zwei Ordinaten und die Abscissenaxe begrenzte Fläche F durch gleichabstehende Ordinaten in $2n$ Streifen, und betrachtet die von den paaren Ordinaten bestimmten Curvenabschnitte als Parabelbogen, so kann man nach der sog. **Simpson'schen Regel**

$$F = \frac{x}{6n}\left[y_0 - y_{2n} + 2\sum_1^n (y_{2n} + 2.y_{2n-1})\right] \qquad 3$$

setzen, wo x den Abstand der äussersten Ordinaten y_0 und y_{2n} bezeichnet.

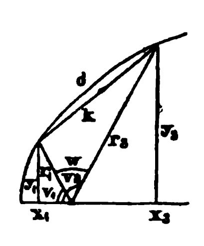
Für $y = 0$ oder also für den Durchschnittspunct der Tangente mit der Abscissenaxe erhält man nach 1 und 137 : 9

$$p(x - x_1) = -y_1^2 = -2px_1 \quad \text{oder} \quad x = -x_1$$

wie im Texte behauptet ist. — Da aus der Parabelgleichung durch Differentiren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \quad \text{so folgt nach 138 : 4} \quad \text{Subn} = p$$

so dass also bei der Parabel die Subnormale constant, und somit auch eine leichte Normalen-Construction ermöglicht ist. — Bezeichnet man das von der Sehne k bestimmte Parabelsegment mit σ, so ist nach 2



$$\sigma = \frac{y_2^3}{6q} - \frac{y_1^3}{6q} - \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{24q}[4y_2^3 - 4y_1^3 - 3(y_1 + y_2)(y_2^2 - y_1^2)]$$

$$= \frac{1}{24.q}(y_2 - y_1)^3 \qquad 4$$

Setzt man ferner den durch r_1 und r_2 gebildeten Parabelsector gleich s, so hat man, da mit Hülfe von 144 : 1

$$k^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (y_2 - y_1)^2 + (r_2 - r_1)^2$$

oder

$$(y_2 - y_1)^2 = k^2 - (r_2 - r_1)^2$$

und nach 104 : 8

$$\text{Sin}\, w = \frac{1}{2 r_1 r_2}\sqrt{(r_1 + r_2 + k)(r_1 + r_2 - k)(r_1 - r_2 + k)(r_2 - r_1 + k)}$$

ist, für s den Ausdruck

$$s = \frac{1}{24.q}(y_2 - y_1)^3 + \frac{r_1 r_2}{2}\,\text{Sin}\, w =$$

$$= \frac{1}{4}\left[k^2 - (r_2 - r_1)^2\right]^{1/2} . \left[\frac{k^2 - (r_2 - r_1)^2}{6.q} + \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - k^2}\right] \qquad 5$$

Ferner folgt aus 144 : 1

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\text{Cos}^2\frac{v_2}{2}}{\text{Cos}^2\frac{v_1}{2}} = \left[\frac{\text{Cos}\,\frac{v_1 + w}{2}}{\text{Cos}\,\frac{v_1}{2}}\right]^2 = \left[\text{Cos}\,\frac{w}{2} - \text{Tg}\,\frac{v_1}{2} . \text{Sin}\,\frac{w}{2}\right]^2$$

oder, unter Benutzung von 104 : 7,

$$\text{Tg}\,\frac{v_1}{2} = \frac{\text{Cos}\,\frac{w}{2} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}}{\text{Sin}\,\frac{w}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(r_1 + r_2 + k)(r_1 + r_2 - k)}{4 r_1 r_2}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}}{\sqrt{\frac{(k + r_2 - r_1)(k - r_2 + r_1)}{4 r_1 r_2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - k^2} - 2 r_1}{\sqrt{k^2 - (r_2 - r_1)^2}} \qquad 6$$

Aus 6 und 144 : 1 erhält man aber

$$4q = 4 r_1 \text{Cos}^2\frac{v_1}{2} = 4 r_1 \frac{1}{1 + \text{Tg}^2\frac{v_1}{2}} = \frac{k^2 - (r_2 - r_1)^2}{r_2 + r_1 - \sqrt{(r_2 + r_1)^2 - k^2}} \qquad 7$$

und hiefür gibt 5

$$s = \frac{1}{6}\left[k^2 - (r_2 - r_1)^2\right]^{1/2} . \left[r_2 + r_1 + \frac{1}{2}\sqrt{(r_2 + r_1)^2 - k^2}\right] \qquad 8$$

Bezeichnet man endlich den von q und r bestimmten Parabelsector mit f, so ist nach 140 : 2 mit Hülfe von 144 : 1

$$f = \frac{1}{2}\int r^2 . dv = \frac{q^2}{2}\int \frac{dv}{\text{Cos}^4\frac{v}{2}} = q^2\int\left(1 + \text{Tg}^2\frac{v}{2}\right) . d\,\text{Tg}\,\frac{v}{2} =$$

$$= q^2\left(\text{Tg}\,\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\text{Tg}^3\frac{v}{2}\right) \qquad 9$$

Endlich ist offenbar, wenn b c d als Parabelbogen des Scheitels c betrachtet wird, mit Hülfe von 2

$$abcde = \frac{y_0 + y_2}{2} \cdot \frac{x}{n} + \frac{2}{3} bd \cdot cf$$

$$= \frac{y_0 + y_2}{2} \cdot \frac{x}{n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{n \operatorname{Cos} \alpha} \cdot gf \cdot \operatorname{Cos} \alpha$$

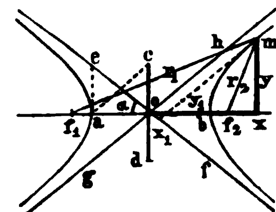
$$= \frac{x}{6n} [3(y_0 + y_2) + 4gf]$$

$$= \frac{x}{6n} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Rechnet man aber auf entsprechende Weise alle im Texte erwähnten n Doppelstreifen aus, so geht durch ihre Summation offenbar 3 hervor, — eine Formel, welche den Namen von Thomas **Simpson** trägt, der dieselbe in seinen „Mathematical dissertations on physical and analytical subjects. London 1743 in 4." zuerst gegeben haben soll.

146. Die Hyperbel. Sucht man (s. Fig.) eine Reihe von Puncten m auf, welche von zwei gegebenen Puncten f_1 und f_2 dieselbe Distanzendifferenz $r_1 - r_2 = 2a = ab < f_1 f_2$ besitzen, so erhält man (137) eine Hyperbel, die aus zwei unendlichen Aesten besteht, die beiden Puncte f_1 und f_2 zu Brennpuncten, ab zur grossen, und, wenn $ac = of_1 = ad$ ist, $cd = 2b = 2a\sqrt{e^2 - 1}$ zur kleinen Axe hat. Ist $a = b$ oder $ab = cd$, so heisst die Hyperbel **gleichseitig.**

Da nach dem im Texte Mitgetheilten $f_1 f_2 = 2 \cdot ac = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, so hat man



$$r_1^2 = y^2 + (x + \sqrt{a^2 + b^2})^2 \qquad \mathbf{1}$$

$$r_2^2 = y^2 + (x - \sqrt{a^2 + b^2})^2$$

also durch Subtraction

$$r_1^2 - r_2^2 = 4x\sqrt{a^2 + b^2}$$

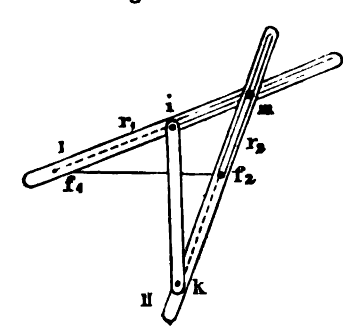
oder, da $r_1 - r_2 = 2a$ ist,

$$r_1 + r_2 = \frac{2x}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$$

Hieraus folgen aber

$$r_1 = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} + a \qquad r_2 = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} - a \qquad \mathbf{2}$$

Eliminirt man z. B. aus 1^1 und 2^1 die Grösse r_1, so findet man sofort zur Probe die gewöhnliche Gleichung der Hyperbel. — Ist $f_1 i = 2a = f_2 k$, so ist wegen $r_1 - r_2 = 2a$ nothwendig $im = r_2$ und $mk = r_1$, also $\Delta f_1 m f_2 \cong \Delta kmi$, also $ik = f_1 f_2$. Wenn man also zwei Lineale I und II mit Längeneinschnitten hat, die sich um f_1 und f_2 drehen, und deren Puncte i und k durch ein Stäbchen der Länge $f_1 f_2$ verbunden sind, so beschreibt, wie schon van **Schooten** im 4. Buche seiner „Exercitationum mathematicarum libri quinque. Lugduni 1657 in 4." gezeigt haben soll, ein in den beiden Einschnitten laufender Stift m eine Hyperbel. — Vergleicht man die Gleichung



der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad \text{mit der Gleichung} \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

des Kreises, so sieht man, wie sich gleichseitige Hyperbel und Kreis gewissermassen ergänzen, ja erstere (s. 124) als ein idealer Kreis aufgefasst werden kann. Stellt man entsprechend den goniometrischen Functionen hyperbolische gegenüber, indem man

$$\mathfrak{Cos}.\, x = \mathrm{Cos}\, x\, i \qquad \mathfrak{Sin}.\, x = -i\, \mathrm{Sin}\, x\, i \tag{3}$$

setzt, so dass

$$\mathfrak{Cos}.^2 x - \mathfrak{Sin}.^2 x = 1 \qquad \text{während} \qquad \mathrm{Cos}^2 x + \mathrm{Sin}^2 x = 1 \tag{4}$$

so folgen für die hyperbolischen Functionen nach 50 sofort

$$\mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{5}$$

$$\mathfrak{Cos}\, x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$
$$\mathfrak{Sin}\, x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots \tag{6}$$

etc., und man kann dieselben zur Vereinfachung gewisser Berechnungen mit Vortheil gebrauchen, zumal wenn man für sie, wie es z. B. durch W. **Ligowski**, Professor der Mathematik in Berlin, in seinem „Taschenbuch der Mathematik. Berlin 1867 in 8." geschehen ist, eine Tafel anlegt, von der

x	$\mathfrak{Sin}\, x$	$\mathfrak{Cos}.\, x$	x	$\mathfrak{Sin}\, x$	$\mathfrak{Cos}.\, x$
0,0	0,0000	1,0000	1,0	1,1752	1,5431
0,1	0,1002	1,0050	1,5	2,1293	2,3524
0,2	0,2013	1,0201	2,0	3,6269	3,7622
0,3	0,3045	1,0453	2,5	6,0502	6,1323
0,4	0,4108	1,0811	3,0	10,0179	10,0677
0,5	0,5211	1,1276	3,5	16,5426	16,5728
0,6	0,6367	1,1855	4,0	27,2899	27,3082
0,7	0,7586	1,2552	4,5	45,0030	45,0141
0,8	0,8881	1,3374	5,0	74,2032	74,2099
0,9	1,0265	1,4331	5,5	122,3439	122,3480
1,0	1,1752	1,5431	6,0	201,7132	201,7156

ein Muster geben mag.

147. Weitere Beziehungen. Da für die Hyperbel (137)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{also} \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{1}$$

so nähern sich ihr die Geraden

$$y = \pm \frac{b}{a} . x = \pm x\, \mathrm{Tg}\, \alpha \tag{2}$$

unendlich, und heissen **Asymptoten.** Bezeichnen x_1 und y_1 die auf die Asymptoten als Axen bezogenen schiefwinkligen Coordinaten des Punctes m, so ist (s. 146, Fig. 1)

$$x = (y_1 + x_1)\, \mathrm{Cos}\, \alpha \qquad y = (y_1 - x_1)\, \mathrm{Sin}\, \alpha$$

und durch Substitution dieser Werthe in 1 erhält man

$$4\,x_1\,y_1 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 \qquad 3$$

als sog. Asymptotengleichung der Hyperbel. Die Constante $^1/_4\,(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)$ wird **Potenz** der Hyperbel genannt.

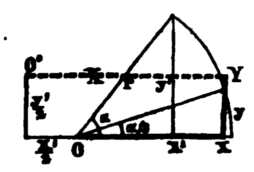
Für die gleichseitige Hyperbel ist $Tg\,\alpha = 1$, oder es stehen die Asymptoten senkrecht zu einander, und setzt man $^1/_2\,\mathfrak{a}^2 = 1$, so ist nach 3

$$y_1 = \frac{1}{x_1} \qquad 4$$

also hat man nach 140:1 die Fläche, welche durch Hyperbel, Asymptote und die, den Abscissen a und b entsprechenden Ordinaten eingeschlossen wird,

$$F = \int_a^b y_1\,d\,x_1 = \int_a^b \frac{d\,x_1}{x_1} = \Big[_a^b \log x_1\Big] = \log\frac{b}{a} \qquad 5$$

d. h. es werden solche Flächen unmittelbar durch natürliche Logarithmen gegeben, und es hat somit eine gewisse Berechtigung, Letztere umgekehrt **hyperbolische** zu heissen. — Da sich die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme offenbar wie die Producte der Nebenseiten verhalten, so folgt aus 3, dass alle je von einem Puncte der Hyperbel und den Asymptoten bestimmten Parallelogramme gleich gross sind. — Ist α ein durch x′ und y′ bestimmter Winkel, während x und y seinem Drittheil entsprechen, so hat man



$$x' = r\,Cos\,\alpha \qquad y' = r\,Sin\,\alpha$$

$$x = r\,Cos\,\frac{\alpha}{3} \qquad y = r\,Sin\,\frac{\alpha}{3}$$

Nun ist einerseits identisch

$$r^2\,Sin\,\frac{2}{3}\,\alpha = 2\,r^2\,Sin\,\frac{\alpha}{3}\,Cos\,\frac{\alpha}{3}$$

und anderseits

$$r^2\,Sin\,\frac{2}{3}\,\alpha = r^2\,Sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{3}\right) = r^2\left(Sin\,\alpha\,Cos\,\frac{\alpha}{3} - Cos\,\alpha\,Sin\,\frac{\alpha}{3}\right)$$

also hat man durch Gleichsetzung und Einführung der obigen Werthe

$$2\,x\,y = x\,y' - y\,x' \qquad 6$$

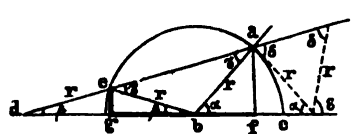
und diese Gleichung gehört offenbar einer Curve zweiten Grades zu, welche durch den Anfangspunct geht, und den α entsprechenden Kreisbogen in $^1/_3$ trifft, also die sog. **Trisection** des Winkels ausführt. Um uns diese Curve näher zu bringen, verlegen wir den Anfangspunct in der durch die Figur angedeuteten Weise nach O′, so dass, wenn X und Y die neuen Coordinaten sind,

$$x = X - \frac{x'}{2} \qquad y = \frac{y'}{2} - Y$$

denn hiefür geht 6 sofort in

$$4\,X\,Y = x'\,y' \qquad 7$$

über. Es ist also unsere Trisectrix, wie schon **Pappus** gewusst haben soll, eine gleichseitige Hyperbel, und zwar fallen deren Asymptoten mit den neuen Coordinatenaxen zusammen, während $^1/_4\,x'\,y'$ ihre Potenz ist. — Das muthmasslich von **Plato**, oder wenigstens zu seiner Zeit gestellte Problem der Trisection hat früher die Geometer vielfach beschäftigt: Sicher ist, dass z. B. schon der griechische Mathematiker **Nikomedes**, der nach Einigen ein Zeitgenosse von Archimedes war, nach Andern freilich erst um 150 v. Chr. florirte, erkannte, dass, wenn man aus dem Scheitel b des zu



theilenden Winkels α mit beliebigem Radius $ab = r$ einen Halbkreis beschreibe, und dann durch a eine Gerade ad so ziehe, dass $ed = r$ werde, der so entstehende Winkel $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ sei, da $\gamma = 2\beta$ und $\alpha = \beta + \gamma = 3\beta$; denn man weiss, dass Nikomedes die Conchoide (150) unter Anderm zur mechanischen Lösung der Trisection brauchte, und e beschreibt, da für $eg = y$ und $gf = x$

$$\frac{af}{y} = \frac{df}{df - x} \quad \text{oder} \quad df = \frac{af \cdot x}{af - y} \quad \text{oder} \quad df - x = \frac{yx}{af - y}$$

$$r^2 - y^2 = (df - x)^2 \quad \text{also} \quad (r^2 - y^2)(af - y)^2 = y^2 x^2$$

wenn d auf dc gleitet, nach 150 wirklich eine Conchoide. Beiläufig bemerkend, dass (wie die Fig. andeutet) dieselbe Construction auf alle möglichen Theilungen ausgedehnt werden könnte, da

$$\gamma = 2\beta \quad \alpha = 3\beta \quad \delta = \alpha + \beta = 4\beta \quad \varepsilon = \delta + \beta = 5\beta \quad \text{etc.}$$

mag zum Schlusse noch angeführt werden, dass sich auch noch andere Geometer des Alterthums in ähnlicher Weise mit der Trisection befassten, und dieselbe noch in neuerer Zeit vielfach theils von sog. Dillettanten auf constructivem Wege versucht, theils in der analytischen Geometrie mit Beziehung auf die verschiedenen möglichen Lösungen besprochen worden ist; vergl. für mehreren Detail z. B. den von **Grunert** in seinen Schlussband von Klügel's Wörterbuch (V 335—345) darüber aufgenommenen Artikel.

148. Die sog. besondern Puncte. Zu den besondern Puncten der Curven gehören unter Anderm die sog. **Wendepuncte,** wo die Ordinate ein Maximum oder Minimum annimmt, — die sog. **Inflexions-** oder **Beugungspuncte,** wo die Concavität in Convexität übergeht, — die sog. **Spitzen,** in denen sich zwei Aeste der Curve vereinigen, und eine gemeinschaftliche zwischenliegende Tangente haben, — die sog. **vielfachen Puncte,** in denen sich zwei oder mehr Aeste einer Curve schneiden, ohne eine gemeinschaftliche Tangente zu besitzen, — die sog. **conjugirten** oder **isolirten Puncte** einer Curve, die sich ergeben, wenn für eine bestimmte Abscisse die Ordinate reell, für eine kleine Zulage in $\pm$ zur Abscisse aber imaginär wird, — etc.

Wendepuncte sind z. B. die Scheitel der Ellipse. Ein Beispiel für Beugungspuncte findet sich bei der Glockenlinie in 149, — für Spitzen bei der Neil-schen Parabel und Cissoide in 149, — für vielfache Puncte bei dem Folium Cartesii in 149 und der Lemniscate in 150, — für conjugirte Puncte bei der Conchoide in 150, — etc.

149. Einige Curven dritten Grades. Der Ort der Gleichung

$y^3 = ax^2$ . . . . **1** heisst Neil's Parabel

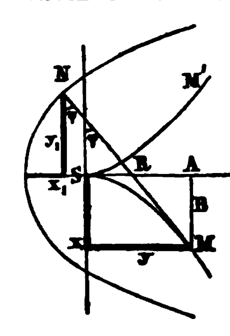
$x^3 + y^3 = axy$ . . . . **2** Folium Cartesii

$y^2 = \frac{x}{a}(x - b)(x + c)$ . . . **3** Glockenlinie

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \quad \ldots \; 4$$ heisst Cissoide des Diokles.

Und so weiter.

Während hier im Allgemeinen für die Curven dritten und höhern Grades auf Specialschriften, wie z. B. auf „**Newton**, Enumeratio linearum tertii ordinis (zuerst 1704 als Anhang der Optik erschienen; dann als Opusculum IV im ersten Bande der „Opuscula", v. 8; auch selbstständig mit Beigabe von Stirling's betreffender „Illustratio" Paris 1797 in 8.), — **Salmon**, Higher plane curves. Dublin 1852 in 8., — etc." verwiesen werden muss, mögen die im Texte genannten speciellen Curven dritten Grades etwas näher betrachtet werden: Die nach William **Neil** (Bishop-Thorp in Yorkshire 1637 — White Waltham in Berkshire 1670; Mitglied der Roy. Soc.) benannte cubische oder semicubische Parabel besteht offenbar aus zwei, auf der positiven Seite der y liegenden, in einer Spitze S zusammenlaufenden unendlichen Aesten SM und SM'. Sie ist die Evolute der gewöhnlichen, sog. Appolonischen Parabel; denn setzt man die aus der Gleichung 144:2 der letztern folgenden Werthe



$$f(x_1) = 2px_1 \qquad f'(x_1) = \frac{p}{y_1} \qquad f''(x_1) = -\frac{p^2}{y_1^3}$$

$$k = 1 + f'(x_1)^2 = 1 + \frac{p^2}{y_1^2} = 1 + \frac{p}{2x_1}$$

in die Formeln 139:3 ein, so erhält man

$$x_1 - A = \frac{k f'(x_1)}{f''(x_1)} = -\frac{y_1^2}{p}\left(1 + \frac{p}{2x_1}\right) = -(p + 2x_1) \qquad 5$$

$$y_1 - B = -\frac{k}{f''(x_1)} = \frac{y_1}{p}\left(\frac{y_1^2}{p} + \frac{y_1^2}{2x_1}\right) = \frac{y_1}{p}(p + 2x_1) \qquad 6$$

$$R^2 = (x_1 - A)^2 + (y_1 - B)^2 = \frac{(p + 2x_1)^3}{p} \qquad 7$$

Aus 5 und 6 ergeben sich nun successive

$$x_1 = \frac{A - p}{3} \qquad B^2 = \frac{y_1^6}{p^4} = \frac{8p^3x_1^3}{p^4} = \frac{8}{27 \cdot p}(A - p)^3 \qquad 8$$

und setzt man daher $B = x$, $A - p = y$ und $27 \cdot p = 8 \cdot a$, so hat man für die Gleichung der Parabel-Evolute

$$y^3 = a \cdot x^2$$

d. h. die Gleichung der Neil'schen Parabel, die manchmal auch unter der Form 8 gegeben wird. Für $x_1 = o$ wird auch $y_1 = o$, also $A = p = R$, $B = o$; es liegt somit der Scheitel S der Neil'schen Parabel von dem Scheitel der zugehörigen Parabel gerade um den Parameter der Letztern ab. — Da ferner nach 1

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{2ax} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{9y^4}{4a^2x^2} = \frac{9y}{4a}$$

folgt, so hat man nach 141:1 und 68:4

$$SM = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}} \cdot dy =$$

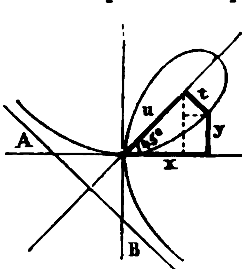
$$= \left[_0^y \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{3/2} + \text{Const.}\right] = \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{3/2} - \frac{8a}{27} =$$

$$= p\left(1 + \frac{9(A - p)}{4a}\right)^{3/2} - p = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{p^{1/2}} - p = R - p \qquad 9$$

Es ist also auch $NM = SM + p$, und da überdiess, wenn φ den Winkel der Tangente an M mit x, und ψ den Winkel des Krümmungsradius von N mit y_1 bezeichnet, mit Hülfe von 188 : 1

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{2ax}{3y^2} = \frac{p \cdot B}{4x_1^2} = \frac{y_1^2}{4px_1^2} = \frac{p}{y_1} = \frac{p+2x_1}{y_1 - B} = \frac{A - x_1}{y_1 - B} = \mathrm{Tg}\,\psi$$

so ist der, auch ganz allgemein mögliche, Nachweis geleistet, dass die Evolvente durch Abwicklung der Evolute erzeugt werden kann, und jede Evolute rectificabel ist. Die Neil'sche Parabel wurde bereits durch Neil selbst rectificirt, siehe „**Wallis**, Epistola primam inventionem et demonstrationem aequalitatis lineae curvae paraboloidis cum recta anno 1657 factam, Guilielmo Neile asserens (Phil. Trans. 1673)", und es soll diess überhaupt die erste genaue Rectification gewesen sein, welche von einer Curve gemacht wurde. — Die durch 2 ausgedrückte Curve dritten Grades trägt den Namen von **Descartes**, weil er diese merkwürdige Linie im dritten Theile seiner „Lettres, où sont traitées les plus belles questions touchant la morale, la physique, la médecine et les mathématiques. Paris 1667, 3 Vol. in 4. (lat. Lugd. Batav. 1668—1683) zuerst besprach. Bezieht man sie auf die den Winkel der Coordinatenaxen halbirende Gerade, d. h. setzt man



$$x = u \cdot \mathrm{Cos}\,45^\circ + t \cdot \mathrm{Sin}\,45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+t)$$

$$y = u \cdot \mathrm{Sin}\,45^\circ - t \cdot \mathrm{Cos}\,45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-t)$$

so geht 2 für $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a$ in

$$u^3 + 3ut^2 = \alpha(u^2 - t^2) \qquad \text{oder} \qquad t = u\sqrt{\frac{\alpha - u}{\alpha + 3u}} \qquad \mathbf{10}$$

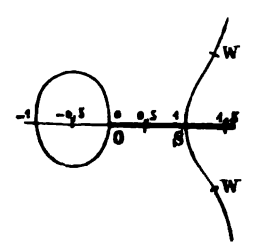
über, woraus nun leicht hervorgeht, dass die entsprechende Curve in Beziehung auf die neue Axe symmetrisch ist, und aus einer Schleife des Durchmessers α besteht, welche in zwei unendliche Aeste verläuft, die eine zur Axe senkrechte, um $\frac{1}{3}\alpha$ hinter dem Anfangspuncte liegende Asymptote haben. Setzt man $\alpha - u = z^2$, also $u = \alpha - z^2$ und $du = -2z \cdot dz$, so ergibt sich

$$t \cdot du = -2\frac{(\alpha - z^2)z^2 dz}{\sqrt{4\alpha - 3z^2}} = -\frac{1}{6} \cdot d\left[z^3\sqrt{4\alpha - 3z^2}\right]$$

also

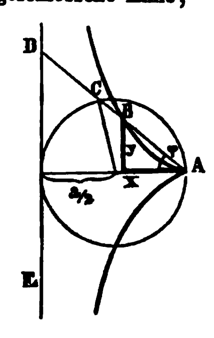
$$F' = \int_0^\alpha t \cdot du = -\frac{1}{6}\left[{}_{\sqrt{\alpha}}^{0}\, z^3\sqrt{4\alpha - 3z^2}\right] = \frac{1}{6}\alpha^2$$

$$F'' = \int_0^{-\frac{1}{3}\alpha} t \cdot du = -\frac{1}{6}\left[{}_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\frac{4}{3}\alpha}}\, z^3\sqrt{4\alpha - 3z^2}\right] = \frac{1}{6}\alpha^2$$



oder es ist sowohl die Fläche der ganzen Schleife, als die zwischen den unendlichen Aesten und der Asymptote liegende Fläche gleich $\frac{1}{6}\alpha^2$, — also, da diese beiden Flächentheile im Gegensatze stehen, die Gesammtfläche gleich Null. — Die durch 3 gegebene sog. Glockenlinie fällt für $b = o = c$ mit der Neil'schen Parabel zusammen; für $a = b = c = 1$ dagegen nimmt sie die in der beistehenden Figur dargestellte Form an, und besteht überhaupt für

positive Werthe von b und c aus einer geschlossenen Linie, und einem (bei W) Wendepuncte zeigenden unendlichen Aste; für $c = o$ verschwindet die geschlossene Linie, — für $b = o$ dagegen verbindet sie sich als Schleife mit dem unendlichen Aste, der in diesem Falle auch keinen Wendepunct mehr zeigt, während O und S sich zu einem vielfachen Puncte vereinigen. — Die Cissoide, welche etwa im 6. Jahrhundert unserer Zeitrechnung von dem griechischen Mathematiker **Diokles** erfunden worden sein soll, wird durch Construction erhalten, indem man von einem Puncte A eines Kreises aus verschiedene Secanten zieht, und je $AB = CD$ abträgt. Sie besteht offenbar aus zwei sich in A zu einer Spitze vereinigenden unendlichen Aesten, welche DE zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, und ihre Gleichung geht aus



$$\frac{a}{\operatorname{Cos}\varphi} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \operatorname{Cos}\varphi = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \operatorname{Tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

wo a den Durchmesser des Kreises bezeichnet, durch Elimination von φ hervor. Es folgen nämlich successive

$$x^2 + y^2 = a^2 (\operatorname{Cos}^2\varphi - 2 + \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\varphi}) = a^2 \frac{x^4 - x^2(x^2+y^2) + y^2(x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{a y^2}{x} = x^2 + y^2 \qquad y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

d. h. 4. Die Cissoide kann auch leicht rectificirt werden, indem aus 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(a-x)} \qquad \text{also} \qquad ds = \frac{a \cdot dx}{2(a-x)} \sqrt{\frac{4a - 3x}{a - x}}$$

folgt, oder, wenn

$$\frac{4a - 3x}{a - x} = u^2 \quad \text{also} \quad x = a\frac{u^2 - 4}{u^2 - 3}, \quad a - x = \frac{a}{u^2 - 3}, \quad dx = \frac{2a u \cdot du}{(u^2 - 3)^2}$$

gesetzt werden,

$$ds = a \cdot du - \frac{3a \cdot du}{3 - u^2}$$

woraus durch gliedweise Integration mit Hülfe von 65 : 2 ohne weitere Schwierigkeit an's Ziel gelangt wird.

150. Einige Curven vierten Grades. Der Ort der Gleichung

$x^2 \cdot y^2 = (a + y)^2 \cdot (b^2 - y^2)$ **1** heisst Conchoide

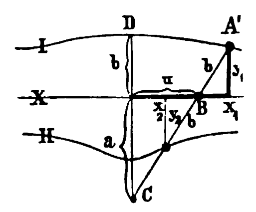
$x^2 + y^2 = \sqrt{4a^2x^2 + b^4} - a^2$ **2** Cassinoide

$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$ .... **3** Lemniscate

$x^2 + y^2 = a(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. **4** Cardioide.

Und so weiter.

Die von dem griechischen Mathematiker **Nikomedes** theils zur Trisection (vergl. 147), theils (vergl. Pappus III, IV) zur Lösung des Problemes der Würfelverdopplung, d. h. zur geometrischen Lösung von $a : x = x : y = y : 2a$ erfundene, und später von **Newton** zur constructiven Lösung der Gleichungen vierten Grades gebrauchte Conchoide oder Muschellinie wird in ihren beiden Aesten I und II durch die beiden Puncte A bestimmt, welche



von einem auf X gleitenden Puncte B in der von ihm mit dem festen Puncte C bestimmten Geraden um eine constante Distanz b abliegen; denn man hat offenbar

$$a : u = y_1 : (x_1 - u) = y_2 : (u - x_2)$$

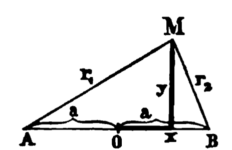
und

$$b^2 = y^2 + (x - u)^2$$

woraus 1 durch Elimination von u hervorgeht. Es lässt sich also die Conchoide, deren beide Aeste X zur Asymptote haben, mit Hülfe zweier Stäbe X und AC, welche für B und C mit Laufrinnen versehen sind, sehr leicht mechanisch beschreiben. Bezieht man die Conchoide auf C als Anfangspunct und CD als Axe, d. h. ersetzt x und $a \pm y$ durch y und x, so geht 1 in

$$y^2 = x^2 \left(\frac{b}{a - x}\right)^2 - x^2 \qquad 5$$

über, woraus sofort geschlossen werden kann, dass der Punct ($x = o$, $y = o$), d. h. der neue Anfangspunct C ein Punct der Conchoide ist. Ist nun (wie in Fig.) $b < a$ und zugleich $x < a - b$, so ist $b : (a - x)$ ein ächter Bruch, also y^2 negativ, oder y unmöglich, — es ist also C in diesem Falle ein isolirter Punct. Für $b = a$ hört diese Isolirung auf, indem dann II den Punct C als Spitze in sich aufnimmt, — und für $b > a$ endlich bildet II hinter C eine ähnliche Schleife, wie die (s. 149) bei dem Folium Cartesii beschriebene und abgebildete. — Der Ort eines Punctes M, dessen Product der Distanzen r_1 und r_2 von zwei gegebenen Puncten A und B constant ist, hat, wenn $AB = 2a$ und $r_1 r_2 = b^2$ gesetzt wird, die Gleichung



$$[(a + x)^2 + y^2] \cdot [(a - x)^2 + y^2] = b^4$$

oder

$$(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4 a^2 x^2 = b^4$$

d. h. 2. Es hat dieser Ort ungeschickter Weise den Namen Cassinoide (d. h. Cassini ähnlicher Linie) erhalten, weil der berühmte Astronom Giovanno Domenico **Cassini** (Perinaldo 1625 — Paris 1712; erst Professor der Astronomie in Bologna, dann Director der von 1667—1672 erbauten Pariser-Sternwarte, vergl. sein Eloge par Fontenelle in Mém. de Paris 1712, und Arago Oeuvres III; er war Vater von seinem Nachfolger Jacques Cassini 1677—1756, vergl. sein Eloge par Fouchy in Mém. de Par. 1756, — Grossvater von dessen Nachfolger César-François Cassini de Thury 1714—1784, vergl. sein Eloge par Condorcet in Mém. de Par. 1784, — und Urgrossvater von des letztern Nachfolger Jacques-Dominique Cassini Vicomte de Thury 1748—1845, dem Verfasser der „Mémoires pour servir à l'histoire des sciences et à celle de l'observatoire royal de Paris. Paris 1810 in 4°, welche für ihn und seine Voreltern zu vergleichen) die mit Recht wieder längst vergessene Idee hatte, man könnte, um gewisse Rechnungsvortheile zu erzielen, die Planeten eine solche, für $b > a\sqrt{2}$ ganz ellipsen-ähnliche Curve um die Sonne beschreiben lassen. — Fällt man von einem in der Ebene einer Curve als eine Art Pol angenommenen Puncte, Senkrechte auf die Tangenten dieser Curve, so liegen die Fusspuncte in einer neuen Curve, der sog. **Fusspunctencurve**, — und es mag hier, entsprechend meiner Abhandlung „Ueber die Fusspunctencurven der Linien zweiten Grades (Crelle XX)", gezeigt werden, dass sich die durch 3 gegebene Lemniscate als eine Fusspunctencurve der gleichseitigen Hyperbel, die durch 4 gegebene Cardioide aber als

eine Fusspunctencurve des Kreises darstellen lässt, während die in 149 betrachtete Cissoide eine Fusspunctencurve der Parabel ist. Legt man nämlich durch den gewählten Pol ein zu den Hauptaxen einer Linie zweiten Grades paralleles Coordinatensystem, so wird Letzteres (vergl. 187) in Beziehung auf dasselbe durch eine Gleichung

$$a y^2 + c x^2 + d y + e x + f = 0 \qquad 6$$

ausgedrückt, also nach 188 : 1 eine Tangente an den Punct (x_1, y_1) derselben durch

$$y - y_1 = -\frac{m}{n}(x - x_1) \quad \text{wo} \quad m = 2 c x_1 + e, \quad n = 2 a y_1 + d \qquad 7$$

so dass der Fusspunct eines vom Anfangspuncte auf diese Tangente gefällten Senkrechten nach 132 : 15 die Coordinaten

$$x_2 = m \frac{m x_1 + n y_1}{m^2 + n^2} \qquad y_2 = n \frac{m x_1 + n y_1}{m^2 + n^2} \qquad 8$$

hat, und durch Elimination von x_1, y_1 aus den Gleichungen 8 und der für (x_1, y_1) aufgeschriebenen 6 die Gleichung der Fusspunctencurve hervorgehen muss. Um diese Elimination zu vereinfachen, führen wir

$$x_2 = r \operatorname{Cos} v \qquad y_2 = r \operatorname{Sin} v \qquad \text{wo} \qquad \operatorname{Ctg} v = \frac{m}{n} \qquad 9$$

d. h. Polarcoordinaten, ein, und erhalten dann sofort mit Hülfe von 7 und 8 die Hülfsgleichungen

$$(2 c x_1 + e) \operatorname{Sin} v = (2 a y_1 + d) \operatorname{Cos} v$$

$$r = x_2 \operatorname{Cos} v + y_2 \operatorname{Sin} v = \frac{m^2 \operatorname{Cos} v + n m \operatorname{Sin} v}{m^2 + n^2} \cdot x_1 + \frac{m n \operatorname{Cos} v + n^2 \operatorname{Sin} v}{m^2 + n^2} \cdot y_1$$
$$= x_1 \operatorname{Cos} v + y_1 \operatorname{Sin} v$$

aus denen

$$x_1 = \frac{d \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} v + 2 a r \operatorname{Cos} v - e \operatorname{Sin}^2 v}{2 (a \operatorname{Cos}^2 v + c \operatorname{Sin}^2 v)}, \quad y_1 = \frac{e \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} v + 2 c r \operatorname{Sin} v - d \operatorname{Cos}^2 v}{2 (a \operatorname{Cos}^2 v + c \operatorname{Sin}^2 v)} \qquad 10$$

folgen. Substituirt man letztere Werthe in die für $(x_1\ y_1)$ aufgeschriebene 6, so erhält man nach einigen Reductionen schliesslich

$$r^2 + r\left(\frac{e}{c} \operatorname{Cos} v + \frac{d}{a} \operatorname{Sin} v\right) + \frac{d e}{2 a c} \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} v +$$
$$+ \frac{4 c f - e^2}{4 a c} \operatorname{Sin}^2 v + \frac{4 a f - d^2}{4 a c} \operatorname{Cos}^2 v = 0 \qquad 11$$

als allgemeine Gleichung der Fusspunctencurve einer Linie zweiten Grades. — Liegt beispielsweise der Pol in der Peripherie eines Kreises des Radius a, d. h. hat man statt 6 nach 184 : 2

$$y^2 + x^2 - 2 a x = 0$$

also $a = 1 = c$, $d = 0 = f$ und $e = -2a$, so wird die Fusspunctencurve nach 11 durch

$$r^2 - 2 a r \operatorname{Cos} v - a^2 \operatorname{Sin}^2 v = 0 \quad \text{oder} \quad r = a (1 + \operatorname{Cos} v) \qquad 12$$

dargestellt. Restituirt man aber in 12 nach 9 die rechtwinkligen Coordinaten, so erhält man die mit 4 übereinstimmende Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 2 a x)(x^2 + y^2) = a^2 y^2$$

so dass unsere Fusspunctencurve wirklich mit der schon von Louis **Carré** (Clofontaine en Brie 1663 — Paris 1711; Academiker in Paris) in den Mém. de Par. 1705 betrachteten, aber erst von Giovan **Castillon** (Castiglione in

Toscana 1708 — Berlin 1791; Professor der Mathematik in Utrecht und Berlin) in Phil. Trans. 1741 so benannten Cardioide übereinstimmt, welche übrigens auch unter den Epicycloiden und Brennlinien auftritt. — Liegt dagegen der Pol im Scheitel einer Parabel, d. h. hat man statt 6 nach 137:9

$$y^2 - 2px = 0$$

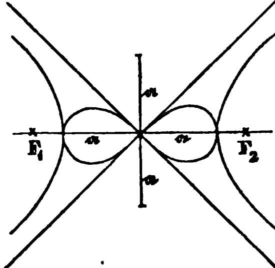
oder $a = 1$, $c = d = f = 0$ und $e = -2p$, so wird die Fusspunctencurve, da in diesem Falle nur die mit dem Theiler c behafteten Glieder in Rechnung kommen können, nach 11 durch die Polargleichung

$$2r \operatorname{Cos} v + p \operatorname{Sin}^2 v = 0 \qquad \mathbf{12}$$

dargestellt. Restituirt man auch hier nach 9 die rechtwinkligen Coordinaten, so erhält man die mit 149:4 übereinstimmende Gleichung

$$2x + p \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad y^2 = \frac{(-x)^3}{\frac{1}{2}p - (-x)}$$

so dass also in der That die Fusspunctencurve in diesem Falle eine Cissoide ist. — Liegt endlich der Pol im Mittelpuncte einer gleichseitigen Hyperbel der Halbaxen a, d. h. hat man statt 6 nach 147:1



$$y^2 - x^2 + a^2 = 0$$

also $a = 1$, $c = -1$, $d = e = 0$ und $f = a^2$, so wird die Fusspunctencurve nach 11 durch die Polargleichung

$$r^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2v \qquad \mathbf{14}$$

dargestellt, welche hinwieder für rechtwinklige Coordinaten in die mit 3 übereinstimmende Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

übergeht, so dass in der That die Fusspunctencurve in diesem Falle mit der schon durch Jakob **Bernoulli** in Act. Erud. 1694 betrachteten Schleifenlinie oder Lemniscate übereinstimmt, — einer Curve, bei welcher der von Sinigaglia gebürtige Marquis Giulio Carlo **Fagnano** (1682—1766) in seinen „Produzioni matematiche. Pesaro 1750 2 Vol. in fol." die merkwürdige Eigenschaft nachwies, dass sich auf ihr unendlich viele Bogen angeben lassen, die einander entweder völlig gleich sind, oder von denen der Eine die Hälfte des Andern ist. — Ueber andere, namentlich einige merkwürdige Flächen-Eigenschaften der Fusspunctencurven vergl. theils meine erwähnte Abhandlung, vor Allem aber die betreffende Abhandlung von **Steiner** im 18. Bande desselben Journales, durch welche ich zu der meinigen veranlasst wurde.

151. Einige transcendente Curven. Der Ort der Gleichung

$y = a^x$ oder $x = \overset{a}{\log} y$ . . . **1** heisst Logistik

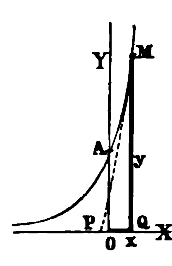
$t = \operatorname{Sin} u$ . . . . **2** Sinusoide

$r = \dfrac{2av}{\pi \operatorname{Sin} v}$ . . . . **3** Quadratrix

$y = \dfrac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$ . . . . **4** Kettenlinie.

Und so weiter.

Die fälschlich von Manchen **Gunter**, durch Verwechslung mit der eine logarithmische Theilung tragenden Linie seines Rechenstabes (vergl. 14), zugeschriebene, dagegen spätestens von **Hugens** in einem Anhange zu seiner „Dissertatio de causa gravitatis (Op. rel.)" behandelte Linie der Gleichung 1, hat natürlich den Namen **logarithmische Linie** oder **Logistik** erhalten, und besteht aus einem unendlichen Aste, welcher die Ordinatenaxe im Abstande 1 vom Anfangspuncte in A schneidet, und hinter derselben sich der Abscissenaxe als Asymptote nähert. — Aus 1 folgt durch Differentiren

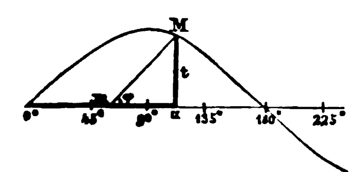


$$p = \frac{dy}{dx} = y \log a \quad \text{also nach 138:3} \quad \text{Subt} = \frac{y}{p} = \frac{1}{\log a}$$

so dass die Logistik die merkwürdige Eigenschaft hat, dass bei ihr die Subtangente P Q einen constanten Werth besitzt. Construirt man daher eine Parabel, die P Q als Parameter und somit (145) als Subnormale hat, so kann man diese so an die Axe der X legen und längs ihr verschieben, dass sie immer im Durchschnittspuncte zur Logistik senkrecht steht. — Da ferner mit Hülfe von 140:1 und 64:4

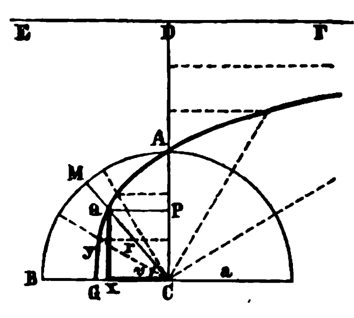
$$F = \int_\alpha^\beta y\,dx = \int_\alpha^\beta a^x \,.\, dx = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\log a}$$

folgt, so ist die zwischen Logistik, zwei Ordinaten und der Axe enthaltene Fläche immer gleich dem Rechtecke aus der Differenz der Ordinaten und der Subtangente. — Die durch 2 ausgedrückte Sinusoide ist eine Art Wellenlinie, welche man erhält, wenn man die Bogenwerthe der Winkel als Abscissen, die Sinus als Ordinaten aufträgt. Zieht man durch den Punct M derselben unter dem Winkel φ eine Gerade zur Abscissenaxe, so schneidet sie dieselbe in der Entfernung m vom Anfangspuncte, so dass



$$m = u - t \,.\, \text{Ctg}\,\varphi$$
$$= u - e \,\text{Sin}\, u \quad \text{wo} \quad e = \text{Ctg}\,\varphi \qquad 5$$

und hat man daher eine Sinusoide construirt, so kann man mit ihrer Hülfe zu jedem m graphisch u finden, oder die transcendente Gleichung 5, für deren Bedeutung 415 zu vergleichen, annähernd lösen. — Die sog. Quadratrix, deren erste Construction gewöhnlich dem um 360 v. Chr. lebenden griechischen Mathematiker **Dinostrates** zugeschrieben wird, geht durch alle Puncte Q, deren Radius C M den Quadranten A B in gleichem Verhältnisse theilt, wie die Parallele Q P den Radius A C = a; denn in diesem Falle verhält sich



$$y : a = v : \tfrac{1}{2}\pi \qquad 6$$

d. h. es besteht, da $y = r \,\text{Sin}\, v$ ist, die Gleichung 3. Man kann somit, wie es in der Figur angedeutet ist, leicht eine beliebige Menge von Puncten der Quadratrix erhalten, indem man Kreislinie und Radius entsprechend in gleiche Theile theilt, — sodann durch diese Puncte die Quadratrix

ziehen, und so z. B. auch den Punct G erhalten, in welchem sie B C schneidet. Es geht auch leicht hervor, dass, wenn A D = a, E F || B C eine Asymptote der Quadratrix ist, — dass sich Letztere nicht nur unterhalb B C in gleicher Weise wiederholt, — sondern dass sich, wenn man über den Halbkreis hinausgeht, ein zweiter unendlicher Ast bildet, der in der Höhe 4 a wieder eine Asymptote hat, etc. — Da aus 6 folgt, dass sich zwei Ordinaten der Quadratrix genau wie die zugehörigen Winkel verhalten, so sieht man leicht ein, dass, wenn man y in beliebig viele gleiche Theile theilt, die Theilpuncte durch Parallele zu B C an die Quadratrix bringt, und durch die erhaltenen Puncte Radien zieht, diese Radien den Winkel v in ebensoviele gleiche Theile zerlegen. Wirklich soll schon Dinostrates die Trisection auf diese Weise auszuführen gelehrt haben. — Mit Hülfe von 6 und 50:10 erhält man

$$\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{Tg} v}{y} = \frac{\pi}{2av}\left(v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \ldots\right)$$
$$= \frac{\pi}{2a}\left(1 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{2}{15}v^4 + \ldots\right) \qquad 7$$

und hieraus folgt für $v = 0$ sofort $x = 2a:\pi$ oder also $CG = 2a:\pi$, und mit Hülfe von 6

$$av = \frac{ay}{CG} \qquad a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{CG} \qquad 8$$

Es lässt sich also mit Hülfe von C G jeder Bogen und der ganze Quadrant leicht rectificiren und somit quadriren, — eine Eigenschaft der Quadratrix, welcher diese offenbar ihren Namen verdankt. — Ersetzt man in 1 die Grössen y, a und x durch y:h, e und x:h oder —x:h, so erhält man die zwei logarithmischen Linien

$$y_1 = h \cdot e^{\frac{x}{h}} \qquad \text{und} \qquad y_2 = h \cdot e^{-\frac{x}{h}}$$

und es lässt sich daher die Ordinate einer Kettenlinie als arithmetisches Mittel der Ordinaten zweier logarithmischen Linien darstellen; für weitere Eigenschaften der Kettenlinie vergl. 234.

152. Einige Spiralen. Der Ort der Gleichung

$r = \dfrac{v}{2\pi}$ . . . . 1 heisst Archimedische Spirale

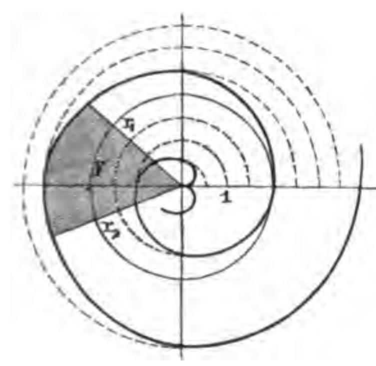
$r = a^{\alpha v}$ oder $v = {}^1/_\alpha \overset{a}{\log} r$ . . 2 logarithmische Spirale

$r^2 = \dfrac{v}{2\pi}$ . . . . 3 parabolische Spirale

$r = \dfrac{a}{v}$ . . . . 4 hyperbolische Spirale.

Und so weiter.

Die durch 1 ausgedrückte, durch den aus Samos gebürtigen, meist aber in Alexandrien lebenden Mathematiker **Konon** erfundene, und von seinem Freunde **Archimedes** in einer seiner scharfsinnigsten Abhandlungen untersuchte, und daher meist nach ihm benannte Spirale lässt sich offenbar auf die in der Figur angedeutete Weise sehr leicht aus dem Kreise des Radius 1 ableiten, welchen sie nach dem ersten Umlaufe schneidet. — Die zwischen

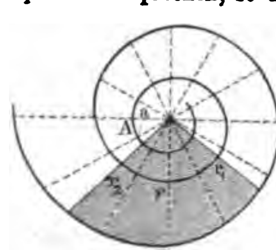


den zwei, den Winkeln v_1 und v_2 entsprechenden Radien Vectoren r_1 und r_2 enthaltene Fläche ist nach 140 : 2

$$F = \frac{1}{2}\int_{v_1}^{v_2} r^2\, d\,v = \frac{1}{2}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2}{4\pi^2}\, d\,v = \qquad 5$$

$$= \frac{1}{24\,\pi^2}(v_2{}^3 - v_1{}^3) = \frac{\pi}{3}(r_2{}^3 - r_1{}^3)$$

Es ist diess eine der Quadraturen, welche schon Archimedes durchzuführen wusste. — Lässt man den Positionswinkeln 0, δ, $2\,\delta$, $3\,\delta$, ... $x\,\delta = v$ die Radienvectoren a, a q, a q^2, a q^3,... a q^x = r entsprechen, so dass, wenn r in der Einheit a ausgedrückt wird,



$$x = \frac{v}{\delta} \quad \text{und} \quad x = \overset{a}{\log} r : \overset{a}{\log} q$$

oder

$$\overset{a}{\log} r = \frac{\overset{a}{\log} q}{\delta} \cdot v = \alpha \cdot v$$

so erhält man offenbar die 2 entsprechende sog. logarithmische Spirale, wie eine solche in der beistehenden Figur für $\delta = 30^0$ und q = 1,06 verzeichnet worden ist. — Setzen wir der Einfachheit wegen a = 10 und somit

$$d\,v = \beta \frac{d\,r}{r} \qquad \text{wo} \qquad \beta = \frac{1}{\alpha \cdot \log 10} \qquad 6$$

so erhalten wir die zwischen zwei Radien Vectoren r_1 und r_2 liegende Fläche nach 140 : 2

$$F = \frac{\beta}{2}\int_{r_1}^{r_2} r\,d\,r = \frac{\beta}{4}(r_2{}^2 - r_1{}^2) \qquad 7$$

während der entsprechende Bogen nach 141 : 2

$$B = \int_{r_1}^{r_2} \beta \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{\beta^2}} \cdot \frac{d\,r}{r} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1+\beta^2} \cdot d\,r = (r_2 - r_1)\sqrt{1+\beta^2} \qquad 8$$

ist, wo für die vorstehende Figur β und $\sqrt{1+\beta^2}$ nahezu gleich 9 zu setzen sind. Die logarithmische Spirale, welche für negative Werthe von v sich von A aus in unendlichen vielen Windungen dem Pole nähert, wie sie sich für positive Werthe von demselben entfernt, ist schon von Jakob **Bernoulli** einlässlich studirt worden, und als er unter Anderm fand, dass ihre Evolute wieder eine logarithmische Spirale sei, frappirte ihn diese Eigenschaft so, dass er sich diese Linie nebst den Worten „Eadem mutata resurgo“ auf seinen Grabstein setzen liess; vergl. auch die bezügliche Note von Emil **Schinz** im Jahrgange 1856 der von mir redigirten „Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.“ — Die, weil ihre Gleichung derjenigen einer Parabel gleich sieht, als **parabolische** bezeichnete Spirale 3 geht ähnlich wie die Archimedische vom Anfangspuncte aus in immer grössern Windungen um denselben herum, — die, weil ihre Gleichung mit der Asymptotengleichung der Hyperbel Aehnlichkeit hat, als **hyperbolische** bezeichnete Spirale 4 hat, da jeder Punct derselben von der Axe die Distanz r . Sin v = a . Sin v : v

hat und Sin $v : v$ für $v = 0$ gleich der Einheit wird, in der Distanz a von der Axe eine zu ihr parallele Asymptote, kömmt von derselben her aus dem Unendlichen, und bewegt sich sodann in immer kleinern Windungen gegen den Anfangspunct hin, — etc. — Auf Grundlage derselben oder ähnlicher Gleichungen kann man auch Spiralen erzeugen, indem man die v von irgend einem Puncte einer Kreislinie des Radius 1 aus auf derselben als Abscissen, und die r normal zur Kreislinie als Ordinaten aufträgt, — und so weiter.

153. Die Roll-Linien. Rollt ein convexes Vieleck der Fläche f auf einer Geraden, so beschreibt jeder damit verbundene Punct eine aus Kreisbogen bestehende sog. **Roll-Linie,** welcher nach einer vollen Umwälzung (129) die Fläche

$$F = f + \frac{1}{2} \Sigma a^2 \alpha \qquad 1$$

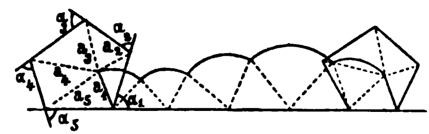
entspricht. Setzt man (133) die Constanten m gleich α, und ist φ die vom Schwerpuncte der Ecken beschriebene Fläche, so wird

$$F = f + \frac{1}{2} (\Sigma r^2 \alpha + r^2 \Sigma \alpha) = f + \frac{1}{2} \Sigma r^2 \alpha + r^2 \pi \qquad 2$$

$$\varphi = f + \frac{1}{2} \Sigma r^2 \alpha \quad 3 \qquad \text{also} \qquad F = \varphi + r^2 \pi \qquad 4$$

Diese von Steiner zuerst aufgestellte merkwürdige Beziehung gilt auch noch, wenn das Vieleck, und damit auch die Roll-Linie, in eine Curve übergeht.

Da offenbar die Winkel der beim Rollen entstehenden Kreissectoren der Reihe nach den Drehwinkeln α des Vielecks gleich, und die zwischen diesen Sectoren liegenden Dreiecke den von dem beschreibenden Puncte mit den Vielecksseiten bestimmten Dreiecken congruent sind, so liest sich wohl 1, unter Voraussetzung, die α seien in Bogen ausgedrückt, unmittelbar aus der Figur ab, und aus 1 folgen nach 133 : 2, wenn r, r_1, r_2,... die Abstände des Schwerpunctes der Ecken vom beschreibenden Puncte und diesen Ecken bezeichnen, die 2. bis 4. successive ohne Schwierigkeit. Vergl. für eine Anwendung 154, und für weitere namentlich „**Steiner,** Von dem Krümmungsschwerpuncte ebener Curven (Crelle 21)“.



154. Die Cycloide. Rollt ein Kreis des Radius a auf einer Geraden den Winkel v ab, so beschreibt der vom Centrum gegen die Gerade um b abstehende Punct eine Roll-Linie, für welche

$$x = a v - b \operatorname{Sin} v \qquad y = a - b . \operatorname{Cos} v \qquad 1$$

oder

$$x = a \operatorname{Arc Cos} \frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2} \qquad 2$$

Je nachdem $b =, <, > a$ heisst diese Roll-Linie **gemeine, verlängerte** oder **verkürzte Cycloide.** Der Inhalt der gemeinen Cycloide ist (153)

$$F = 3 a^2 \pi \qquad 3$$

und da für sie

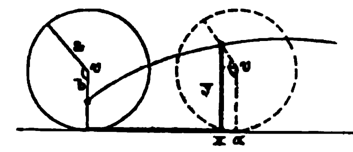
$$dx = a(1 - \text{Cos}\,v)\,dv \qquad dy = a\,\text{Sin}\,v\,dv \qquad \text{also} \qquad \frac{dx}{dy} = \text{Tg}\,\frac{v}{2} \qquad 4$$

folgt, so hat man (141)

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2a\int_0^v \text{Sin}\,\frac{v}{2}\,.\,dv = 8a\,\text{Sin}^2\frac{v}{4} \qquad 5$$

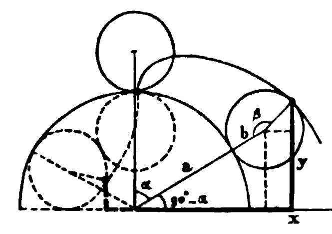
Für $v = 2\pi$ erhält man hieraus die Länge der gemeinen Cycloide gleich $8a$.

Die Gleichungen 1 folgen unmittelbar aus der beistehenden Figur; eliminirt man aus ihnen v, so wird 2 erhalten. Die vom Schwerpuncte oder Mittelpuncte der rollenden Kreislinie erzeugte Linie ist offenbar eine Parallele zur Axe von der Länge $2a\pi$, und es ist somit die in 153 eingeführte Fläche $\varphi = 2a^2\pi$ und die Fläche der ganzen Cycloide nach 153 : 4



$$F = 2a^2\pi + b^2\pi \qquad 6$$

woraus 3 für $b = a$ hervorgeht. Eine besondere Ableitung von 4 und 5 dürfte überflüssig sein; dagegen mag noch bemerkt werden, dass schon **Galilei** die Cycloide geometrisch betrachtete, — dass bald darauf Giles Persone de **Roberval** (Roberval bei Beauvais 1602 — Paris 1675; Professor der Mathematik und Academiker in Paris) die durch 3 ausgedrückte Quadratur vollzog, — dass später **Pascal** und die beiden ältern **Bernoulli** sich vielfach mit dieser merkwürdigen, auch **Roulette**, **Trocheide** und, als Linie des kürzesten Falles (s. 254), **Brachystochrone** genannten Curve befassten, — und dass endlich **Hugens** nachwies, es entstehe durch Abwicklung einer Cycloide wieder eine ihr gleiche Cycloide, und es sei diese Curve (s. 255) zugleich eine **Tautochrone** oder **Isochrone**. Vergl. auch „**Pascal**, Histoire de la roulette. Paris 1658, — J. **Grœningius**, Historia cycloidis. Hamb. 1701 in 4., — Ruggiero Giuseppe **Boscovich** (Ragusa 1711 — Mailand 1787; Prof. der Mathematik in Rom), De cycloide et logistica. Romæ 1745, — **Bezout**, Nouvelle manière de démontrer les propriétés de la cycloidé (Mém. de math. et de phys. Tome 3), — W. **Zehme**, Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden. Iserlohn 1854 in 8., — etc.“ — Rollt der Kreis anstatt auf einer Geraden auf oder in einem Kreise, so heisst die entstehende Curve **Epicycloide** oder **Hypocycloide**, und hat offenbar die Gleichungen



$$x = (a \pm b)\,\text{Sin}\,\alpha - b\,\text{Sin}\,(\beta \pm \alpha)$$
$$y = (a \pm b)\,\text{Cos}\,\alpha \mp b\,\text{Cos}\,(\beta \pm \alpha) \qquad 7$$

wo das obere Zeichen für die Epicycloide, das untere für die Hypocycloide gilt, und wo die Winkel α und β die Beziehung $a\alpha = b\beta$ eingehen. Aus 7 kann man z. B. für die Epicycloide durch Quadriren und Addiren die Gleichung

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2 + b^2 - 2b(a + b)\,\text{Cos}\,\beta \qquad 8$$

erhalten, welche sich auch unmittelbar aus der Figur ergibt. Für $b = a$,

$x = y_1$ und $y = x_1 + a$ geben die Gleichungen 7

$$y_1 = 2a \operatorname{Sin} \alpha (1 - \operatorname{Cos} \alpha) \qquad x_1 = 2a \operatorname{Cos} \alpha (1 - \operatorname{Cos} \alpha) \qquad 9$$

und hieraus folgen

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{Tg} \alpha \qquad \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = 2a(1 - \operatorname{Cos} \alpha) = 2a\left(1 - \frac{x_1}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}\right)$$

oder

$$x_1^2 + y_1^2 = 2a\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - x_1\right) \qquad 10$$

eine Gleichung, welche, wenn man den Sinn, in welchem die Abscisse gezählt wird, wechselt, mit der Gleichung 150:4 der Cardioide übereinstimmt, sobald man $a = \frac{1}{2} a$ setzt; es bietet uns also die Cardioide (vergl. 150 Fig. 3) ein Beispiel einer Epicycloide dar. Zum Schlusse mag noch angeführt werden, dass die Epicycloide 1674 von Ole **Römer** entdeckt wurde, als er nach der vortheilhaftesten Gestalt der Zähne eines Rades suchte.

XVI. Das Raumdreieck und die Raumtrigonometrie.

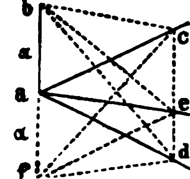
155. Das Raum-Eck. Eine Ebene wird durch drei nicht in einer Geraden liegende Puncte, also durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade bestimmt, und schneidet daher jede andere Ebene in einer Geraden, der sog. **Spur, Kante** oder **Knotenlinie.** — Dreht sich abwechselnd eine in einer Ebene befindliche Gerade um einen ihrer Puncte und dann die Ebene um die Gerade, so entsteht, wenn nach n Doppelbewegungen Gerade und Ebene wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren, ein **n-Kant** oder **Raum-n-Eck.** Die Drehwinkel der Geraden heissen **Kantenwinkel,** — die Drehwinkel der Ebene, für welche Einheit, Eintheilung und Benennung ganz analog sind, wie beim Linienwinkel, **Flächenwinkel.** Die Kanten, Kantenwinkel und Flächenwinkel des n-Kants entsprechen den Ecken, Seiten und Winkeln des n-Ecks.

Wie ich schon 1843 in Grunert III 446 beklagte, herrscht in den Benennungen grosse Verschiedenheit: So verwenden Thibaut, Steiner, Ohm, Baltzer, etc. den Namen **Flächenwinkel** in der im Texte angenommenen Bedeutung, während Umpfenbach dafür den Namen **Keil** braucht, — Crelle **Raumeckenwinkel,** — Mollweide, Vega, Grunert, etc. **Neigungswinkel zweier Ebenen,** — Klügel, Mohs, Rose etc. **Kante,** — Naumann sogar **Kantenwinkel,** einen Namen, welchen dagegen Steiner, Külp, Pross, etc. mit mir in der im Texte gegebenen Weise zu der Bezeichnung des Winkels zweier Kanten anwenden, da der für letztern von Mollweide, Grunert, Blum, etc. gewählte Name **ebener Winkel,** und auch der von Ohm, Tellkampf, etc. gebrauchte Name **Linienwinkel** ihnen weniger passend schien. — An die in 73 gegebene Litteratur über Elementargeometrie schliessen sich z. B. noch die Specialschriften „**Creizenach,** Theoretisches Lehrbuch der Stereometrie. Frankfurt 1835 in 8., — **Wöckel,** Formeln und Aufgaben zur Stereometrie. Nürnberg 1841 in 8., — Christ. Heinrich **Nagel,** Lehrbuch der Stereometrie und der ebenen Trigonometrie. Ulm 1844 in 8., — August **Wiegand** (Altenburg 1814; Lehrer der Mathematik und Director der Lebens-

versicherungsgesellschaft zu Halle), Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Halle 1845 in 8., — etc.“ an.

156. Die Senkrechten und Projectionen. Eine Gerade ab steht (Fig. 1; 83, 86) auf allen durch ihren Fusspunct a gehenden Geraden einer Ebene (z. B. auf ae) senkrecht, sobald sie auf zweien derselben (ac und ad) senkrecht steht, und heisst dann **senkrecht** zur Ebene. — Dabei ist die Senkrechte offenbar die kürzeste Verbindung des Punctes b mit der Ebene, und alle Puncte der Letztern, welche von b gleich weit abstehen, stehen auch von a, der sog. **Projection** von b auf die Ebene, gleich weit ab, und umgekehrt. — Ist (s. Fig. 2) $ae \perp cd \perp bf$, so heisst ef Projection von ab auf cd, und wenn $eg \parallel ab$ mit cd den Winkel φ bildet, ferner $bg \parallel ae \parallel fh$ ist, so muss auch $eg = ab$, und (da Ebene $bfh \perp cd$) $gf \perp cd$, also $ef = ab \cdot \operatorname{Cos} \varphi$ sein. — Projicirt man auf eine Gerade alle Seiten eines ebenen oder räumlichen Vielecks, so ist die Projection irgend einer Seite gleich dem Gegensatze der algebraischen Summe aller andern; haben daher zwei Vielecke eine gemeinschaftliche Seite, so sind für eine und dieselbe Gerade die Summen der Projectionen aller übrigen Seiten derselben einander gleich.

Macht man $fa = ab$, und zieht cd beliebig, so ergibt sich leicht die

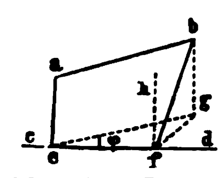


Folge von Congruenzen $abc \cong afc$, $abd \cong afd$, $bdc \cong fdc$ und $bde \cong fde$; aus letzterer Congruenz folgt aber $be = ef$, wodurch offenbar die Behauptung des ersten Satzes erwiesen ist. Derselbe Beweis lässt sich auch leisten, indem man durch irgend einen Punct e in ae so eine Gerade cd zieht, dass $ce = ed$ wird. Man hat alsdann nach 110

$$2(be^2 + ed^2) = bd^2 + bc^2 \quad \text{und} \quad 2(ae^2 + ed^2) = ad^2 + ac^2$$

also durch Subtraction mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes

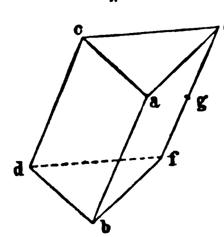
$$2(be^2 - ae^2) = 2 \cdot ab^2$$



folglich muss (nach 98) Winkel bae ein Rechter sein. — Der zweite Satz folgt mit Hülfe von 98 und 91 ganz einfach aus dem ersten, — der dritte Satz ist im Texte mit Hülfe von Fig. 2 vollständig bewiesen, — und der vierte Satz bedarf wohl überhaupt keines besondern Beweises, so fruchtbar er sich auch, z. B. in 192, zeigen wird.

157. Die Parallelen. Sind zwei Gerade zu einer dritten Geraden parallel, so sind sie auch unter sich parallel, und zwei Winkel mit parallelen Schenkeln sind (89, 86) gleich. Parallele zu einer Senkrechten stehen (156) senkrecht, und umgekehrt sind Senkrechte zu derselben Ebene parallel. Eine Parallele zu einer Geraden einer Ebene kann (155) diese Ebene nicht schneiden, und ist daher auch als parallel mit ihr zu betrachten.

Ist ab ∥ cd und ef ∥ cd, so muss auch ab ∥ ef sein. Legt man nämlich durch ab und irgend einen Punct g in ef eine Ebene, so fällt die dadurch in Ebene cdef gebildete Kante mit ef zusammen; denn würde sie nicht zusammenfallen, so müsste sie cd schneiden, und es hätten sodann die Ebenen abcd und abg ausser ab noch einen Punct gemein, was offenbar nicht angeht. Fällt sie aber zusammen, und wäre dennoch ef nicht parallel ab, so müssten ab und ef sich schneiden, und der Durchschnittspunct, als den beiden Ebenen abcd und cdef angehörig, in cd liegen, was wieder nicht angeht. — Ist ca ∥ db, sowie ce ∥ df, und trägt man ca = db, ce = df ab, so folgt ab ⧺ cd ⧺ ef, folglich hat man successive ae ⧺ bf, $\triangle$ace $\cong$ $\triangle$bdf und $\angle$ace = $\angle$bdf, w. z. b. w. — Die folgenden Sätze bedürfen kaum eines ausführlichen Beweises.

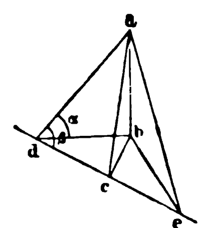


158. Eigenschaften der Projectionen. Verbindet man die Projectionen der Endpuncte einer Geraden auf eine Ebene durch eine Gerade, so enthält diese (157, 155) die Projectionen sämmtlicher Puncte der Geraden, und ist somit als ihre Projection zu betrachten. — Steht eine Gerade auf einer Geraden einer Ebene senkrecht, so steht (156, 84) auch ihre Projection zu derselben senkrecht und umgekehrt. — Zieht man von einem Puncte eine Senkrechte auf eine Gerade einer Ebene, errichtet in dem Fusspuncte eine Senkrechte in dieser Ebene, und fällt von dem ersten Puncte auf letztere Gerade noch eine Senkrechte, so steht diese (93, 156) zur Ebene senkrecht. — Jede Gerade bildet (156) mit ihrer Projection auf eine Ebene einen kleinern Winkel als mit einer andern Geraden derselben, und dieser kleinste Winkel dient als Maass der Neigung der Geraden gegen die Ebene.

Der erste Satz bedarf kaum eines ausführlichern Beweises; die übrigen Sätze können dagegen auf folgende Weise begründet werden: Steht ae ⊥ de und ab ⊥ Ebene bed, so ist auch bc ⊥ de; denn macht man cd = ce, so ist nothwendig auch ad = ae, also (156) bd = be. — Steht ac ⊥ de, bc ⊥ de und ab ⊥ bc, so ist

$$ad^2 = ac^2 + cd^2 = ab^2 + bc^2 + cd^2$$
$$= ab^2 + bd^2$$

also steht ab auch auf bd, folglich (156) auf der Ebene bed senkrecht. — Ist ab ⊥ Ebene bde, so ist $\alpha < \beta$; denn zieht man ac ⊥ de, so ist ae > ab, also auch (ac : ad) > (ab : ad), oder Sin β > Sin α; oder, wenn dc = db abgetragen wird, so ist immer noch ac > ab, also (85) auch $\beta > \alpha$.



159. Die Senkrechtenwinkel. Wenn auf zwei Kanten Senkrechte in den sie bildenden Ebenen gezogen werden, so haben (156) die Flächenwinkel gleiche Grösse, wenn diese sog. Senkrechtenwinkel

einander gleich sind. — Theilt man einen Senkrechtenwinkel in gleiche Theile, und legt durch die Theillinien und die Kante Ebenen, so zerfällt auch der Flächenwinkel in gleiche Theile. Es sind somit die Flächenwinkel den Senkrechtenwinkeln proportional und können durch sie gemessen werden. — Jede Ebene, welche durch eine Senkrechte zu einer Ebene gelegt wird, steht (156) auch senkrecht, und umgekehrt müssen zwei zu einer dritten Ebene senkrechte Ebenen auch eine zu ihr senkrechte Kante haben.

Legt man zwei gleiche Senkrechtenwinkel auf einander, so fallen (156) die Kanten, also auch die Ebenen auf einander. — Würde die Kante zweier, zu einer dritten Ebene senkrechter Ebenen nicht auch senkrecht stehen, so könnte man in ihrem Fusspuncte eine Senkrechte errichten, und diese Senkrechte würde sodann mit den Kanten, welche die zwei ersten Ebenen in der dritten bilden, zwei neue senkrechte Ebenen zu Letzterer bestimmen, was offenbar ungereimt wäre.

160. Grundbeziehungen am Raumdreiecke. Bezeichnen $a = 2\mathfrak{a}$, $b = 2\mathfrak{b}$, $c = 2\mathfrak{c}$ die Seiten eines Raumdreieckes, $A = 2\mathfrak{A}$, $B = 2\mathfrak{B}$, $C = 2\mathfrak{C}$ aber ihre Gegenwinkel, so hat man (94, 104)

$$\text{Sin}\, a : \text{Sin}\, b = \text{Sin}\, A : \text{Sin}\, B \qquad 1$$

$$\text{Cos}\, c = \text{Cos}\, a \,.\, \text{Cos}\, b + \text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, b \,.\, \text{Cos}\, C \qquad 2$$

Aus 2 folgt

$$\text{Cos}\, c = \frac{\text{Cos}\, a \,.\, \text{Cos}\,(b - x)}{\text{Cos}\, x} \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\, x = \text{Tg}\, a \,.\, \text{Cos}\, C \qquad 3$$

$$\text{Cos}\, C = \frac{\text{Cos}\, c - \text{Cos}\, a \,.\, \text{Cos}\, b}{\text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, b} \quad \text{oder} \quad 1 \pm \text{Cos}\, C = \frac{\pm \text{Cos}\, c \mp \text{Cos}\,(a \pm b)}{\text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, b} \qquad 4$$

ferner, dass, wenn auch a die grösste Seite,

$$\text{Cos}\, c < \text{Cos}\,(a - b) \quad \text{oder} \quad c > a - b \quad \text{oder} \quad a < b + c$$

Bezeichnet endlich $s = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ die halbe Summe der Seiten, so folgt aus 4

$$\text{Sin}\, \mathfrak{C} = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,(s - \mathfrak{a})\, \text{Sin}\,(s - \mathfrak{b})}{\text{Sin}\, \mathfrak{a} \,.\, \text{Sin}\, \mathfrak{b}}}, \quad \text{Cos}\, \mathfrak{C} = \sqrt{\frac{\text{Sin}\, s \,.\, \text{Sin}\,(s - \mathfrak{c})}{\text{Sin}\, \mathfrak{a} \,.\, \text{Sin}\, \mathfrak{b}}} \qquad 5$$

$$\text{Tg}\, \mathfrak{C} = \sqrt{\frac{\text{Sin}\,(s - \mathfrak{a}) \,.\, \text{Sin}\,(s - \mathfrak{b})}{\text{Sin}\, s \,.\, \text{Sin}\,(s - \mathfrak{c})}} \qquad 6$$

Und so weiter.

Ist $od = 1$, $de \perp ioh$, $df \perp oh$, $dg \perp oi$ und $hd \perp od \perp di$, so sind die A, B, C der Figur Senkrechtenwinkel, messen also die Dreieckswinkel A, B, C, und es ergeben sich sofort die Gleichheiten

$$\frac{\text{Sin}\, a}{\text{Sin}\, b} = \frac{df}{dg} = \frac{de : dg}{de : df} = \frac{\text{Sin}\, A}{\text{Sin}\, B}$$

$$hi^2 = oi^2 + oh^2 - 2 \,.\, oi \,.\, oh \,.\, \text{Cos}\, c$$

$$hi^2 = dh^2 + di^2 - 2 \,.\, dh \,.\, di \,.\, \text{Cos}\, C$$

Erstere Gleichheit stimmt mit 1 überein, während

man durch Gleichsetzung der beiden Werthe von $h i^2$

$$(o i^2 - d i^2) + (o h^2 - d h^2) + 2 . d h . d i . \text{Cos}\, C = 2 . o i . o h . \text{Cos}\, c$$

oder $$1 + \text{Tg}\, a . \text{Tg}\, b . \text{Cos}\, C = \frac{1}{\text{Cos}\, a} . \frac{1}{\text{Cos}\, b} . \text{Cos}\, c$$

d. h. 2 erhält, woraus sich die übrigen Formeln nach dem im Texte befolgten Gange ohne Schwierigkeit ableiten lassen. — Zieht man noch $g k \perp o h$ und $e l \parallel o h$, so findet man auch

$$\text{Cos}\, a = o f = o k + l e = o g . \text{Cos}\, c + g e . \text{Sin}\, c =$$
$$= \text{Cos}\, b . \text{Cos}\, c + \text{Sin}\, b . \text{Sin}\, c . \text{Cos}\, A$$

d. h. wieder die Formel 2, nur in einer etwas andern, noch fast einfachern Weise. — Mit Hülfe von 1 kann man leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} \text{Sin}\, a . \text{Sin}\, b . \text{Sin}\, C = \text{Sin}\, a . \text{Sin}\, c . \text{Sin}\, B = \text{Sin}\, b . \text{Sin}\, c . \text{Sin}\, A = d \\ \text{Sin}\, A . \text{Sin}\, B . \text{Sin}\, c = \text{Sin}\, A . \text{Sin}\, C . \text{Sin}\, b = \text{Sin}\, B . \text{Sin}\, C . \text{Sin}\, a = D \end{aligned} \quad 7$$

wo d und D bestimmte Zahlen sind, welche das betreffende Raumdreieck charakterisiren. Bezeichnet man ferner den Winkel, unter welchem man $d e$ von o aus sieht, oder gewissermassen die Höhe des Raumdreiecks in Beziehung auf die Seite c, mit γ, so hat man offenbar

$$\text{Sin}\, \gamma = d e = d f . \text{Sin}\, B = \text{Sin}\, a . \text{Sin}\, B$$

und ebenso ergeben sich, wenn α und β in Beziehung auf die Seiten a und b entsprechende Bedeutungen haben,

$$\text{Sin}\, \alpha = \text{Sin}\, b . \text{Sin}\, C \qquad \text{Sin}\, \beta = \text{Sin}\, c . \text{Sin}\, A$$

so dass man die 7 auch durch

$$\begin{aligned} \text{Sin}\, a . \text{Sin}\, \alpha = \text{Sin}\, b . \text{Sin}\, \beta = \text{Sin}\, c . \text{Sin}\, \gamma = d \\ \text{Sin}\, A . \text{Sin}\, \alpha = \text{Sin}\, B . \text{Sin}\, \beta = \text{Sin}\, C . \text{Sin}\, \gamma = D \end{aligned} \quad 8$$

ersetzen kann.

161. Die Gauss'schen Formeln und die Neper'schen Analogien. Mit Hülfe von 160:5 findet man

$$\text{Cos}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \frac{\text{Sin}\,\mathfrak{C}}{\text{Cos}\,\mathfrak{c}} . \text{Cos}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}), \quad \text{Cos}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \frac{\text{Sin}\,\mathfrak{C}}{\text{Sin}\,\mathfrak{c}} . \text{Sin}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \quad 1$$

$$\text{Sin}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \frac{\text{Cos}\,\mathfrak{C}}{\text{Cos}\,\mathfrak{c}} . \text{Cos}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}), \quad \text{Sin}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \frac{\text{Cos}\,\mathfrak{C}}{\text{Sin}\,\mathfrak{c}} . \text{Sin}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \quad 2$$

die sog. Gauss'schen Formeln, aus deren vierter z. B. hervorgeht, dass einer grössern Seite auch ein grösserer Winkel gegenübersteht, — und, indem man sie paarweise durcheinander dividirt,

$$\text{Tg}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \frac{\text{Cos}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\text{Cos}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} \text{Ctg}\,\mathfrak{C}, \quad \text{Tg}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \frac{\text{Sin}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\text{Sin}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})} \text{Ctg}\,\mathfrak{C} \quad 3$$

$$\text{Tg}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \frac{\text{Cos}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}{\text{Cos}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})} \text{Tg}\,\mathfrak{c}, \quad \text{Tg}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = \frac{\text{Sin}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}{\text{Sin}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})} \text{Tg}\,\mathfrak{c} \quad 4$$

die sog. Neper'schen Analogien.

Die Formeln 1 und 2 werden am leichtesten erhalten, indem man in

$$\text{Cos}\,(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) = \text{Cos}\,\mathfrak{A} . \text{Cos}\,\mathfrak{B} \mp \text{Sin}\,\mathfrak{A} . \text{Sin}\,\mathfrak{B}$$
$$\text{Sin}\,(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) = \text{Sin}\,\mathfrak{A} . \text{Cos}\,\mathfrak{B} \pm \text{Cos}\,\mathfrak{A} . \text{Sin}\,\mathfrak{B}$$

rechts nach 160:5 die Sin und Cos durch ihre Werthe ersetzt; so z. B. erhält man auf diese Weise

$$\operatorname{Sin}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(s-b)\operatorname{Sin}(s-c)}{\operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c}} \,.\, \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} s \,.\, \operatorname{Sin}(s-b)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} s \,.\, \operatorname{Sin}(s-a)}{\operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c}} \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}(s-a)\operatorname{Sin}(s-c)}{\operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} c}}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}(s-b)+\operatorname{Sin}(s-a)}{\operatorname{Sin} c} \,.\, \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} s \operatorname{Sin}(s-c)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{Sin}(s-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \operatorname{Cos}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{2 \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} c} \operatorname{Cos} \mathfrak{C}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\operatorname{Cos} c} \operatorname{Cos} \mathfrak{C}$$

u. s. f. Sie lassen sich zu Gunsten des Gedächtnisses unter der schematischen Form

$$\frac{(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B})\ \text{C.C.S.S} \mid \text{S.S.C.C}\ (\mathfrak{C})}{(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b})\ \text{C.S.C.S} \mid \text{C.S.C.S}\ (c)}$$

zusammenfassen, und wurden fast gleichzeitig von Jean-Baptiste-Joseph **Delambre** (Amiens 1749 — Paris 1822; Professor der Astronomie und Mitglied der Academie in Paris) in der „Connaissance des temps de 1808", — von **Mollweide**, der zugleich die entsprechenden Formeln für das ebene Dreieck (104:9) gab, im Novemberheft 1808 der Zach'schen Correspondenz, — und von **Gauss** in seiner 1809 erschienenen „Theoria motus corporum cœlestium" mitgetheilt, — immerhin jedoch so, dass ihnen eigentlich der Name Gauss'sche Formeln am wenigsten zukömmt. Die aus ihnen hervorgehenden, sog. Analogien 3 und 4 gab übrigens Neper oder **Napier** schon fast zwei Jahrhunderte früher in seinem bei 11 erwähnten Fundamentalwerke.

162. Weitere Beziehungen. Analog 160:2 hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} a &= \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A \\ \operatorname{Cos} b &= \operatorname{Cos} a \,.\, \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} B \end{aligned} \qquad 1$$

woraus durch Elimination von Cos a

$$\operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Cos} B = \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Sin} c - \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Cos} c \,.\, \operatorname{Cos} A \qquad 2$$

folgt, oder (160:1), wenn man durch Sin b theilt,

$$\operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Ctg} B = \operatorname{Ctg} b \,.\, \operatorname{Sin} c - \operatorname{Cos} c \,.\, \operatorname{Cos} A \qquad 3$$

und entsprechend ergeben sich

$$\operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Cos} C = \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Sin} c \,.\, \operatorname{Cos} A \qquad 4$$

$$\operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Ctg} C = \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Ctg} c - \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Cos} A \qquad 5$$

Verbindet man 2 und 160:1 durch Division, so erhält man

$$\operatorname{Tg} B = \frac{\operatorname{Sin} x \,.\, \operatorname{Tg} A}{\operatorname{Sin}(c-x)} \quad \text{wo} \quad \operatorname{Tg} x = \operatorname{Tg} b \,.\, \operatorname{Cos} A \qquad 6$$

Und so weiter.

Betreffend die Ableitung der Formeln 2—6 ist kaum noch etwas beizufügen nöthig, — über ihren Gebrauch vergl. 169, namentlich aber 336 und 358.

163. Fehlergleichungen. Durch Differentiation von 162:1 und 160:2 erhält man nach leichter Reduction

$$da = \text{Cos}\,C\,.\,db + \text{Cos}\,B\,.\,dc + \text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,dA \quad 1$$
$$db = \text{Cos}\,A\,.\,dc + \text{Cos}\,C\,.\,da + \text{Sin}\,C\,.\,\text{Sin}\,a\,.\,dB \quad 2$$
$$dc = \text{Cos}\,B\,.\,da + \text{Cos}\,A\,.\,db + \text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,dC \quad 3$$

durch deren Combination man in allen Fällen den Einfluss kleiner Veränderungen der bestimmenden Elemente berechnen kann.

So z. B. folgt durch Differentiation der ersten Formel 162:1 nach allen in ihr enthaltenen Grössen mit Hülfe von 162:2, 4

$$da = \frac{\text{Sin}\,b\,.\,\text{Cos}\,c - \text{Cos}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Cos}\,A}{\text{Sin}\,a}\,db + \frac{\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,a}\,dA$$
$$+ \frac{\text{Cos}\,b\,.\,\text{Sin}\,c - \text{Sin}\,b\,.\,\text{Cos}\,c\,.\,\text{Cos}\,A}{\text{Sin}\,a}\,dc$$
$$= \text{Cos}\,C\,.\,db + \text{Cos}\,B\,.\,dc + \text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,dA$$

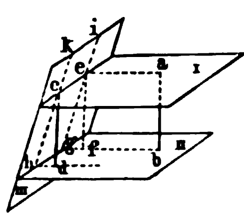
oder 1. — Eliminirt man z. B. aus 2 und 3 die Grösse dc, so erhält man mit Hülfe von 168:1

$$db = \frac{\text{Cos}\,C + \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B}{\text{Sin}^2 A}\,.\,da + \frac{\text{Sin}\,C\,.\,\text{Sin}\,a}{\text{Sin}^2 A}\,dB + \frac{\text{Sin}\,b\,.\,\text{Cos}\,A}{\text{Sin}\,A}\,.\,dC$$
$$= \frac{\text{Sin}\,B\,.\,\text{Cos}\,c}{\text{Sin}\,A}\,.\,da + \frac{\text{Sin}\,c}{\text{Sin}\,A}\,.\,dB + \text{Sin}\,b\,.\,\text{Ctg}\,A\,.\,dC \quad 4$$

In ähnlicher Weise kann man, indem man aus je zweien der Formeln 1—3 eines der Differentialien eliminirt, alle möglichen Fehlergleichungen am Raumdreiecke darstellen, über deren Gebrauch man z. B. die Sätze 336, 353, 405, 424, etc. vergleichen kann.

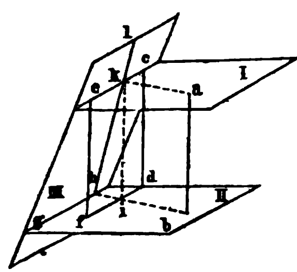
164. Parallele Ebenen. Zwei Ebenen, welche mit einer dritten Ebene parallele Kanten und gleiche correspondirende oder Wechselwinkel bilden, heissen **parallel**, — haben (157—159) überall denselben Abstand (ab = ef = cd, s. Fig. 1), — und schneiden sich somit im Endlichen nicht. Umgekehrt müssen daher auch zwei Ebenen parallel sein, d. h. mit jeder dritten Ebene gleiche Winkel und parallele Kanten bilden, sobald sie mindestens drei nicht in einer Ebene liegende gleiche Abstände haben. — Parallele zwischen parallelen Ebenen sind gleich, — und jede zwei Gerade werden durch ein System von parallelen Ebenen proportional geschnitten. — Die Kante zweier, durch zwei parallele Gerade gelegten Ebenen ist diesen Parallelen ebenfalls parallel.

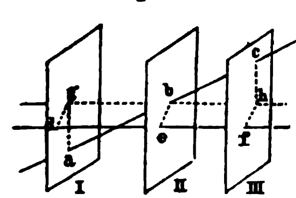
Bilden die Ebenen I und II mit III gleiche Winkel und parallele Kanten, und fällt man theils von irgend einem Puncte a der Ebene I, theils von einem Puncte c ihrer Kante in III, Senkrechte auf Ebene III, so sind diese



Senkrechten ab = cd. Ist nämlich ab ⊥ II und bg ⊥ gh, so ist (158) auch ag ⊥ gh, also (156) gh ⊥ Ebene bgea, also z. B. gh ⊥ ge; ferner ist (157) ce ⊥ Ebene bgea und somit ∠ iea ein Senkrechtenwinkel. Ist ef ⊥ bg, also (156) ef ⊥ II, ferner cd ⊥ II und dh ⊥ hg, so sind die Dreiecke egf und cdh congruent, da sie eine Seite als Parallele zwischen Parallelen, und zwei Winkel als

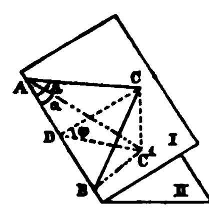
Winkel mit parallelen Schenkeln gleich haben, also ist $cd = ef$. Anderseits sind als Senkrechtenwinkel nach Voraussetzung $\angle iea = \angle chd$, — also ist nach obiger Congruenz auch $\angle iea = \angle egf$, also $ea \parallel gb$, also $ef = ab$, — also endlich $ab = cd$, w. z. b. w. — Stehen $ab = cd = ef$ sämmtlich senkrecht zu II, und legt man z. B. durch ec eine Ebene III, so bilden I und II mit ihr parallele Kanten und gleiche Winkel; denn es ist $ec \parallel fd$, also $ec \parallel$ II, also auch $ec \parallel gh$ und $gh \parallel fd$; zieht man ferner $bh \perp gh$, so ist auch $ah \perp gh$, also Ebene $abhk \perp gh$, fd, ec, und (159) $ki \perp$ II, also auch $ki = ab$ und $ka \parallel hb$, also auch $\angle lka = \angle lhb$, w. z. b. w. — Wenn aber I und II mit III parallele Kanten und gleiche Winkel bilden, so haben sie nach dem ersten Satze überall denselben Abstand, also bilden sie auch mit **jeder** dritten Ebene parallele Kanten und gleiche Winkel; denn fällt man von irgend zwei Puncten der von dieser letztern Ebene in I gebildeten Kante Senkrechte auf II, so sind diese nach dem eben Gesagten gleich, also kann der vorgehende Beweis wieder in gleicher Weise durchgeführt werden, etc. — Sind die Ebenen I, II, III und die Geraden df, gh je unter sich parallel, so sind auch die Kanten $dg \parallel be \parallel fh$, also $de = gb$ und $ef = bh$. Sind ferner ac und df beliebige, vielleicht nicht einmal in derselben Ebene liegende Gerade, so kann man durch b die Gerade $gh \parallel df$ ziehen, und hat, da die durch gh und ac bestimmte Ebene die Kanten $ga \parallel ch$ bildet, $ab : bc = bg : bh = de : ef$, w. z. b. w. — Um endlich den letzten Satz zu beweisen, kann man eine Ebene zu Hülfe nehmen, welche zu einer der Parallelen senkrecht steht, und dann nach 157 und 159 weiter schliessen.





165. Die Flächenprojectionen. Projicirt man ein Dreieck auf eine durch seine Basis gelegte Ebene, so sind die Basiswinkel der Projection kleiner als die Basiswinkel des Dreiecks (z. B., s. Fig., $\alpha < a$, entsprechend $DC' < DC$), — folglich ist der Winkel an der Spitze in der Projection grösser als im Dreiecke. Hat Letzteres die Fläche F und ist φ der Projectionswinkel, so ist $F \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi$ die Fläche der Projection, — eine Beziehung, welche sich leicht auf jede Fläche und ihre Projection ausdehnen lässt.

Der Beweis des ersten Satzes ist im Texte hinlänglich angedeutet; ebenso derjenige für den ersten Theil des zweiten Satzes. Sitzt das Dreieck nicht an der Kante, so kann man dasselbe durch Verlängerung seiner Seiten bis zum Durchschnitte mit der Kante als algebraische Summe dreier solcher Dreiecke darstellen, und schliessen, dass, weil der Satz für jeden Summand gelte, er nothwendig auch für die Summe gelten müsse. Auf ähnliche Weise kann man vom Drei-



ecke zum Vielecke übergehen, indem man Letzteres durch Diagonalen in Dreiecke zerfällt, — etc.

166. Weitere Eigenschaft des Dreikants. Projicirt man die Seiten eines Dreikants auf eine dasselbe schneidende Ebene, so ist die Summe der Projectionen gleich 360°; also ist (165) die Summe der Seiten eines Dreikants nothwendig kleiner als eine Umdrehung.

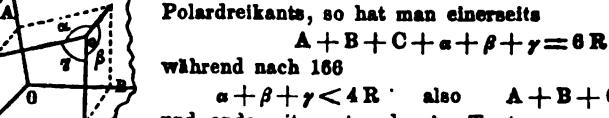
Bezeichnen a, b, c die Seiten eines Dreikants, so ist somit $a + b + c < 360°$. Ferner hat man, wenn a auch die grösste dieser Seiten ist, nach 160 dennoch $a < b + c$, also durch Addition beider Ungleichheiten $2a < 360°$ oder $a < 180°$.

167. Das Polardreieck und der Excess. Fällt man von einem innerhalb eines Dreikants liegenden Puncte o Senkrechte auf die Seiten desselben, so bestimmen die drei Senkrechten ein neues Dreikant, welches **Polardreikant** des ersten heisst, und (159) umgekehrt jenes erste zum Polardreikant hat. Jede Seite eines Dreikants ist (159, 113) zu dem Gegenwinkel des Polardreikants supplementär und umgekehrt. — Die Summe der Winkel eines Raumdreiecks und der Seiten seines Polardreiecks beträgt somit 6 R; also hat (166) die Winkelsumme des Raumdreiecks immer einen **Excess** 2e über die Winkelsumme des ebenen Dreiecks; derselbe schwankt zwischen 0 und 4 R, und kann (161) nach der Formel

$$\text{Sin e} = -\text{Cos}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \frac{\text{Sin}\,\mathfrak{a} \,.\, \text{Sin}\,\mathfrak{b}}{\text{Cos}\,\mathfrak{c}} \,.\, \text{Sin C} \qquad 1$$

berechnet werden, so dass für kleine Werthe von a, b, c nahe $2e : \text{Sin}\,1'' = {}^1/_2 \,.\, ab \,.\, \text{Sin C}$. (Vergl. 105). — Die halbe Summe s der Seiten eines Raumdreiecks ist zu dem halben Excesse ε der Winkel seines Polardreiecks supplementär.

Bezeichnen a, b, c, A, B, C die Seiten und Winkel eines Dreikants, — α, β, γ, A, B, Γ aber die Seiten und Winkel seines Polardreikants, so hat man einerseits



$$A + B + C + \alpha + \beta + \gamma = 6\,R$$

während nach 166

$$\alpha + \beta + \gamma < 4\,R \quad \text{also} \quad A + B + C > 2\,R$$

und anderseits unter der im Texte angenommenen Bedeutung von s und ε

$$2s = a + b + c = 6\,R - (A + B + \Gamma) = 6\,R - (2\,R + 2\varepsilon) \quad \text{oder} \quad s + \varepsilon = 180°$$

Um endlich 1 zu erhalten, hat man mit Hülfe von 161 : 1, 2 und bekannten goniometrischen Formeln

$$\text{Sin e} = -\text{Cos}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \text{Sin}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\text{Sin}\,\mathfrak{C} - \text{Cos}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\text{Cos}\,\mathfrak{C}$$

$$= \frac{\text{Sin}\,\mathfrak{C} \,.\, \text{Cos}\,\mathfrak{C} \,.\, \text{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{\text{Cos}\,\mathfrak{c}} - \frac{\text{Sin}\,\mathfrak{C} \,.\, \text{Cos}\,\mathfrak{C} \,.\, \text{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}{\text{Cos}\,\mathfrak{c}}$$

$$= \frac{\text{Sin C}}{2\,\text{Cos}\,\mathfrak{c}}\left[\text{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \text{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\right]$$

d. h. eben 1, — eine Formel, welche mit Hülfe von 160 : 7 auch leicht die Formen

$$\operatorname{Sin} e = \frac{d}{4 \operatorname{Cos} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{c}} = \tfrac{1}{2} \,.\, D \,.\, \operatorname{Tg} r \qquad 2$$

annimmt, wo die geometrische Bedeutung der vorläufig als Hülfsgrösse durch

$$\operatorname{Tg} r = \frac{\operatorname{Sin} \mathfrak{a}}{\operatorname{Cos} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{c} \,.\, \operatorname{Sin} A} \qquad 3$$

eingeführten Grösse r aus 190 hervorgehen wird. Auf ähnliche Weise wie 1 erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos} e &= \operatorname{Sin}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \operatorname{Sin}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \operatorname{Cos} \mathfrak{C} + \operatorname{Cos}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \operatorname{Sin} \mathfrak{C} \\ &= \frac{\operatorname{Cos}^2 \mathfrak{C} \,.\, \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{C} \,.\, \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}{\operatorname{Cos} \mathfrak{c}} \\ &= \frac{\operatorname{Cos} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{b} + \operatorname{Sin} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Sin} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Cos} \mathfrak{c}} \qquad 4 \end{aligned}$$

und mit Hülfe des zweitletzten Ausdruckes von Cos e ergibt sich, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 2\mathfrak{s}$ gesetzt und 160 : 5 benutzt wird,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg}^2 \frac{e}{2} &= \frac{1 - \operatorname{Cos} e}{1 + \operatorname{Cos} e} = \frac{\operatorname{Cos} \mathfrak{c} - \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + [\operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})] \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{C}}{\operatorname{Cos} \mathfrak{c} + \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - [\operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})] \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{C}} = \\ &= \frac{\operatorname{Sin}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b}) \,.\, \operatorname{Sin}(\mathfrak{a} - \mathfrak{s}) + \operatorname{Sin} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Sin} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{C}}{\operatorname{Cos}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b}) \,.\, \operatorname{Cos}(\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) - \operatorname{Sin} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Sin} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{C}} = \\ &= \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) \,.\, \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b}) \frac{\operatorname{Cos}(\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) \operatorname{Cos}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b}) - \operatorname{Cos} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{b}}{\operatorname{Cos} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{b} - \operatorname{Sin}(\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) \operatorname{Sin}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b})} = \\ &= \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b}) \frac{\operatorname{Cos} \mathfrak{c} + \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{\operatorname{Cos}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + \operatorname{Cos} \mathfrak{c} - \operatorname{Cos}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})} = \\ &= \operatorname{Tg} \mathfrak{s} \,.\, \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{a}) \,.\, \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{b}) \,.\, \operatorname{Tg}(\mathfrak{s} - \mathfrak{c}) \qquad 5 \end{aligned}$$

eine elegante Formel, welche nach dem Zeugnisse von **Legendre** (Pag. 320 der 5. Ausg. seiner Eléments de géométrie. Paris 1804 in 8.) der Genfer Simon **Lhuilier** zuerst aufstellte. Mit Hülfe von 4 und 1 ergibt sich endlich unter Beizug von 160 : 4

$$\begin{aligned} \operatorname{Ctg} e &= \frac{\operatorname{Cos} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Cos} \mathfrak{b} + \operatorname{Sin} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Sin} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Sin} \mathfrak{b} \,.\, \operatorname{Sin} C} = \frac{4 \operatorname{Cos}^2 \mathfrak{a} \,.\, \operatorname{Cos}^2 \mathfrak{b} + \operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Cos} C}{\operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} C} = \\ &= \frac{(1 + \operatorname{Cos} a)(1 + \operatorname{Cos} b) + \operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b}{\operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} C} = \frac{1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} a \,.\, \operatorname{Sin} b \,.\, \operatorname{Sin} C} \qquad 6 \end{aligned}$$

eine Formel, von welcher wir in 190 Gebrauch machen werden.

168. Umsetzungen mit Hülfe des Polardreieckes. Schreibt man eine für ein Raumdreieck geltende Beziehung für ein Polardreieck auf, und ersetzt dann die vorkommenden Elemente durch ihre Supplemente aus dem ursprünglichen Dreiecke, so findet man eine neue Beziehung für das Letztere. So folgen (160 : 2, 3, 6; 162 : 2, 3; 163 : 1)

$$\operatorname{Cos} C = - \operatorname{Cos} A \,.\, \operatorname{Cos} B + \operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Sin} B \,.\, \operatorname{Cos} c \qquad 1$$

$$= - \frac{\operatorname{Cos} A \,.\, \operatorname{Cos}(B + x)}{\operatorname{Cos} x} \quad \text{wo} \quad \operatorname{Tg} x = \operatorname{Tg} A \,.\, \operatorname{Cos} c \qquad 2$$

$$\operatorname{Tg} \mathfrak{c} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} e \,.\, \operatorname{Sin}(C - e)}{\operatorname{Sin}(A - e) \,.\, \operatorname{Sin}(B - e)}} \qquad 3$$

$$\text{Sin A . Cos b} = \text{Cos B . Sin C} + \text{Sin B . Cos C . Cos a} \qquad 4$$
$$\text{Sin a . Ctg b} = \text{Ctg B . Sin C} + \text{Cos C . Cos a} \qquad 5$$
$$\text{d A} = -\text{Cos c . d B} - \text{Cos b . d C} + \text{Sin b . Sin C . d a} \qquad 6$$

Und so weiter.

Nach 160:2 hat man z. B. für das Polardreieck bei entsprechender Bezeichnung wie in 167

$$\text{Cos}\,\gamma = \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta \,.\, \text{Cos}\,\Gamma$$

also für das Dreieck selbst

$$\text{Cos}\,(180 - C) = \text{Cos}\,(180 - A)\,\text{Cos}\,(180 - B) + $$
$$+ \text{Sin}\,(180 - A)\,\text{Sin}\,(180 - B)\,\text{Cos}\,(180 - c)$$

woraus sofort 1 folgt. Entsprechend in andern Fällen.

169. Die Raumtrigonometrie. Sind in einem Raumdreiecke alle drei Seiten gegeben, so kann man nach (160:5, 6), — sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, nach (160:3, 1, oder 161:3 und 160:1), — sind eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben, nach (168:2 und 160:1, oder 161:4 und 160:1), — sind alle drei Winkel gegeben, nach (168:3) je die übrigen Elemente berechnen. — In dem speciellen Falle, wo in einem Raumdreiecke ein Winkel, z. B. C, gleich 90^0 ist, hat man die einfachern Formeln

$$\text{Sin a} = \text{Sin c . Sin A} \qquad \text{Tg a} = \text{Tg A . Sin b} \qquad 1$$
$$\text{Cos c} = \text{Cos a . Cos b} \qquad \text{Ctg c} = \text{Ctg b . Cos A} \qquad 2$$
$$\text{Cos A} = \text{Cos a . Sin B} \qquad \text{Ctg A} = \text{Cos c . Tg B} \qquad 3$$

zur Disposition.

Die im Texte gegebenen Vorschriften und Formeln bedürfen wohl keiner weitern Erläuterung. Dagegen ist zu erwähnen, dass den angeführten vier Fällen am Raumdreiecke oft noch zwei weitere beigefügt werden, nämlich wenn gegeben sind **entweder** zwei Seiten (z. B. a, b) und ein Gegenwinkel (z. B. A), — **oder** eine Seite (z. B. a), der Gegenwinkel (A) und ein Nebenwinkel (z. B. B). Es sind jedoch, auch wenn man sich auf Dreiecke beschränkt, deren sämmtliche Seiten und Winkel kleiner als zwei Rechte sind, in diesen beiden Fällen die Lösungen nur unter gewissen Bedingungen bestimmt, während unter andern Bedingungen mehrere Lösungen möglich sind: So hat man zur Lösung des erstern Falles nach 160:1 und 161:3

$$\text{Sin B} = \frac{\text{Sin b}}{\text{Sin a}} \,.\, \text{Sin A} \qquad \text{Tg}\,\mathfrak{C} = \frac{\text{Cos}\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{\text{Cos}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}\,\text{Ctg}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \qquad 4$$

Die erstere Formel gibt nun im Allgemeinen, wegen der Zweideutigkeit des Sinus, für B zwei Werthe B' und $B'' = 180^0 - B'$, und für sie gibt auch die zweite Formel im Allgemeinen zwei Werthe, welche nach

$$\text{Tg}\,\mathfrak{C}' = \frac{\text{Cos}\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{\text{Cos}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}\,\text{Ctg}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}') \quad \text{und} \quad \text{Tg}\,\mathfrak{C}'' = -\frac{\text{Cos}\,(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{\text{Cos}\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}\,\text{Tg}\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}')$$

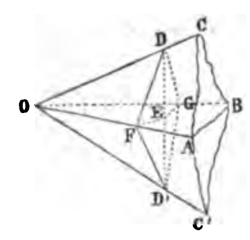
berechnet werden können, wobei jedoch wegen der anfänglich gestellten Bedingung nur Lösungen zulässig sind, welche $\mathfrak{C} < 90^0$ oder $\text{Tg}\,\mathfrak{C} = +$ ergeben. Ist nun z. B. $A < 90^0$, $b < 90^0$ und $a > b$, so ist nothwendig $B' < A$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}' < 90^0$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}' = +$, während $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ kleiner oder grösser als 90^0

sein kann, — und in ersterem Falle ist daher nur $\mathfrak{C}'$, im zweiten nur $\mathfrak{C}''$ möglich, also **nur Eine Lösung** vorhanden; ist dagegen bei übrigens gleichen Bedingungen $a < b$, so ist zwar, weil immer $B' < 90^0$, noch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}' < 90^0$, aber $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}' = -$, und, da jetzt bestimmt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < 90^0$, so werden sowohl $\mathfrak{C}'$ als $\mathfrak{C}''$ möglich, so dass in diesem Falle **zwei Lösungen** vorhanden sind. — Entsprechend könnten andere Bedingungen untersucht werden; wir wollen uns jedoch mit diesem Einen Beispiele begnügen, da durch dasselbe bereits der Nachweis geleistet ist, dass derartige Supplementarfälle nicht von derselben Bedeutung sind wie die vier Hauptfälle. — Ein Zahlenbeispiel über Berechnung des Raumdreieckes zu geben dürfte überflüssig sein, da dieselbe in ganz analoger Weise zu führen ist, wie diejenige in 106 am ebenen Dreiecke, und da überdiess für Anwendung der aufgestellten Formeln auf Geodäsie und Astronomie verwiesen werden kann. Dagegen mögen zur Ergänzung der in 103 gegebenen Litteratur noch folgende speciell über Raumtrigonometrie handelnde Schriften aufgeführt werden: Antoine-René **Mauduit** (Paris 1731 — Paris 1815; Professor der Mathematik in Paris), Principes d'astronomie sphérique, ou traité complet de trigonométrie sphérique. Paris 1765 in 8., — Barnaba **Oriani** (Garegnano bei Mailand 1752 — Mailand 1832; Director der Sternwarte des vormaligen Jesuitencollegiums Brera in Mailand), Elementi di trigonometria sferoidica (Mem. Istit. Ital. 1804—1806) in 4., — Johann Baptist **Sniadecki** (Woywodschaft Gnesen 1756 — Jassuny bei Wilna 1830; Professor der Astronomie zu Krakau, dann Director der Sternwarte zu Wilna), Trygonometrya Kulista, analitycznie wylozona. Wilno i Warszawa 1820 in 8. (Deutsch von L. Feldt, Leipzig 1828 in 8.), — Otto **Möllinger** (Speier 1814; Professor der Mathematik in Solothurn), Die sphärische Trigonometrie. Solothurn 1860 in 4., — etc."

170. Symmetrie und Congruenz. Fällt man auf eine Seite des Raumdreiecks von einem Puncte der Gegenkante eine Senkrechte, verlängert diese über ihren Fusspunct hinaus um ihre eigene Länge, und verbindet den so erhaltenen Punct mit dem Scheitel, so bestimmt diese Verbindungslinie mit jener Seite ein neues Raumdreieck, welches zu dem gegebenen in Beziehung auf die gemeinschaftliche Seite **symmetrisch** heisst, und mit ihm (ohne congruent zu sein) alle Seiten und Winkel gleich hat. — Haben zwei Raumdreiecke alle drei Seiten, oder zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder eine Seite und die anliegenden Winkel, oder alle drei Winkel gleich, so sind sie (169) congruent oder symmetrisch gleich, je nachdem sie in dieselbe Lage gebracht werden können oder nicht.

Der in der Ebene dahinfallende, für den Raum charakteristische Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie entging schon einzelnen ältern Geometern nicht, doch wurde er namentlich 1741 von Johann Andreas **Segner** (Pressburg 1704 — Halle 1777; erst Arzt in Pressburg, später Docent und Professor der Mathematik und Physik in Jena, Göttingen und Halle) bei Vergleichung eines Kugeldreieckes mit seinem Gegendreiecke in einer 1741 erschienenen Streitschrift „Defensio adversus censuram Berolinensem" und in seinen „Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie. Lemgo 1747 in 4. (Auch 1767)" scharf hervorgehoben, und tritt ganz besonders leicht in der

im Texte gegebenen Weise hervor: Ist nämlich DE ⊥ AOB und D'E = DE, so braucht man nur EF ⊥ AO und EG ⊥ BO zu ziehen, und die Congruenzen DEF ≅ D'EF, DEG ≅ D'EG in's Auge zu fassen, um sofort einzusehen, dass die Raumdreiecke O — ABC und O — ABC' gleiche Seiten und Winkel haben, ohne dass man durch Umwenden das eine an die Stelle des andern bringen, oder also die beiden Raumdreiecke mit einander vertauschen kann.



XVII. Das Vierflach und Vielflach.

171. Das Polyeder. Kann man durch eine Auswahl aus den $\frac{1}{2} . n (n - 1)$ Kanten, in welchen sich n Ebenen schneiden, sämmtliche Ebenen so begrenzen, dass jede der gewählten Kanten beide Ebenen, denen sie angehört, begrenzen hilft, so erhält man eine Reihe von Vielecken, die einen Raum vollständig einschliessen, oder einen **Körper** bilden, und zwar ein sogenanntes **n-Flach.** Für n = 4, 5, 6, 8, 12, 20, etc. heisst das n-Flach auch wohl Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder, Octaeder, Dodekaeder, Ikosaeder, etc., — im Allgemeinen Polyeder.

Zur Ergänzung der in 73 und 155 gegebenen Litteratur mögen noch die Specialschriften „Aloys **Hohl** (Lauchheim in Würtemberg 1805; Professor der Mathematik in Tübingen), Die Lehre von den Polyedern. Tübingen 1842 in 8., — Ludwig Christian **Wiener** (Darmstadt 1826; Lehrer der Mathematik in Darmstadt, Giessen und Karlsruhe), Ueber Vielecke und Vielflache (mit Netzen und Abbildungen von regelmässigen Sternvielflachen), Leipzig 1864 in 4., — etc." angeführt werden.

172. Das Vierflach. Der einfachste Körper ist das von 4 Dreiecken begrenzte Vierflach. Bezeichnen a, b, c, d seine Seiten, so ist (165)

$$a = b . \operatorname{Cos}(a, b) + c . \operatorname{Cos}(a, c) + d . \operatorname{Cos}(a, d) \qquad 1$$

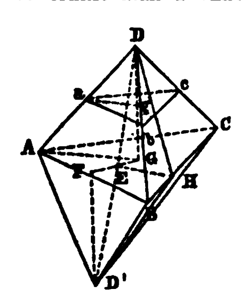
und aus dieser und den entsprechenden Gleichungen folgt

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \operatorname{Cos}(b, c) - 2bd \operatorname{Cos}(b, d) - 2cd \operatorname{Cos}(c, d) \qquad 2$$

Verbindet man eine Ecke eines Vierflachs mit einem Puncte der Gegenseite, und verlängert diese Verbindungslinie um ihre eigene Länge, so bestimmt der erhaltene Punct mit der Seite das sog. (für eine Senkrechte symmetrische) **Gegenvierflach,** welches mit dem Vierflach gleichen Rauminhalt haben muss, da (90) jeder durch die Gerade der Spitzen gelegten Ebene in beiden Vierflachen ein gleich grosser Schnitt entspricht. — Zwei Vierflache, welche congruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind beide (91) demselben Gegenvierflache gleich, und daher auch selbst gleich gross. —

Führt man durch die Mitte einer Tetraederkante und ihre beiden Gegenecken einen Schnitt, so sind die beiden Theile offenbar in Beziehung auf die Schnittebene Gegenvierflache, und man hat daher das Tetraeder halbirt.

Schreibt man 1 auch für b, c, d auf, — multiplicirt diese Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c, d, — und bildet die Summe $a^2 - b^2 - c^2 - d^2$, so erhält man 2 ohne Schwierigkeit. — Ist E irgend ein Punct in der Seite A B C eines Vierflachs A B C D, und verlängert man D E um D'E = D E, so hat das so bestimmte Gegenvierflach A B C D' mit dem Vierflache A B C D offenbar gleiche Höhe, und wenn umgekehrt D'F = D G, so muss D'E = E D oder A B C D' ein Gegenvierflach sein. Ferner ist für jeden Punct H im Umfange des Dreiecks A B C nothwendig D E H = D'E H; wenn aber H jenen Umfang durchläuft, so beschreiben D E H und D'E H jene beiden Vierflache, also müssen diese letztern auch gleichen Rauminhalt haben. — Hat man zwei Vierflache von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen, construirt zu dem Einen ein Gegenvierflach, und transportirt es an das Andere, so ist es nach dem Obigen nothwendig wieder Gegenvierflach. — Die Einführung des Gegenvierflachs und des hier und unter den folgenden Nummern eingeschlagenen Weges zur Bestimmung des Tetraedervolumens geschah durch mich, wie die erste Auflage des Taschenbuches beweist, schon vor 1852. Früher hatte ich (vergl. Grunert VII 440—448) einen andern Gang eingeschlagen, der wesentlich darauf beruhte, dass jeder zu A B C parallele Schnitt a b c ∾ A B C ist, da durch den parallelen Schnitt Winkel mit parallelen Schenkeln entstehen, und dass (107)



$$abc : ABC = ab^2 : AB^2 = aD^2 : AD^2 = Dg^2 : DG^2$$

dass somit bei zwei Tetraedern von gleicher (nicht nur von congruenter) Grundfläche und Höhe gleich hohe Parallelschnitte zur Grundfläche gleich gross sind, also auch die Tetraeder selbst als Summen von gleichen Elementen gleich gross sein müssen.

173. Das rechtwinklige Vierflach. Stehen drei Seiten eines Vierflachs, z. B. b, c, d, paarweise zu einander senkrecht, so heisst dasselbe **rechtwinklig**, und es besteht in demselben (172 : 2) der dem pythagoräischen Lehrsatze entsprechende Satz von Gua

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 \qquad 1$$

Zwei rechtwinklige Vierflache, welche je zwei von der rechten Ecke ausgehende Kanten gleich haben, verhalten sich (172) wie die dritte. Sind A B C, a B C, a b C, a b c die von der rechten Ecke ausgehenden Kanten von 4 rechtwinkligen Vierflachen der Inhalte oder Volumina $V\ V_1\ v_1\ v$, so hat man somit

$$V : V_1 = A : a \qquad V_1 : v_1 = B : b \qquad v_1 : v = C : c$$

also durch Multiplication

$$V : v = A . B . C : a . b . c$$

Setzt man daher (analog 92) den Inhalt gleich 1, wenn die drei Kanten (Dimensionen) 1, 2, 3 sind, so ist

$$V = \frac{A . B . C}{1 . 2 . 3} = \frac{1}{3} . \frac{A B}{2} . C \qquad 2$$

oder der Inhalt gleich ein Drittel des Productes aus Grundfläche und Höhe.

Theilt man bei zwei rechtwinkligen Vierflachen, welche je zwei von der rechten Ecke ausgehende Kanten gleich haben, die dritten Kanten im Verhältnisse ihrer Länge in gleiche Theile, und führt durch die Theilpuncte und die Gegenecken Schnitte, so zerfallen Beide nach 172 in gleiche Theile, folglich verhalten sie sich wie diese dritten Kanten. — Der durch 1 ausgedrückte, von **Lhuilier** noch im höchsten Greisenalter bewunderte und besungene Satz von **Gua** ist von diesem muthmasslich zuerst in seinem „Essai de tétraédrométrie (Mém. de Par. 1783) ausgesprochen worden.

174. Der Rauminhalt des Vierflachs. Da man die Grundfläche jedes Tetraeders in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und die Spitze (172) senkrecht über den Theilpunct der Basis der Grundfläche bringen kann, so ist (173) der Inhalt jedes Tetraeders gleich ein Drittel des Productes aus Grundfläche und Höhe, — oder auch (160), wenn a, b, c drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten desselben und α, β, γ ihre Winkel bezeichnen,

$$V = \frac{a b c}{3} \sqrt{\operatorname{Sin} s . \operatorname{Sin}(s - \alpha) . \operatorname{Sin}(s - \beta) . \operatorname{Sin}(s - \gamma)} \qquad 1$$

wo $2s = \alpha + \beta + \gamma$. — Jeder zu einer Seitenfläche eines Tetraeders parallele Schnitt desselben ist (164, 157) ihr ähnlich, und zerfällt dasselbe in zwei Theile, von denen der eine wieder ein Tetraeder ist, während der andere **abgekürztes Tetraeder** heisst, und (vergl. 180) als Differenz zweier Tetraeder leicht berechnet werden kann.

Wählt man die von den Kanten b, c und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α bestimmte Seite G als Grundfläche, und bezeichnen B und H den an der Kante b liegenden Flächenwinkel und die Höhe, so hat man

$$V = \frac{G H}{3} \qquad G = \frac{b c}{2} \operatorname{Sin} \alpha \qquad H = a \operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Sin} B$$

während nach 160 : 5

$$\operatorname{Sin} B = \frac{2 \sqrt{\operatorname{Sin} s . \operatorname{Sin}(s - \alpha) \operatorname{Sin}(s - \beta) \operatorname{Sin}(s - \gamma)}}{\operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Sin} \gamma}$$

woraus die Formel 1 sofort erhalten wird. — Ist g ein parallel zu G in der Höhe h geführter Schnitt, so hat man nach 172

$$\frac{g}{G} = \frac{(H - h)^2}{H^2} \quad \text{oder} \quad H = \frac{h \sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \quad \text{und} \quad H - h = \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

also den Inhalt des abgekürzten Tetraeders

$$v = \frac{GH}{3} - \frac{g(H-h)}{3} = \frac{h}{3} \cdot \frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g) \qquad 2$$

Vergleiche auch 180.

175. Die Pyramide. Bewegt sich eine Gerade um einen Punct, und folgt dabei irgend einer Figur als Leitlinie, so umschreibt sie einen **pyramidalischen Raum.** Begrenzt man letztern durch eine schneidende Ebene, die sog. Grundfläche, so entsteht die nach der Anzahl ihrer dreieckigen Seitenflächen benannte **Pyramide,** deren Inhalt (174) gleich dem Drittel des Productes aus Grundfläche und Höhe ist, und die **gerade** heisst, wenn ihre Spitze senkrecht über dem Schwerpuncte der Basis steht. Ist die Leitlinie eine krumme Linie, so heisst die Pyramide **Kegel** oder **Conus.** — Bezeichnen g, h, s Grundfläche, Höhe und Seitenfläche einer geraden Pyramide der Seitenkante k, deren Grundfläche ein regelmässiges n-Eck der Seite 2a ist, so hat man (93; 121:1), wenn $\varphi = 180^0 : n$ ist,

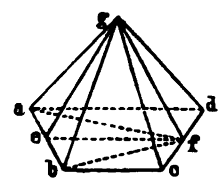
$$g = n \, . \, a^2 \, . \, \mathrm{Ctg}\, \varphi \qquad h = \sqrt{k^2 - a^2 \, . \, \mathrm{Cosec.}^2 \varphi} \qquad s = a\sqrt{k^2 - a^2} \qquad 1$$

$$O = ns + g \qquad V = \frac{gh}{3} \qquad 2$$

wo O die aus Mantel und Grundfläche bestehende sog. **Oberfläche,** V das Volumen vorstellt. — Hat eine Pyramide ein Trapez zur Grundfläche, so nennt man das durch die Spitze und die Mitten der nicht parallelen Seiten der Grundfläche bestimmte Dreieck **Hauptschnitt** derselben. Die vier Ecken der Grundfläche haben von dem Hauptschnitte gleichen Abstand, und jede derselben bestimmt mit ihm ein Tetraeder, dessen Inhalt $^1/_4$ der Pyramide beträgt; die ganze Pyramide ist daher gleich $^4/_3$ des Productes aus Hauptschnitt und Eckenabstand.

Aus Verbindung der Formeln 1 erhält man die nicht uninteressante Beziehung

$$h = \frac{1}{na}\sqrt{(ns+g)(ns-g)} \qquad 3$$



Der für 180 so ergiebige Satz über die Trapez-Pyramide ist von **Steiner** aufgestellt worden, und ergiebt sich leicht auf folgende Weise: Ist 2h die Höhe des Trapezes, so ist seine Fläche

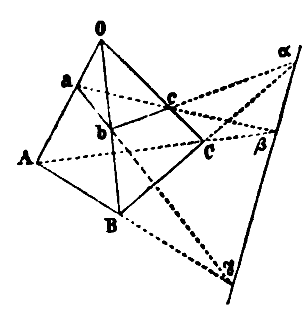
$$abcd = \frac{ad + bc}{2} \, . \, 2h = ef \, . \, 2h = 4 \, . \, \frac{ef \, . \, h}{2} = 4 \, . \, aef$$

also ist Pyramide

$$g - abcd = 4 \, . \, agef = 4 \, . \, \frac{gef \, . \, k}{3} = \frac{4}{3} \, . \, gef \, . \, k$$

wo k den Abstand der Ecke a vom Hauptschnitte bezeichnet. — Jede zwei ebene Schnitte ABC... und abc... einer Pyramide heissen in Beziehung

auf die Spitze O derselben **perspectivisch** gelegen; dabei fallen, wie schon **Désargues** bemerkt haben soll, die Durchschnittspuncte $\alpha \beta \gamma \ldots$ der entsprechenden Seiten nothwendig in eine Gerade, die Kante der beiden Schnitte, — und umgekehrt, wenn die Durchschnittspuncte der entsprechenden Seiten zweier Figuren in eine Gerade, die sog. **Collineationsaxe**, fallen, so müssen sie perspectivisch liegen und die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken sich in Einem Puncte, dem sog. **Collineationscentrum**, schneiden; in dem speciellen Falle, wo Letzteres in's Unendliche fällt, heissen die Figuren perspectivisch **affin**.



176. Der Kegel. Bei einem geraden Kegel der Höhe h und des Radius r sind alle Seitenkanten $k = \sqrt{r^2 + h^2}$, sein Mantel aber ist gleich einem Kreisausschnitte des Radius k und des Bogens $2r\pi$, so dass (175) die Formeln

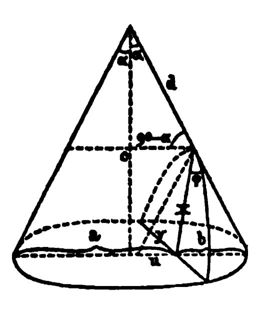
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h \qquad O = (k + r) r \pi \qquad 1$$

Volumen und Oberfläche zu berechnen lehren. Vergl. 180.

Es ist interessant, dass nach 1, wenn zwei Kegel gleichen Radius besitzen, und bei dem einen die Kante um diesen Radius länger ist als bei dem andern, der Mantel des Ersten genau der Oberfläche des Zweiten gleich ist. — Wird ein Kegel des Winkels α in der Distanz d von der Spitze und unter dem Winkel φ zur Kante durch eine Ebene geschnitten, so ist die entstehende Schnittlinie oder der sog. **Kegelschnitt** eine Linie zweiten Grades. Mit Hülfe der Figur ergeben sich nämlich offenbar die Beziehungen

$$y^2 = a \cdot b = (c + u) b \qquad c = 2d \cdot \operatorname{Sin} \alpha$$

$$b : x = \operatorname{Sin} \varphi : \operatorname{Cos} \alpha \qquad u : x = \operatorname{Sin}(2\alpha - \varphi) : \operatorname{Cos} \alpha$$



und aus diesen folgt sofort

$$y^2 = \left(2d \cdot \operatorname{Sin} \alpha + \frac{x \operatorname{Sin}(2\alpha - \varphi)}{\operatorname{Cos} \alpha}\right) \cdot \frac{x \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos} \alpha} = 2px + qx^2 \qquad 2$$

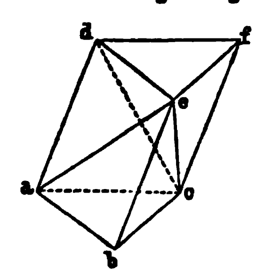
wo

$$p = d \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Tg} \alpha \qquad q = \frac{\operatorname{Sin} \varphi \cdot \operatorname{Sin}(2\alpha - \varphi)}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \qquad 3$$

womit die Behauptung erwiesen ist. Vergleicht man 2 mit 137:9, so ergibt sich im Fernern, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem q negativ, Null oder positiv wird, d. h. je nachdem man φ grösser, gleich oder kleiner 2α macht, — und dass in allen Fällen p den Parameter bezeichnet. Speciell für den Kreis ist der Parameter gleich der halben Axe oder $q = -1$, was für $\varphi = 90° + \alpha$, d. h. für einen zur Basis des Kegels parallelen Schnitt statt hat.

177. Das Prisma. Bewegt sich eine Gerade parallel mit sich selbst, und folgt dabei irgend eine Figur als Leitlinie, so umschreibt sie einen **prismatischen Raum**; parallele Schnitte desselben sind (164, 89) congruent, und bestimmen als Grundflächen ein **Prisma**, das nach der Anzahl seiner Seitenflächen, die Parallelogramme sind, benannt wird. Ist auch die Leitlinie ein Parallelogramm, so heisst das Prisma **Parallelepipedon** oder **Zeilflach**, — dagegen **Zylinder** oder **Walze**, wenn sie eine krumme Linie ist. Ein gleichseitiges Zeilflach wird **Rhomboeder**, — ein gleichseitig-rechtwinkliges aber **Cubus** oder **Würfel** genannt. — Ein dreiseitiges Prisma lässt sich durch zwei Diagonalebenen (172) in drei gleiche Tetraeder zerlegen, und ist daher (174) gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe, — eine auf jedes Prisma ausdehnbare Regel.

Gewöhnlich werden die Volumenrechnungen nicht mit dem Tetraeder, sondern mit dem rechtwinkligen Zeilflache begonnen; mir scheint jedoch in dem hier eingeschlagenen Wege aus analogen Gründen, wie sie in 92 für die neue Methode der Flächenrechnung angeführt wurden, ein Fortschritt zu liegen. — Dass die beiden Diagonalebenen a c e und c d e das dreiseitige Prisma abcdef in drei Tetraeder zerlegen, von denen sowohl e — a b c als e — a c d mit dem dritten c — d e f = e — c d f je gleiche Grundfläche und Höhe haben, geht wohl auf den ersten Blick aus der Figur hervor; ein mehrseitiges Prisma aber lässt sich durch Diagonalebenen leicht in dreiseitige Prismen zerfällen.



178. Der Zylinder. Wird die Höhe h eines Zylinders durch die Verbindungslinie der Mittelpuncte seiner Grundflächen des Radius r dargestellt, so ist sein Mantel gleich einem Rechtecke der Basis $2 r \pi$ und Höhe h, so dass (177) die Formeln

$$V = r^2 \pi h \qquad O = 2(r + h) r \pi$$

Volumen und Oberfläche zu berechnen lehren.

Es ist interessant, dass, wenn zwei Zylinder gleichen Radius besitzen, und bei dem Einen die Höhe um diesen Radius grösser ist als bei dem Andern, der Mantel des Ersten genau gleich der Oberfläche des Zweiten wird. — Setzt man den Winkel eines Kegels gleich Null, so erhält man offenbar einen Zylinder; setzt man aber in 176 den Winkel α gleich Null, so wird nach 3 nothwendig q negativ, — also ist jeder ebene Zylinderschnitt eine Ellipse.

179. Das Prismoid. Wird ein prismatischer Raum durch irgend zwei ebene Schnitte begrenzt, so heisst der entstehende Körper **Prismoid.** Ein dreiseitiges Prismoid lässt sich durch zu den

parallelen Kanten senkrechte Schnitte (Querschnitte) in ein Prisma und zwei Pyramiden zerlegen, und ist daher (175, 177) gleich Querschnitt mal Mittel der parallelen Kanten.

Der Inhalt eines mehrseitigen Prismoids kann offenbar gefunden werden, indem man dasselbe durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismoide zerlegt.

180. Der Obelisk. Nennt man ein Vielflach mit zwei parallelen Grundflächen, dessen Seitenflächen Trapeze oder Dreiecke sind, Obelisk, so lässt sich ein Obelisk, indem man alle seine Ecken mit einem Puncte des in halber Höhe geführten Querschnittes verbindet, nach dem Vorgange von Steiner in zwei auf den Grundflächen stehende Pyramiden und eine Reihe von Trapez-Pyramiden, deren Hauptschnitte den Querschnitt bilden, zerfällen, so dass der Obelisk (175) ein Sechstel eines Prisma's von gleicher Höhe ist, dessen Grundfläche aus den beiden Grundflächen (F, f) und dem vierfachen Querschnitte (q) besteht. Ist (wie bei dem abgekürzten Tetraeder) $F \backsim q \backsim f$, so wird (107)

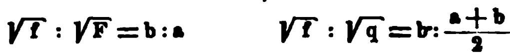
$$q = \frac{f + 2\sqrt{Ff} + F}{4} \qquad \text{und} \qquad V = \frac{h}{3}(f + \sqrt{Ff} + F) \qquad 1$$

und sind endlich F und f Kreise der Radien R und r, so ist

$$q = \frac{\pi}{4}(r^2 + 2Rr + R^2) \qquad \text{und} \qquad V = \frac{h\pi}{3}(r^2 + Rr + R^2) \qquad 2$$

zu setzen.

Mit welch' einfachen Mitteln **Steiner** Schwierigkeiten zu überwinden wusste, zeigt der eben mitgetheilte Beweis des scheinbar sehr complicirten, meines Wissens zuerst in der Schrift „**Koppe**, Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie. Essen 1843 in 8." gegebenen Satzes vom Obelisken. — Wenn $F \backsim q \backsim f$, so hat man nach 107, wenn a und b homologe Seiten von F und f sind,



$$\sqrt{f} : \sqrt{F} = b : a \qquad \sqrt{f} : \sqrt{q} = b : \frac{a+b}{2}$$

und somit

$$\sqrt{f} : \frac{\sqrt{f} + \sqrt{F}}{2} = b : \frac{a+b}{2} = \sqrt{f} : \sqrt{q}$$

woraus der obige Werth von q für das abgekürzte Tetraeder hervorgeht, und damit die mit 174 : 2 übereinstimmende Formel 1, aus der 2 ohne Schwierigkeit folgt.

XVIII. Das centrische Vielflach und die Kugel.

181. Der Euler'sche Satz. Bezeichnet k die Anzahl der Kanten eines Polyeders, f_n die Anzahl der unter seinen Flächen vorkommenden n-Ecke und e_n die Anzahl seiner n-kantigen Ecken,

so ist offenbar

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \ldots \qquad 1$$

Ein Polyeder, das von keiner seiner Flächen geschnitten wird, oder das man auf jede seiner Flächen legen kann, dessen Flächen also sämmtlich der Form (0,1) angehören, heisst **convex.** Denkt man sich ein solches Polyeder von k Kanten und e Ecken, dessen f Flächen die Seitenzahlen m, n,... haben, auf eine Ebene projicirt, so werden die Projectionen gewisser Kanten eine Contour von e' Ecken bilden, zwischen welcher zwei Netze von Vielecken (ein oberes mit e'' innern Ecken und ein unteres mit e''' innern Ecken) liegen. Die Summe aller Kantenwinkel des Polyeders ist nun (80)

$$2(m-2)R + 2(n-2)R + \ldots = 4(k-f)R$$

die der sämmtlichen Winkel der Projection aber

$$[2(e'-2)R + 4e''R] + [2(e'-2)R + 4e'''R] = 4(e-2)R$$

und diese beiden Summen müssen gleich sein, da jedes n-Eck des Polyeders auch in der Projection als n-Eck erscheint. Man hat daher

$$k - f = e - 2 \qquad \text{oder} \qquad e + f = k + 2 \qquad 2$$

d. h. den sog. Euler'schen Satz. — Für ein Polyeder, in welchem alle Flächen x-seitig, alle Ecken aber y-kantig sind, hat man nach 1 und 2

$$x.f = 2k = y.e \qquad\qquad e + f = k + 2$$

woraus

$$k = \frac{2xy}{m} \quad f = \frac{4y}{m} \quad e = \frac{4x}{m} \quad \text{wo} \quad m = 2(x+y) - xy \qquad 3$$

folgen. Da jede Fläche mindestens dreiseitig und jede Ecke mindestens dreikantig sein muss, so kann man $x = 3 + \alpha$ und $y = 3 + \beta$ setzen, wofür

$$m = 3 - (\alpha + \beta) - \alpha\beta \qquad 4$$

wird. Da nur solche Werthe von α, β, m zulässig sind, welche für x, y, k, f, e ganze und positive Werthe ergeben, so können nur folgende der obigen Bedingung genügende Polyeder existiren: Tetraeder, Octaeder und Ikosaeder aus Dreiecken, Hexaeder aus Vierecken und Dodekaeder aus Fünfecken.

Da nach den im Texte abgeleiteten Beziehungen

$$e = \frac{2k}{y} \qquad\qquad f = \frac{2k}{x}$$

so folgt sofort nach 2

$$\frac{2k}{y} + \frac{2k}{x} = k + 2 \qquad \text{oder} \qquad k = \frac{2xy}{2x + 2y - xy}$$

oder 3. — Nach 3 und 4 erhält man folgende zusammengehörige Werthe:

α	β	m	x	y	k	f	e	
0	0	3	3	3	6	4	4	Tetraeder
0	1	2	3	4	12	8	6	Octaeder
0	2	1	3	5	30	20	12	Icosaeder
0	3	0	3	6	∞	∞	∞	
1	0	2	4	3	12	6	8	Hexaeder
1	1	0	4	4	∞	∞	∞	
2	0	1	5	3	30	12	20	Dodecaeder
3	0	0	6	3	∞	∞	∞	

und es geht hieraus einerseits die Richtigkeit der am Schlusse des Textes aufgestellten Behauptungen hervor, und anderseits zeigt sich, dass man eine Ebene auf drei Arten mit regelmässigen Figuren ausfüllen oder auf drei Arten zu dem regelmässigen Unendlichflach (der Kugel) übergehen kann. — Der obige schöne, allerdings von Anton **Müller** (Seckenheim 1799 — Zürich 1860; Professor der Mathematik in Heidelberg und Zürich, sowie Erfinder der Gauchen-Polygone), in seinem Schriftchen „Zur Polyedrometrie. Heidelberg 1837 in 8." als „windig und werthlos" bezeichnete Beweis des, nach den 1860 von Foucher publicirten „Oeuvres inédites de **Descartes** (Vol. 2, pag. 214)" schon diesem ältern Geometer bekannten, aber erst 1752 durch **Euler** (s. Nov. Comment. Petrop. 4) öffentlich ausgesprochenen und so auch nach ihm benannten Satzes rührt von **Steiner** (s. Crelle 1) her.

182. Die regelmässigen Polyeder. Ein Vielflach kann nach den Ecken, Kanten oder Seiten centrisch sein. Ist es centrisch nach den Ecken, so ist (156) auch jede seiner Flächen centrisch nach den Ecken; ist es centrisch nach den Kanten, so ist (158) jede seiner Flächen centrisch nach den Seiten; ist es centrisch nach den Seiten, so stehen (158, 91) die Projectionen seines Centrums auf zwei Nebenseiten von der Kante dieser Seiten gleich weit ab, und jede durch den Mittelpunct und eine Kante gelegte Ebene halbirt (159) den Vielflachwinkel an dieser Kante, während (175) der Inhalt gleich ein Drittel des Productes aus Oberfläche und Apothema ist. Wenn endlich, was aber nach 181 nur bei fünf Vielflachen möglich, derselbe Punct in allen drei Beziehungen Centrum, oder das Vielflach **centrisch** ist, so hat es gleiche Kanten, Seiten und Winkel, oder ist **regelmässig**. — Sind (s. Fig.) b d = 2 s und g Kante und Centrum eines centrischen Körpers, e und f die Mittelpuncte der an b d stossenden n-Ecke, m die Anzahl der an einer Ecke zusammentreffenden Flächen, so hat man (159, 169)

$$\alpha = \frac{180}{n}, \quad \text{Sin}\frac{w}{2} = \text{Cos}\frac{180}{m} : \text{Sin}\frac{180}{n}, \quad \text{Cos}\,\varphi = \text{Ctg}\frac{180}{m} . \text{Ctg}\frac{180}{n} \qquad 1$$

und

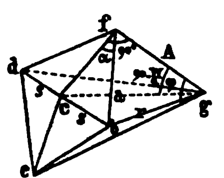
$$A = c f \, . \, Tg \frac{w}{2} = s \, . \, Ctg \frac{180}{n} \, . \, Tg \frac{w}{2} \qquad 2$$

$$a = A \, . \, Cosec \frac{w}{2} = s \, . \, Ctg \frac{180}{n} \, . \, Sec \frac{w}{2} \qquad 3$$

$$r = A \, . \, Sec \, \varphi = s \, . \, Tg \frac{180}{m} \, . \, Tg \frac{w}{2} \qquad 4$$

wo A das Apothema der Seiten, a dasjenige der Kanten, und r den Radius bezeichnet.

Den Namen **Vielflach** (n-Flach) statt Polyeder zu gebrauchen, schlug ich vor vielen Jahren vor, und publicirte dann etwas später eine Note „Ueber das centrische Vielflach (Bern. Mitth. 1847, pag. 93—94)", in der die meisten der oben aufgeführten Grundeigenschaften dieser merkwürdigen Körper ausgesprochen wurden. — Dreht man die Ebene f b g um b g, bis sie mit d b g, e b g, etc. und zuletzt wieder mit f g b zusammenfällt, so ist die Summe aller 2 m hiefür nöthigen gleichen Einzel-Drehungen 360°, also z. B. $\angle fbgd = 180° : m$, während $\angle bfgc = \alpha$ und $\angle bcgf = 90°$ ist. Wendet man daher auf das Raumdreieck g — b c f die Formeln 169 : 3', 2'' an, so erhält man ohne weiteres die Formeln 1, mit deren Hülfe 2—4 ohne Schwierigkeit erhalten werden. Setzt man 2 s = 1, so erhält man nach diesen Formeln für das



	m	n	w	φ	A	a	r
Tetraeder	3	3	70° 31' 44"	70° 31' 44"	0,204124	0,353553	0,612372
Octaeder	4	3	109 28 16	54 44 8	0,408248	0,500000	0,707107
Icosaeder	5	3	138 11 23	37 22 38	0,755761	0,809016	0,951056
Hexaeder	3	4	90 0 0	54 44 8	0,500000	0,707107	0,866025
Dodecaeder	3	5	116 33 54	37 22 38	1,113516	1,309017	1,401258

wo A den Radius der eingeschriebenen, r denjenigen der umgeschriebenen Kugel darstellt.

183. Die Kugel. Der räumliche Ort eines Punctes, der von einem bestimmten Puncte (Centrum) einen unveränderlichen Abstand (Radius) hat, heisst **Kugelfläche**, — der von der Kugelfläche begrenzte, gewissermassen ein regelmässiges Unendlichflach darstellende Körper **Kugel**. — Steht eine Ebene von dem Kugelcentrum um den Radius ab, so hat sie (156) nur Einen Punct mit der Kugel gemein, und heisst **tangirend** in diesem Puncte. Ist der Abstand der Ebene kleiner, so schneidet sie die Kugelfläche (156) in einer Kreislinie, deren Centrum mit der Projection des Kugelcentrums auf die Schnittebene zusammenfällt, und deren Radius um so grösser ist, je mehr sich der Schnitt dem Kugelcentrum nähert. Schnitten durch das Centrum entsprechen grösste

Kreise; sie heissen **Hauptkreise,** und halbiren sich in Folge eines gemeinschaftlichen Durchmessers gegenseitig.

Speciell für die Lehre von der Kugel ist z. B. „Christoph **Gudermann** (Winneburg bei Hildesheim 1798 — Münster 1852; Professor der Mathematik zu Münster), Lehrbuch der niedern Sphärik. Münster 1835 in 8." zu vergleichen.

184. Pol und Polarkreis. Die Endpuncte des zu einem Kugelkreise senkrechten Kugeldurchmessers stehen (156) von allen Puncten desselben gleich weit, bei einem Hauptkreise um 90° ab; sie heissen **Pole** des Kreises, — die Kreise von gemeinschaftlichen Polen **Parallelkreise,** — der zu ihnen gehörende Hauptkreis **Polarkreis** (Equator). — Steht ein Punct der Kugelfläche von zwei andern Puncten derselben um 90° ab, so ist er (156) Pol des sie verbindenden Hauptkreisbogens, und umgekehrt misst dieser (159) den Winkel am Pole.

Diese Sätze, welche wohl keiner einlässlichern Beweise bedürfen, enthalten die Hauptgrundlagen für directe Constructionen auf der Kugelfläche.

185. Die Guldin'sche Regel. Dreht sich eine Ebene um eine ihrer Geraden als Axe, so beschreibt jede in der Ebene liegende Gerade l (s. Fig. 1 und 176) eine Fläche

$$F = \frac{2R\pi(l+x)}{2} - \frac{2r\pi x}{2} = \pi(R+r)l = 2d\pi . l = 2a\pi . p \qquad 1$$

Bilden die Geraden $l_1 l_2 l_3 \ldots$ eine ebene gebrochene Linie, und bezeichnen $g_1 g_2 g_3 \ldots$ die Abstände ihrer einzelnen Schwerpuncte von einer in der Ebene liegenden Drehaxe, g aber den Abstand des Schwerpunctes der ganzen Linie von derselben Axe, so entsteht somit (133) die Rotationsfläche

$$F = 2\pi \Sigma lg = 2\pi g \Sigma l \qquad 2$$

d. h. man erhält, wenn die gebrochene Linie in eine Curve übergeht, die sog. Guldin'sche Regel: Die von einer, um eine Axe ihrer Ebene rotirenden Curve beschriebene Fläche ist gleich der Länge der Curve multiplicirt mit dem Wege ihres Schwerpunctes. — Bezeichnen $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ und $(x_3 y_3)$ die Coordinaten der auf eine Drehaxe ihrer Ebene bezogenen Ecken eines Dreieckes der Fläche F, G den Abstand des Schwerpunctes von der Drehaxe, und V das von dem Dreiecke bei einer Rotation beschriebene Volumen, so hat man (132, 133, 180)

$$F = \frac{y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)}{2}, \quad G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \qquad 3$$

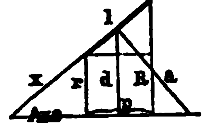
$$V = \frac{\pi}{3}\left[\begin{array}{l} (y_1^2+y_3^2+y_1y_3)(x_3-x_1)+ \\ +(y_3^2+y_2^2+y_3y_2)(x_2-x_3)- \\ -(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)(x_2-x_1) \end{array}\right] = 2G\pi . F \qquad 4$$

d. h. **das** Volumen ist gleich der beschreibenden Fläche multiplicirt mit dem Wege ihres Schwerpunctes, — ein Satz, der sich leicht auf jede rotirende Figur ausdehnen lässt.

Eliminirt man mit Hülfe der Proportionen

$$x : l = r : R - r \qquad x + l : l = R : R - r$$

x und x + l aus dem ersten Ausdrucke 1, so erhält man sofort den zweiten; entspricht ferner d der Mitte von l und ist a $\perp$ l, so hat man





$$d = \frac{R + r}{2} \qquad d : a = p : l$$

und damit die zwei folgenden Ausdrücke, aus deren Ersterm 2 leicht folgt, während der Letztere in 186 Verwendung findet. — Die Formeln 3 sind unmittelbar 182 : 6 und 183 entnommen; die erste Formel 4 aber sagt, in Anwendung von 180 : 2, dass das von F beschriebene Volumen erhalten werde, wenn man von der Summe der durch $y_1 y_3$ und $y_3 y_2$ gebildeten abgekürzten Kegel den von $y_1 y_2$ gebildeten wegnehme, — und die zweite Formel 4 geht aus der ersten mit Hülfe von 3 durch einfache Umsetzung hervor. — **Guldin**, nach dem die oben ausgesprochene, übrigens schon in den Sammlungen von **Pappus** vorkommende Doppelregel für Rotationsflächen und Rotationskörper gewöhnlich benannt wird, publicirte dieselbe in seinem geschätzten Werke „De centro gravitatis libri IV. Viennæ 1635—1640 in 4."

186. Kugeloberfläche, Zone und Möndchen. Dreht sich ein Stück eines centrischen Vielecks um eine durch den Mittelpunct gehende Gerade seiner Ebene, so ist (185) die beschriebene Fläche gleich dem Producte der Projection des beschreibenden Zuges auf die Drehaxe in den Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich dem Apothema des Vielecks ist. — Nennt man somit einen zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Theil der Kugelfläche **Kugelzone,** so ist die Fläche einer Kugelzone gleich dem Producte aus der Peripherie eines Hauptkreises in die Höhe der Zone. — Setzt man die Höhe der Zone gleich 2 r, so ergibt sich für die ganze Kugeloberfläche $4 r^2 \pi$. — Die Fläche eines von zwei Hauptkreisen begrenzten Theiles der Kugeloberfläche, eines sog. **Möndchen's,** verhält sich (184) zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zur Umdrehung.

Unter Höhe der Zone ist der Abstand der Ebenen der Parallelkreise zu verstehen, — nicht etwa das zwischen den Parallelkreisen liegende Stück eines durch ihre Pole geführten Hauptkreises.

187. Kugelinhalt, Abschnitt und Ausschnitt. Der Inhalt einer Kugel des Radius r ist (182, 186) gleich $\frac{4}{3} r^3 \pi$. Haben somit ein Zylinder, ein Kegel und eine Kugel 2 r zu Höhe und Durchmesser,

so ist, wie schon Archimedes lehrte, der erstere gleich der Summe der beiden letztern. — Bezeichnet h die Höhe eines Kugelabschnittes, J seinen Inhalt, und V den Inhalt des entsprechenden Kugelausschnittes, so ist (186, 182, 176)

$$V = 2\,r\,\pi\,h \,.\, \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\,r^2\,\pi\,h \qquad \textbf{1}$$

$$J = V - [r^2 - (r-h)^2]\,\frac{r-h}{3}\,\pi = h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)\pi \qquad \textbf{2}$$

und der Inhalt eines zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Kugelstückes lässt sich als Differenz zweier Kugelabschnitte darstellen.

Die Formeln 1 und 2 bedürfen wohl keiner weitern Ableitung; dagegen mag noch gezeigt werden, dass der von **Archimedes** gefundene und auf seinem Grabsteine abgebildete Satz auch direct bewiesen werden kann: Ist nämlich $ad \parallel of$, so hat man

$$ad^2 = oc^2 = oa^2 + ac^2 = ab^2 + ac^2$$

also auch

$$ad^2 \,.\, \pi = ab^2 \,.\, \pi + ac^2 \,.\, \pi$$

Hat daher um oe eine Umdrehung statt, so ist der von irgend einem ad beschriebene Kreis genau so gross als die Summe der von den entsprechenden ab und ac beschriebenen Kreise, — also auch der von allen ad, d. h. von oegf, beschriebene Zylinder gleich dem von oeg beschriebenen Kegel mehr der durch oecf beschriebenen Halbkugel, woraus durch Verdopplung der Archimedische Satz hervorgeht. Bezeichnet man daher mit x den Inhalt und mit y die Oberfläche der Kugel, so hat man nach 176, 178 und 182

$$x = r^2\pi \,.\, 2r - r^2\pi \,.\, 2r : 3 = {}^4/_3\, r^3\pi$$

$$x = {}^1/_3\, y \cdot r \qquad \text{oder} \qquad y = 3x : r = 4r^2\pi$$

so dass man auf diese Weise Inhalt und Oberfläche der Kugel berechnen kann, ohne sich auf 185—186 zu stützen.

188. Das Kugeldreieck. Verbindet man drei Puncte der Kugelfläche theils mit dem Mittelpuncte, theils paarweise durch Hauptkreise, so entstehen gleichzeitig ein Dreikant und ein sog. Kugeldreieck oder **sphärisches Dreieck,** deren Seiten und Winkel gleiches Maass haben. Es gehen somit die Elemente des Kugeldreiecks alle für das Dreikant ausgesprochenen Beziehungen ein; sind jedoch seine Seiten a, b, c in Länge gegeben, so hat man (vergl. 189) sie vor Einführung in die Formeln auf Winkel zu reduciren. — Die den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks der Fläche F entsprechenden Möndchen übertreffen, da Kugelgegendreiecke (wie ABC und DEG, s. Fig.) offenbar gleiche

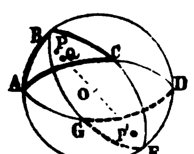
Fläche haben, die halbe Kugel um 2 F, d. h. man hat (186)

$$2\,r^2\pi + 2\,F = \frac{4\,r^2\pi}{360}(A + B + C)$$

oder, wenn e den halben Excess bezeichnet,

$$F = \frac{2\,.\,e^0}{180}\,.\,r^2\pi = 2\,.\,e''\,.\,r^2\,.\,\text{Sin}\,1''.$$

Dass Kugelgegendreiecke gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, ist kaum nöthig zu beweisen, — für ihre Gleichheit dagegen mag folgender Beweis mitgetheilt werden, welchen **Legendre** ohne nähere Bezeichnung der Quelle in seine Geometrie aufgenommen hat: Zieht man einen Durchmesser P P', der senkrecht zu der Ebene der drei Puncte A, B, C steht, und sie z. B. in Q schneidet, so steht Q nach 156 von A, B, C gleich weit ab, also sind auch die Bogenabstände PA = PB = PC = P'D = P'E = P'G; da sich nun jede zwei gleichschenkligen sphärischen Gegendreiecke offenbar zur Deckung bringen lassen, also gleich sind, so hat man



$$ABC = APB + BPC + CPA = DP'E + EP'G + GP'D = DEG$$

w. z. b. w.

189. Der Legendre'sche Satz. Sind die Seiten a, b, c eines Kugeldreieckes in Länge ausgedrückt (188), und im Verhältnisse zum Radius r so klein, dass man die fünften und höhern Potenzen dieser Verhältnisse vernachlässigen darf, so erhält man (160, 50)

$$\text{Cos}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,(a^2\,b^2 + a^2\,c^2 + b^2\,c^2)}{24\,b\,c\,r^2} \qquad 1$$

Bezeichnet man daher die Winkel eines ebenen Dreiecks der Seiten a, b, c mit A', B', C' und setzt angenähert seine Fläche f der Fläche des sphärischen Dreieckes gleich, so hat man (104 : 6; 105 : 2; 188)

$$\text{Cos}\,A = \text{Cos}\,A' - \frac{4\,b^2\,c^2\,\text{Sin}^2\,A'}{24\,b\,c\,r^2} = \text{Cos}\,A' - \frac{2}{3}\,e\,\text{Sin}\,A'\,.\,\text{Sin}\,1'' \qquad 2$$

Setzt man A = A' + x, so wird für ein kleines x

$$\text{Cos}\,A = \text{Cos}\,A' - x\,\text{Sin}\,A'\,.\,\text{Sin}\,1'' \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{2\,e}{3}$$

und man hat daher die Beziehung

$$A' = A - \frac{2\,e}{3} \qquad 3$$

in welcher der sog. Legendre'sche Satz besteht, nach welchem somit ein kleines sphärisches Dreieck, nachdem man von jedem Winkel $^1/_3$ des Excesses abgezogen hat, wie ein ebenes Dreieck behandelt werden kann.

Zunächst hat man nach 160 : 4 und 50 : 6

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Cos}\frac{a}{r} - \operatorname{Cos}\frac{b}{r} \cdot \operatorname{Cos}\frac{c}{r}}{\operatorname{Sin}\frac{b}{r} \cdot \operatorname{Sin}\frac{c}{r}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)}$$

und hieraus folgt sodann 1, wenn man Zähler und Nenner mit $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ multiplicirt, dabei wieder die fünften und höhern Potenzen wegwerfend. Da nun nach 104 : 6; 105 : 2 und 188

$$\operatorname{Cos} A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{also} \quad \operatorname{Sin}^2 A' = \frac{2[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4)]}{4b^2c^2}$$

$$f = \frac{bc \operatorname{Sin} A'}{2} = 2er^2 \operatorname{Sin} 1'' \quad \text{also} \quad \frac{4b^2c^2 \operatorname{Sin}^2 A'}{24bcr^2} = \frac{2e \operatorname{Sin} A' \operatorname{Sin} 1''}{3}$$

so geht aus 1 sofort 2 hervor, woraus sodann 3 ohne Schwierigkeit folgt. — **Legendre** gab seinen Satz zuerst 1787 in der 378 citirten Schrift, und Baeyer theilt in der ebendaselbst erwähnten Schrift mit, dass Friedrich Wilhelm **Bessel** (Minden 1784 — Königsberg 1846; erst Handelslehrling, dann Inspector der Schröter'schen Sternwarte zu Lilienthal, zuletzt Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Königsberg; vergl. Encke, Gedächtnissrede auf Bessel, Berlin 1846 in 4., — Durège, Bessel's Leben und Wirken, Zürich 1861 in 8.) 3 durch die genauere Formel

$$A' = A - \frac{2e}{3} - \frac{(2e)^2}{90}[2 \operatorname{Ctg} A' - \operatorname{Ctg} B' - \operatorname{Ctg} C'] \qquad 4$$

ersetzt habe; jedoch gebe das neue Correctionsglied noch nicht 0'',01 aus, wenn die Seiten nicht über 25 Meilen betragen. — Sind die Seiten eines Kugeldreieckes so klein, dass schon die dritten Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so reduciren sich, wie sehr leicht nachgewiesen werden kann, die Formeln der sphärischen Trigonometrie unmittelbar auf diejenigen der ebenen Trigonometrie. Weniger bekannt scheint es zu sein, dass sich 160 : 2 auch strenge auf eine 104 : 4 entsprechende Form bringen lässt, indem aus 160 : 2

$$\operatorname{Sin}^2 c = \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{Cos} c) = \tfrac{1}{2}[1 - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b - \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos} C]$$

$$= \tfrac{1}{2}[1 - (\operatorname{Cos}^2 \mathfrak{a} - \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{a})(\operatorname{Cos}^2 \mathfrak{b} - \operatorname{Sin}^2 \mathfrak{b}) - 4 \operatorname{Sin} \mathfrak{a} \operatorname{Cos} \mathfrak{a} \operatorname{Sin} \mathfrak{b} \operatorname{Cos} \mathfrak{b} \operatorname{Cos} C]$$

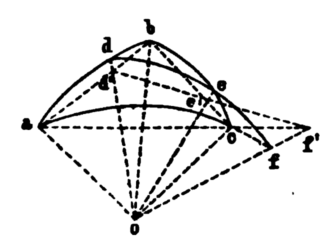
$$= (\operatorname{Sin} \mathfrak{a} \operatorname{Cos} \mathfrak{b})^2 + (\operatorname{Cos} \mathfrak{a} \operatorname{Sin} \mathfrak{b})^2 - 2(\operatorname{Sin} \mathfrak{a} \operatorname{Cos} \mathfrak{b})(\operatorname{Cos} \mathfrak{a} \operatorname{Sin} \mathfrak{b}) \operatorname{Cos} C \qquad 5$$

folgt, — eine Beziehung, welche überdiess in 190 gute Dienste leisten wird.

190. Weitere Sätze. Im sphärischen Dreiecke liegt einer gleichen oder grössern Seite auch ein gleicher oder grösserer Winkel gegenüber, — und umgekehrt. — Die Hauptkreise, welche die Seiten eines sphärischen Dreiecks normal halbiren, oder welche durch die Ecken normal zu den Gegenseiten gezogen werden, oder welche seine Winkel halbiren, schneiden sich je in Einem Puncte, dem

Centrum der Ecken, dem Höhenpuncte und dem Centrum der Seiten. — Jede sphärische Transversale schneidet die Seiten eines sphärischen Dreieckes oder ihre Verlängerungen so, dass die Producte der Sinus der nicht an einander liegenden Abschnitte gleich werden. — Die Spitzen aller sphärischen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis und gleiche Winkelsumme oder Fläche haben, liegen auf einem durch die Gegenpuncte der Basisenden gehenden, dem sog. **Lexell'schen Kreise.**

Die Ersteren der im Texte ausgesprochenen Sätze lassen sich z. B. mit Hülfe der trigonometrischen Beziehungen leicht erweisen, — die Zweiten durch Uebertrag der entsprechenden Sätze am ebenen Dreiecke mit Benutzung des leicht zu erhaltenden Satzes, dass in einem gleichschenkligen Dreiecke jede durch die Spitze gezogene Gerade die Basis und den Winkel an der Spitze so theilt, dass die Abschnitte der Basis sich wie die Sinus der Winkel-Theile verhalten. So z. B. erhält man nach dem eben erwähnten Hülfssatze die Proportionen

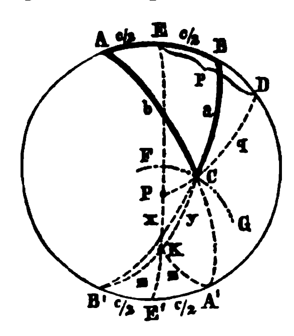


$$a d' : d' b = \text{Sin}\, a d : \text{Sin}\, d b$$
$$b e' : e' c = \text{Sin}\, b e : \text{Sin}\, e c$$
$$c f' : f' a = \text{Sin}\, c f : \text{Sin}\, f a$$

also durch Multiplication

$$\frac{a d' \,.\, b e' \,.\, c f'}{d' b \,.\, e' c \,.\, f' a} = \frac{\text{Sin}\, a d \,.\, \text{Sin}\, b e \,.\, \text{Sin}\, c f}{\text{Sin}\, d b \,.\, \text{Sin}\, e c \,.\, \text{Sin}\, f a}$$

Da nun nach 109 das erstere Verhältniss gleich der Einheit ist, so muss auch das zweite gleich derselben sein, oder also der im Texte ausgesprochene Transversalensatz bestehen. — Um ferner den von **Lexell** in seiner Abhandlung „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphæricorum (Nova Acta Petrop. 5)" mitgetheilten und seither nach ihm benannten Satz nachzuweisen, mag folgendes, **Legendre** (Géométrie, 5 ed., pag. 321) nachgebildetes Verfahren angewandt werden: Bezeichnet P den Pol der Seite A B, so dass P E den Bogen A B unter rechtem Winkel halbirt, und P C D in D seine Verlängerung ebenfalls unter rechtem Winkel trifft, so hat man nach 169



$$\text{Cos}\, a = \text{Cos}\, q \,.\, \text{Cos}\, (p - c)$$
$$\text{Cos}\, b = \text{Cos}\, q \,.\, \text{Cos}\, (p + c)$$
$$\text{Sin}\, q = \text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, B$$

und daher nach 167 : 6

$$\text{Ctg}\, e = \frac{1 + \text{Cos}\, a + \text{Cos}\, b + \text{Cos}\, c}{\text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, b \,.\, \text{Sin}\, C} =$$
$$= \frac{1 + \text{Cos}\, q \,.\, \text{Cos}\, (p - c) + \text{Cos}\, q \,.\, \text{Cos}\, (p + c) + 2\, \text{Cos}^2 c - 1}{\text{Sin}\, a \,.\, \text{Sin}\, c \,.\, \text{Sin}\, B} =$$
$$= \frac{\text{Cos}\, q \,.\, \text{Cos}\, p + \text{Cos}\, c}{\text{Sin}\, q \,.\, \text{Sin}\, c} \qquad 1$$

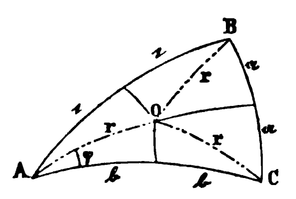
Ist aber K ein Punct auf EP, der von P und O die Distanzen x und y hat, so ergibt sich nach 160:2 mit Hülfe von 1

$$\text{Cos } y = \text{Sin } q . \text{Cos } x - \text{Cos } q . \text{Sin } x . \text{Cos } p =$$
$$= \text{Sin } q . \text{Cos } x - \text{Sin } x (\text{Ctg } e . \text{Sin } q . \text{Sin } c - \text{Cos } c)$$
$$= \text{Sin } x . \text{Cos } c + \text{Sin } q (\text{Cos } x - \text{Sin } x . \text{Ctg } e . \text{Sin } c)$$

und bestimmt man daher x durch

$$\text{Ctg } x = \text{Ctg } e . \text{Sin } c \quad \text{so wird} \quad \text{Cos } y = \text{Sin } x . \text{Cos } c \qquad 2$$

Es sind daher x und y bei gleicher Basis (c) und gleicher (e proportionaler) Fläche unveränderlich, und wenn man daher von K aus mit y einen Kreis FG beschreibt, so haben alle Dreiecke der Basis AB, deren Spitzen auf diesem Kreise liegen, gleiche Fläche, — und dieser Kreis geht auch durch die Gegenpuncte A' und B' von A und B, da $\text{Cos } z = \text{Sin } x . \text{Cos } c$ oder $z = y$ ist. — Bezeichnet r den sphärischen Radius des Dreieckes ABC, so hat man nach 169:2



$$\text{Ctg } r = \text{Ctg } b . \text{Cos } \varphi = \text{Ctg } c . \text{Cos } (A - \varphi) \qquad 3$$

und aus Vergleichung der beiden Werthe erhält man

$$\text{Tg } \varphi = \frac{\text{Ctg } b - \text{Ctg } c . \text{Cos } A}{\text{Ctg } c . \text{Sin } A} \qquad 4$$

oder mit Benutzung von 189:5

$$\text{Cos } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tg}^2 \varphi}} = \frac{\text{Ctg } c . \text{Sin } A}{\sqrt{\text{Ctg}^2 b + \text{Ctg}^2 c - 2 \text{Ctg } b . \text{Ctg } c . \text{Cos } A}}$$
$$= \frac{\text{Sin } b . \text{Cos } c . \text{Sin } A}{\text{Sin } a} \qquad 5$$

also durch Substitution in 3

$$\text{Ctg } r = \frac{\text{Cos } b . \text{Cos } c . \text{Sin } A}{\text{Sin } a} \qquad 6$$

womit 167:3 zu vergleichen.

XIX. Die analytische Geometrie im Raume.

191. Die Raumcoordinaten. Die Lage eines Punctes m im Raume wird (s. Fig.) analog wie in der Ebene durch rechtwinklige Coordinaten (x, y, z), von denen x noch Abscisse und y Ordinate, z aber **Applicate** heissen mag, — oder durch den Radius Vector (r) und die von ihm gebildeten Winkel (α, β, γ) oder (v, w) gegeben, welche durch die Beziehungen

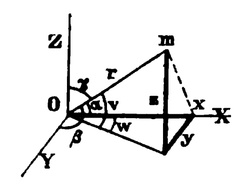
$$x = r . \text{Cos } \alpha \qquad y = r . \text{Cos } \beta \qquad z = r \text{ Cos } \gamma \qquad 1$$
$$= r . \text{Cos } v . \text{Cos } w \qquad = r \text{ Cos } v . \text{Sin } w \qquad = r \text{ Sin } v \qquad 2$$
$$\text{Cos}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \beta + \text{Cos}^2 \gamma = 1 \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad 3$$

zusammenhängen, während nach

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad 4$$

die Distanz zweier Puncte ($x_1\ y_1\ z_1$) und ($x_2\ y_2\ z_2$) berechnet werden kann.

Die Aufstellung der Formeln 1—4 bedarf kaum näherer Erläuterung, und über den Namen Applicate ist das Nöthige schon in 77 mitgetheilt worden; dagegen mögen zur Ergänzung der in 131 gegebenen Literatur noch folgende speciell den Raum beschlagende Werke angeführt werden: „**Plücker**, System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise. Düsseldorf 1846 in 4., und: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Zwei Abtheilungen. Leipzig 1868—1869 in 4., — Leopold **Mossbrugger** (Constanz 1796 — Aarau 1864; Professor der Mathematik zu Aarau), Analytische Geometrie des Raumes. Aarau 1846 in 4., — **Hesse**, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1861 in 8, — O. **Böklen**, Analytische Geometrie des Raumes. Stuttgart 1861 in 8., — **Salmon**, Treatise on the analytical Geometry of three dimensions. Dublin 1862 in 8. (Deutsch von Fiedler, Leipzig 1863 in 8.), — etc.“



192. Die Transformation der Coordinaten. Hat man (s. Fig. 1) von einem Coordinatensysteme X Y Z auf ein paralleles Coordinatensystem X′ Y′ Z′ überzugehen, dessen Anfangspunct die Coordinaten X Y Z hat, so ist offenbar

$$x' = x - X \qquad y' = y - Y \qquad z' = z - Z \qquad 1$$

oder, wenn man (191 : 2) die rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten umsetzt, wobei n eine willkürliche Grösse bezeichnen mag,

$$\begin{aligned} r' \operatorname{Cos} v' \operatorname{Cos} (w'-n) &= r \operatorname{Cos} v \operatorname{Cos} (w-n) - R \operatorname{Cos} V \operatorname{Cos} (W-n) \\ r' \operatorname{Cos} v' \operatorname{Sin} (w'-n) &= r \operatorname{Cos} v \operatorname{Sin} (w-n) - R \operatorname{Cos} V \operatorname{Sin} (W-n) \\ r' \operatorname{Sin} v' &= r \operatorname{Sin} v - R \operatorname{Sin} V \end{aligned} \qquad 2$$

Haben dagegen die beiden Coordinatensysteme gleichen Anfangspunct, aber verschiedene Richtung der Axen, so hat man (s. Fig. 2), wenn φ und ψ die Winkel der X′ und X mit der Knotenlinie der Ebenen X′ Y′ und X Y sind, t und s aber die Entfernungen der Fusspuncte von z′ und z von ebenderselben, und θ der an ihr liegende Flächenwinkel, **einerseits**

$$\begin{aligned} x' &= u\, C\varphi + t\, S\varphi & y' &= u\, S\varphi - t\, C\varphi & z' &= z\, C\theta + s\, S\theta \\ s &= y\, C\psi - x\, S\psi & t &= z\, S\theta - s\, C\theta & u &= x\, C\psi + y\, S\psi \end{aligned} \qquad 3$$

und bezeichnen $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$, $a_3\, b_3\, c_3$ der Reihe nach die Cos. der Winkel, welche jede der Axen X′ Y′ Z′ mit den Axen X Y Z, oder jede der Ebenen Y′ Z′, X′ Z′ und X′ Y′ mit den Ebenen Y Z, X Z und X Y bildet, so hat man (156) **anderseits**

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' & x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' & y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' & z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \qquad 4$$

Eliminirt man aus den Gleichungen 3 die Hülfsgrössen s, t, u, und vergleicht sodann mit 4, so ergeben sich

$$\begin{array}{lll} a_1 = C\varphi\, C\psi + S\varphi\, S\psi\, C\theta & b_1 = S\psi\, C\varphi - C\psi\, S\varphi\, C\theta & \\ a_2 = C\psi\, S\varphi - S\psi\, C\varphi\, C\theta & b_2 = S\varphi\, S\psi + C\varphi\, C\psi\, C\theta & \\ a_3 = -S\psi\, S\theta & b_3 = C\psi\, S\theta & \\ c_1 = S\varphi\, S\theta & c_2 = -C\varphi\, S\theta & c_3 = C\theta \end{array} \qquad 5$$

Setzt man aber in der Gleichheit

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

für x y z oder x′ y′ z′ ihre Werthe aus 4 ein, so folgt, dass

$$\begin{array}{l} 1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \\ \quad = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{array} \qquad 6$$

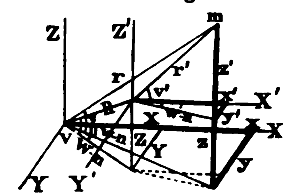
$$\begin{array}{l} 0 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ \quad = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \end{array} \qquad 7$$

und ebenso lassen sich mit Hülfe von 5 die Gleichheiten

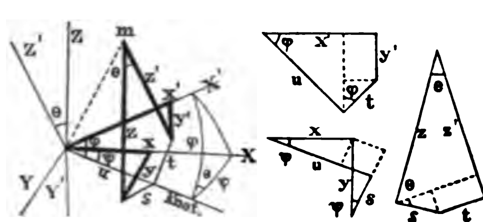
$$\begin{array}{lll} a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2 & a_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 & a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ b_1 = c_2 a_3 - c_3 a_2 & b_2 = c_3 a_1 - c_1 a_3 & b_3 = c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 & c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 & c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \qquad 8$$

leicht verificiren.

Die Aufstellung der Formeln 1 und 2 bedarf nach Hinweisung auf die Figur kaum einer weitern Erläuterung, und für ihre Verwendung und Umgestaltung kann auf 387 und 415 verwiesen werden. — Auch die Beziehungen 3 und 4 ergeben sich ohne Schwierigkeit, und zwar die Erstern aus den beistehenden Hülfsfiguren, die Zweiten aber mit Hülfe des Schlusssatzes von 156 aus der Hauptfigur. — Aus den 3 ergibt sich z. B.



$$\begin{array}{l} x' = (x\,C\psi + y\,S\psi)\,C\varphi + \\ \quad + [z\,S\theta - (y\,C\psi - x\,S\psi)\,C\theta]\,S\varphi \\ \quad = x\,(C\varphi\, C\psi + S\varphi\, S\psi\, C\theta) + \\ \quad + y\,(C\varphi\, S\psi - S\varphi\, C\psi\, C\theta) + \\ \quad + z\,S\varphi\, S\theta \end{array}$$



und hieraus folgen durch Vergleichung mit der zweiten Gleichung 4 die unter 5 gegebenen Werthe von a_1, b_1 und c_1, welche man übrigens auch unter Benutzung der Formeln der Raumtrigonometrie direct aus der Figur erheben könnte. — Die Beziehungen 6 und 7 lassen sich auch aus den 5 finden; so z. B. erhält man

$$\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mathrm{Cos}^2\varphi\, \mathrm{Cos}^2\psi + 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, \mathrm{Cos}\,\varphi\, \mathrm{Sin}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,\theta + \mathrm{Sin}^2\varphi\, \mathrm{Sin}^2\psi\, \mathrm{Cos}^2\theta \\ \qquad + \mathrm{Sin}^2\varphi\, \mathrm{Cos}^2\psi - 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, \mathrm{Cos}\,\varphi\, \mathrm{Sin}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,\psi\, \mathrm{Cos}\,\theta + \mathrm{Cos}^2\varphi\, \mathrm{Sin}^2\psi\, \mathrm{Cos}^2\theta \\ \qquad + \mathrm{Sin}^2\psi\, \mathrm{Sin}^2\theta \\ \qquad = \mathrm{Cos}^2\psi + \mathrm{Sin}^2\psi\, \mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sin}^2\psi\, \mathrm{Sin}^2\theta = \mathrm{Cos}^2\psi + \mathrm{Sin}^2\psi = 1 \end{array}$$

und in ähnlicher Weise lässt sich auch die Richtigkeit der meines Wissens zuerst von **Lagrange** aufgestellten und benutzten Relationen 8 erweisen. —

Die durch 8 repräsentirte Entwicklung veröffentlichte ich schon 1848 in den Berner-Mittheilungen, gemeinschaftlich mit einer Abhandlung von **Schläfli** „Ueber die Relationen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird."

193. Die Gleichung der Ebene. Jede Fläche wird durch eine, in einem bestimmten Puncte der Coordinatenebene errichtete Senkrechte in bestimmten Abständen von dieser Ebene geschnitten, und ihr Gesetz muss sich daher durch eine Gleichung

$$z = f(x, y) \qquad \text{oder} \qquad F(x, y, z) = 0 \qquad 1$$

ausdrücken lassen; dabei heisst, je nachdem diese Gleichung vom n^{ten} Grade oder transcendent wird, auch die Fläche vom n^{ten} Grade oder transcendent. So z. B. besteht (173, 174 und Fig.) für jeden Punct m einer Ebene die Gleichung

$$\frac{abc}{2.3} = \frac{abz}{2.3} + \frac{acy}{2.3} + \frac{bcx}{2.3} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad 2$$

so dass eine Ebene durch eine Gleichung ersten Grades

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 3$$

dargestellt wird, und umgekehrt jede Fläche ersten Grades eine Ebene ist. Geht die Ebene durch den Pol, so ist $D = 0$, — ist sie zu einer der Axen parallel, so verschwindet das entsprechende Glied der Gleichung, — geht sie durch drei Puncte $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$ und $(x_3\, y_3\, z_3)$, so ist

$$\begin{aligned} A &= z_1(y_3 - y_2) + z_2(y_1 - y_3) + z_3(y_2 - y_1) \\ B &= x_1(z_3 - z_2) + x_2(z_1 - z_3) + x_3(z_2 - z_1) \\ C &= y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1) \\ D &= z_1(y_2 x_3 - y_3 x_2) + z_2(y_3 x_1 - y_1 x_3) + z_3(y_1 x_2 - y_2 x_1) \end{aligned} \qquad 4$$

Bezeichnet endlich n den Winkel der Ebene mit X Y, so ist (132)

$$\operatorname{Tg} n = \frac{z}{d} = \frac{z\sqrt{a^2 + b^2}}{ay + bx - ab} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C} \qquad 5$$

$$\operatorname{Cos} n = \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad 6$$

zu setzen.

Die Ausdrücke 4 werden erhalten, indem man 3 für jeden der drei Puncte aufschreibt, und aus den so erhaltenen drei Gleichungen $A : D$, $B : D$ und $C : D$ nach der gewöhnlichen Weise ausrechnet. Die geometrische Bedeutung dieser vier Ausdrücke wird in 195 nachgewiesen werden. — Die Knotenlinie ab hat nach 2 die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{oder} \qquad y = -\frac{b}{a}x + b$$

also ist nach 132:8, da die Vergleichung von 2 und 3

$$a = -\frac{D}{A} \qquad b = -\frac{D}{B} \qquad c = -\frac{D}{C} \qquad 7$$

ergibt,

$$d = \frac{ay + bx - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{abz}{c\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{Cz}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad 8$$

und mit Hülfe hievon ergeben sich die Formeln 5, aus denen hinwieder die 6 leicht folgen.

194. Die Gleichung der Geraden. Eine Linie im Raume lässt sich immer als Durchschnitt zweier Flächen denken, und kann daher durch zwei Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \qquad F(x, y, z) = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \varphi(z) \qquad y = \psi(z)$$

gegeben werden, so z. B. eine Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen durch

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad ax + by + cz + d = 0 \qquad 1$$

oder

$$x = \alpha z + \gamma \qquad y = \beta z + \delta \qquad 2$$

wobei die letztern Gleichungen die Projectionen der Geraden auf die Ebenen X Z und Y Z darstellen. Soll die Gerade durch zwei Puncte $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ und $(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$ gehen, so hat sie die Gleichungen

$$x = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \gamma_2} z - \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}, \qquad y = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\gamma_1 - \gamma_2} z - \frac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \qquad 3$$

Eliminirt man aus den Gleichungen zweier Geraden

$$x = a_1 z + b_1, \quad y = a_2 z + b_2, \quad x = \alpha_1 z + \beta_1, \quad y = \alpha_2 z + \beta_2 \qquad 4$$

die Coordinaten x, y, z, so erhält man die Proportion

$$a_1 - \alpha_1 : a_2 - \alpha_2 = b_1 - \beta_1 : b_2 - \beta_2 \qquad 5$$

als Bedingung für das gleichzeitige Bestehen jener vier Gleichungen, d. h. für das Schneiden der Geraden. Die Coordinaten des Durchschnittspunctes sind

$$x = \frac{a_1\beta_1 - b_1\alpha_1}{a_1 - \alpha_1} \qquad y = \frac{a_2\beta_2 - b_2\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} \qquad z = -\frac{b_1 - \beta_1}{a_1 - \alpha_1} \qquad 6$$

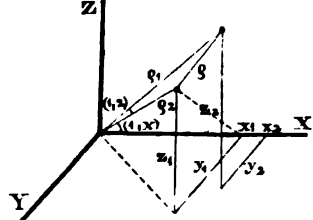
so dass die beiden Geraden für $a_1 = \alpha_1$ und $a_2 = \alpha_2$ sich im Unendlichen schneiden oder parallel werden. Für den Winkel der beiden Geraden endlich erhält man (104:6; 191:4), indem man durch den Pol Parallele zu denselben zieht,

$$\operatorname{Cos}(1, 2) = \frac{1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \qquad 7$$

$$= C(1, x) . C(2, x) + C(1, y)\, C(2, y) + C(1, z)\, C(2, z) \qquad 8$$

so dass $1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ die Bedingung des Senkrechtstehens ist.

Die Gleichungen und Formeln 1 — 6 ergeben sich auf die im Texte angedeutete Weise ohne die mindeste Schwierigkeit. — Um 7 zu finden, zieht man durch den Pol zu den Geraden 4 die Parallelen



$$x = a_1 z \qquad y = a_2 z$$
$$x = \alpha_1 z \qquad y = \alpha_2 z$$

trägt auf ihnen die beliebigen Distanzen ϱ_1 und ϱ_2 ab, erhält so zwei Puncte $(x_1\, y_1\, z_1)$ und $(x_2\, y_2\, z_2)$ der Distanz ϱ, und somit

$$\text{Cos}(1,2) = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - \varrho^2}{2\varrho_1\varrho_2} =$$
$$= \frac{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]}{2\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$
$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} = \frac{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+1}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+1}}$$

d. h. 7. Nun ist aber offenbar

$$\text{Cos}(1,x) = \frac{x_1}{\varrho_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}, \quad \text{Cos}(2,x) = \frac{x_2}{\varrho_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}, \quad \text{etc.}$$

und durch Substitution dieser Werthe geht 7 sofort in 8 über.

195. Verschiedene Aufgaben. Eine Gerade

$$x = az + c \qquad y = bz + d \qquad 1$$

steht auf einer Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 2$$

senkrecht, wenn ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen zu der respectiven Knotenlinie der Ebene senkrecht stehen, d. h. (194; 132) wenn

$$a = \frac{A}{C} \qquad b = \frac{B}{C} \qquad 3$$

Der **Abstand** eines Punctes (α, β, γ) von der Ebene 2 ist (191 : 4)

$$d = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad 4$$

Um den Winkel v einer Geraden und einer Ebene, oder den Winkel w zweier Ebenen zu bestimmen, zieht man nach 3 zu jeder Ebene eine Senkrechte, und berechnet (194 : 7) den Winkel (90 — v) der Geraden und der einen, oder den Winkel w beider Senkrechten. Letzterer kann übrigens auch, wenn a b c und $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Winkel bezeichnen, welche die Ebenen mit den drei Coordinatenebenen bilden, entsprechend 194 : 8 nach

$$\text{Cos}\, w = \text{Cos}\, a\, \text{Cos}\, \alpha + \text{Cos}\, b\, \text{Cos}\, \beta + \text{Cos}\, c\, \text{Cos}\, \gamma \qquad 5$$

berechnet werden.

Soll die Gerade 1 gleichzeitig durch den Punct (α, β, γ) gehen und zu Ebene 2 senkrecht stehen, so muss sie die Gleichungen

$$x - \alpha = \frac{A}{C}(z - \gamma) \qquad y - \beta = \frac{B}{C}(z - \gamma) \qquad \mathbf{6}$$

haben, und für ihren Fusspunct $(\alpha', \beta', \gamma')$ auf der Ebene erhält man nach 2 und 6

$$A\left[\alpha + \frac{A}{C}(\gamma' - \gamma)\right] + B\left[\beta + \frac{B}{C}(\gamma' - \gamma)\right] + C\gamma' + D = 0$$

oder

$$\gamma' = \frac{(A^2 + B^2)\gamma - C(A\alpha + B\beta + D)}{A^2 + B^2 + C^2} = \gamma - C \cdot \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\beta' = \beta + \frac{B}{C}(\gamma' - \gamma) \qquad = \beta - B \cdot \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2} \qquad \mathbf{7}$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{A}{C}(\gamma' - \gamma) \qquad = \alpha - A \cdot \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

also nach 191 : 4

$$d^2 = (\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2 = \frac{(A\alpha + B\beta + C\gamma + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

entsprechend 4. — Bezeichnet R den Abstand des Anfangspunctes von der Ebene 2, so ist somit

$$R = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \mathbf{8}$$

und wenn F die Fläche des durch die drei Puncte $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$ und $(x_3\, y_3\, z_3)$ unserer Ebene bestimmten Dreieckes ist, während $f\, f'\, f''$ und $n\, n'\, n''$ seine Projectionen auf und Winkel mit YZ, XZ und XY sind, so ergibt sich durch Vergleichung von 193 : 4 mit 132 : 6, und mit Hülfe von 165 und 193 : 6

$$A = 2f'' = 2F \cdot \operatorname{Cos} n'' = 2FA : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$B = 2f' = 2F \cdot \operatorname{Cos} n' = 2FB : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \qquad \mathbf{9}$$
$$C = 2f = 2F \cdot \operatorname{Cos} n = 2FC : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

also

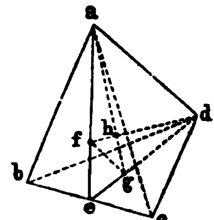
$$4F^2 = A^2 + B^2 + C^2 = D^2 : R^2 \quad \text{oder} \quad {}^1\!/_6 D = {}^1\!/_3 FR \qquad \mathbf{10}$$

Es ergibt sich hieraus einerseits, dass von den durch 193 : 4 bestimmten vier Coefficienten die drei ersten die doppelten Projectionen des Dreiecks der drei Puncte auf die drei Coordinatenebenen darstellen, der vierte aber ein Sechstheil des von dem Dreiecke mit dem Anfangspuncte bestimmten Tetraeders ist. — und anderseits, da $F^2 = f^2 + f'^2 + f''^2$ wird, der Satz: Projicirt man ein Dreieck auf die drei Coordinatenebenen, so ist das Quadrat seiner Fläche gleich der Quadratsumme der Flächen der Projectionen. Vergl. 242.

196. Der Schwerpunct. Die für die Schwerpuncte ebener Gebilde gefundenen Gesetze, und so namentlich auch die in 133 : 1, 2 enthaltenen, tragen sich durch Beifügen der dritten Coordinate und Ersetzen der Geraden durch eine Ebene, mit Hülfe 195 : 4 auf den Raum über. So z. B. wird eine Schweraxe des Vierflachs erhalten, wenn man den Schwerpunct einer der Seiten mit der Gegenecke verbindet; der Schwerpunct selbst steht (89, 83) um $^3/_4$ der Schweraxe von der Gegenecke ab, und hat eine dem Inhalte des Vierflachs proportionale Constante. Der Schwerpunct einer Pyramide steht

von der Spitze um $^3/_4$ ihrer Verbindungslinie mit dem Schwerpuncte der Basis ab, — der eines Prisma's hälftet die Verbindungslinie der Schwerpuncte der Grundflächen, — der eines centrischen Körpers fällt in das Centrum.

Wenn $be = ec$, $ef = {}^1/_3\, ea$ und $eg = {}^1/_3\, ed$, so sind offenbar fd und ga Schweraxen, also h Schwerpunct des Vierflachs. Ferner ist $fg \parallel ad$, also $gh : ha = fg : ad = ef : ea = 1 : 3$, also $ah = {}^3/_4\, ag$. — Legt man durch h eine zu bcd parallele Ebene, so schneidet sie nothwendig die Höhe des Vierflachs im ersten Viertheil, und wenn man daher eine Pyramide durch Diagonalebenen in Tetraeder zerfällt, so liegen die Schwerpuncte aller Theile in gleicher Höhe, — folglich der Schwerpunct der ganzen Pyramide in dem durch den Text angegebenen Puncte.



197. Die Flächen zweiten Grades. Die continuirliche Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0 \quad 1$$

stellt eine Fläche zweiten Grades dar, welche daher im Allgemeinen durch 9 Puncte bestimmt ist. Setzt man $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$, und bestimmt α, β, γ so, dass

$$a\alpha + d\beta + e\gamma + g = b\beta + d\alpha + f\gamma + h = c\gamma + e\alpha + f\beta + k = 0 \quad 2$$

so geht 1 in die Gleichung

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2dx'y' + 2ex'z' + 2fy'z' + m = 0 \quad 3$$

über, in welcher nur gerade Dimensionen der Coordinaten vorkommen, so dass ihr also auch der Punct $(-x', -y', -z')$ genügt, oder die Fläche zweiten Grades in dem neuen Anfangspuncte einen **Mittelpunct** hat. Setzt man in 3

$$x = Az + B \qquad y = Cz + D \quad 4$$

so erhält man für die Durchschnittspuncte dieser Geraden und der Fläche zweiten Grades eine Gleichung zweiten Grades, deren halbe Summe der Wurzeln für die Mitte der entsprechenden Sehne

$$z = -\frac{aAB + bCD + d(AD + BC) + eB + fD}{aA^2 + bC^2 + c + 2dAC + 2eA + 2fC} \quad 5$$

gibt. Eliminirt man B und D aus 4 und 5, d. h. geht man von der Geraden auf ein System paralleler Geraden über, so erhält man

$$x(aA + dC + e) + y(dA + bC + f) + z(eA + fC + c) = 0 \quad 6$$

oder der Ort der Mitten aller parallelen Sehnen ist eine durch den Mittelpunct gehende, sog. **diametrale Ebene**, — in Beziehung auf welche diejenige der parallelen Sehnen, welche durch den Mittelpunct geht, **conjugirte Axe** heisst. Die Kante der zwei Geraden conjugirten diametralen Ebenen ist umgekehrt der Ebene der Geraden conjugirt. — Eine Axe, welche zu ihrer conjugirten

Ebene senkrecht steht, heisst **Hauptaxe**, und man hat für sie (195:3)

$$A = \frac{aA + dC + e}{eA + fC + c} \qquad C = \frac{dA + bC + f}{eA + fC + c} \qquad \mathbf{7}$$

Eliminirt man A aus diesen beiden Gleichungen, so findet man für C eine Gleichung dritten Grades, und es gibt somit (19) wenigstens Eine Hauptaxe.

Aus 2 folgt entsprechend 21:3

$$\alpha = \frac{bcg - f^2g - cdh + efh + dfk - bek}{cd^2 - def - abc + be^2 + af^2 - def}$$
$$\beta = \frac{gef - gcd - he^2 + hac + kde - kaf}{cd^2 - def - abc + be^2 + af^2 - def} \qquad \mathbf{8}$$
$$\gamma = \frac{dfg - gbe - afh + deh + abk - d^2k}{cd^2 - def - abc + be^2 + af^2 - def}$$

und in 3 ist

$$m = g\alpha + h\beta + k\gamma + 1 \qquad \mathbf{9}$$

Substituirt man wirklich aus 4 in 3, so erhält man

$$z^2(aA^2 + bC^2 + c + 2dAC + 2eA + 2fC) +$$
$$+ 2z[aAB + bCD + d(AD + BC) + eB + fD] +$$
$$+ aB^2 + bD^2 + 2dBD + m = 0 \qquad \mathbf{10}$$

woraus 5 sofort folgt. — Den zwei durch den Anfangspunct gehenden Geraden

$$x = A_1 z \qquad y = C_1 z \qquad \text{und} \qquad x = A_2 z \qquad y = C_2 z \qquad \mathbf{11}$$

entsprechen nach 4 und 6 die conjugirten Ebenen

$$x(aA_1 + dC_1 + e) + y(dA_1 + bC_1 + f) + z(eA_1 + fC_1 + c) = 0$$
$$x(aA_2 + dC_2 + e) + y(dA_2 + bC_2 + f) + z(eA_2 + fC_2 + c) = 0 \qquad \mathbf{12}$$

welche sich in der Geraden

$$x = \frac{(cd - ef)(A_1 - A_2) + (df - be)(A_1C_2 - A_2C_1) + (bc - f^2)(C_1 - C_2)}{(af - de)(A_1 - A_2) + (ab - d^2)(A_1C_2 - A_2C_1) + (df - be)(C_1 - C_2)} \cdot z$$
$$y = \frac{(e^2 - ac)(A_1 - A_2) + (de - af)(A_1C_2 - A_2C_1) + (ef - cd)(C_1 - C_2)}{(af - de)(A_1 - A_2) + (ab - d^2)(A_1C_2 - A_2C_1) + (df - be)(C_1 - C_2)} \cdot z \qquad \mathbf{13}$$

schneiden, und dieser ist nach 4 und 6 die Ebene

$$x(C_1 - C_2) + y(A_2 - A_1) + z(A_1C_2 - A_2C_1) = 0 \qquad \mathbf{14}$$

conjugirt, in welcher offenbar die Geraden 11 liegen, da durch Substitution der einen oder andern Werthe 11 die linke Seite von 14 wirklich Null wird. Es besteht somit der im Texte ausgesprochene Satz.

198. Transformation und Eintheilung. Transformirt man nach 192 die Coordinaten in 197:3, und setzt zur Bestimmung von φ, ψ, θ die Coefficienten von xy, xz und yz gleich Null, was wieder auf eine Gleichung dritten Grades, also auf eine mögliche Lösung führt, — so erhält man

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1 \qquad \mathbf{1}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ **Halbaxen** heissen. Vergleicht man 1 und 197:3, so

findet man in Beziehung auf 1 zu der Axe $x = Az$, $y = Cz$ nach 197:6 die conjugirte Ebene

$$\frac{A}{a^2} \cdot x + \frac{C}{b^2} \cdot y + \frac{1}{c^2} \cdot z = 0 \qquad 2$$

Sucht man hiernach successive, indem man $A = \infty$, $C = 0$, oder $A = 0$, $C = \infty$, oder $A = 0$, $C = 0$ setzt, zu den Coordinatenaxen XYZ die conjugirten Ebenen, so findet man für sie die drei Gleichungen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Es fallen somit die Coordinatenaxen mit Hauptaxen zusammen, und es gibt wirklich drei Hauptaxen. — Verlegt man den Anfangspunct der Coordinaten in einen Scheitel der Hauptaxe $2a$, d. h. lässt man x in $x - a$ übergehen, so erhält man nach 1 als Scheitelgleichung der Flächen zweiten Grades

$$x = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2p_1} + \frac{z^2}{2p_2} \quad \text{wo} \quad p_1 = \frac{b^2}{a} \quad p_2 = \frac{c^2}{a} \qquad 3$$

Die Flächen zweiten Grades zerfallen, je nachdem die Grössen α, β, γ in 197 endlich oder unendlich werden, d. h. je nachdem erstere einen zugänglichen Mittelpunct haben oder nicht, in zwei Hauptklassen. Die erste Klasse wird durch 1 dargestellt, und umfasst das sog.

Ellipsoid . . . . $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 4

Hyperboloid mit einem Mantel . $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 5

Hyperboloid mit zwei Mänteln . $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 6

Die zweite Klasse wird dagegen durch 3 für $a = \infty$ dargestellt und umfasst das sog.

Elliptische Paraboloid . . . . $x = \frac{y^2}{2p_1} + \frac{z^2}{2p_2}$ 7

Hyperbolische Paraboloid . . . . . . $x = \frac{y^2}{2p_1} - \frac{z^2}{2p_2}$ 8

so dass im Ganzen 5 Arten unterschieden werden.

Die im Texte angegebene Transformation von 197:3 kann in der Ausführung etwas vereinfacht werden, wenn man sie in zwei Abtheilungen macht: Dreht man erst (vergl. 192, Fig. 2) die Axe X' um φ rückwärts in die Knotenlinie, und legt Ebene X'Y' durch Drehen um die Knotenlinie in die Ebene XY nieder, d. h. setzt $\varphi = -\varphi$, $\theta = -\theta$ und $\psi = 0$ oder nach 192:4, 5

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \cos\theta + z \sin\varphi \sin\theta \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi \cos\theta + z \cos\varphi \sin\theta \\ z' &= \quad - y \sin\theta + z \cos\theta \end{aligned} \qquad 9$$

so geht 197:8 in

$$\begin{aligned}0 = {} & x^2 (a \operatorname{Cos}^2\varphi + b \operatorname{Sin}^2\varphi - 2 d \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi) + y^2 (a \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}^2\theta + \\ & + b \operatorname{Cos}^2\varphi \operatorname{Cos}^2\theta + c \operatorname{Sin}^2\theta + d \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}^2\theta - e \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin} 2\theta - \\ & - f \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} 2\theta) + z^2 (a \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Sin}^2\theta + b \operatorname{Cos}^2\varphi \operatorname{Sin}^2\theta + c \operatorname{Cos}^2\theta + \\ & + d \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}^2\theta + e \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin} 2\theta + f \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} 2\theta) + \\ & + x y (a \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}\theta - b \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Cos}\theta + 2 d \operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Cos}\theta - 2 e \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta + \\ & + 2 f \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta) + x z (a \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}\theta - b \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin}\theta + 2 d \operatorname{Cos} 2\varphi \operatorname{Sin}\theta + \\ & + 2 e \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\theta - 2 f \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\theta) + y z (a \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Sin} 2\theta + b \operatorname{Cos}^2\varphi \operatorname{Sin} 2\theta - \\ & - c \operatorname{Sin} 2\theta + d \operatorname{Sin} 2\varphi \operatorname{Sin} 2\theta + 2 e \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos} 2\theta + 2 f \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} 2\theta) + m\end{aligned} \tag{10}$$

über. Setzt man nun zur Bestimmung der willkürlichen Grössen φ und θ

$$\begin{aligned}& [(a - b) \operatorname{Sin} 2\varphi + 2 d \operatorname{Cos} 2\varphi] \operatorname{Sin}\theta + 2 (e \operatorname{Cos}\varphi - f \operatorname{Sin}\varphi) \operatorname{Cos}\theta = 0 \\ & (a \operatorname{Sin}^2\varphi + b \operatorname{Cos}^2\varphi - c + d \operatorname{Sin} 2\varphi) \operatorname{Sin} 2\theta + 2 (e \operatorname{Sin}\varphi + f \operatorname{Cos}\varphi) \operatorname{Cos} 2\theta = 0\end{aligned} \tag{11}$$

fest, d. h.

$$\operatorname{Tg}\theta = -2 \frac{e \operatorname{Cos}\varphi - f \operatorname{Sin}\varphi}{(a - b) \operatorname{Sin} 2\varphi + 2 d \operatorname{Cos} 2\varphi}$$

$$\operatorname{Tg} 2\theta = -2 \frac{e \operatorname{Sin}\varphi + f \operatorname{Cos}\varphi}{a \operatorname{Sin}^2\varphi + b \operatorname{Cos}^2\varphi - c + d \operatorname{Sin} 2\varphi}$$

so erhält man zur Bestimmung von φ mit Hülfe von 98:9 die Gleichung

$$\begin{aligned}& \frac{e \operatorname{Sin}\varphi + f \operatorname{Cos}\varphi}{a \operatorname{Sin}^2\varphi + b \operatorname{Cos}^2\varphi - c + d \operatorname{Sin} 2\varphi} = \\ & = \frac{2 (e \operatorname{Cos}\varphi - f \operatorname{Sin}\varphi) [(a - b) \operatorname{Sin} 2\varphi + 2 d \operatorname{Cos} 2\varphi]}{[(a - b) \operatorname{Sin} 2\varphi + 2 d \operatorname{Cos} 2\varphi]^2 - 4 [e \operatorname{Cos}\varphi - f \operatorname{Sin}\varphi]^2}\end{aligned}$$

oder, wenn man $\operatorname{Tg}\varphi = u$, also $1 : \operatorname{Cos}^2\varphi = 1 + u^2$ setzt,

$$\frac{e u + f}{a u^2 + b - c (1 + u^2) + 2 d u} = \frac{(e - f u) [(a - b) u + d (1 - u^2)]}{[(a - b) u + d (1 - u^2)]^2 - (e - f u)^2 (1 + u^2)}$$

oder durch einfache Umformung

$$\begin{aligned}0 & = (e - f u)^2 (e u + f) - \\ & - \frac{u (a - b) + d (1 - u^2)}{1 + u^2} \left[\begin{array}{l}(f u - e) [a u^2 + b - c (1 + u^2) + 2 d u] \\ + (e u + f) [(a - b) u + d (1 - u^2)]\end{array}\right] \\ & = (e - f u)^2 (e u + f) - \\ & - [u (a - b) + d (1 - u^2)] [u (a f - c f - d e) - b e + c e + d f]\end{aligned} \tag{12}$$

also eine Gleichung dritten Grades, welche für $u = \operatorname{Tg}\varphi$, also für φ, und somit auch für θ, zum Mindesten Einen reellen Werth ergibt, so dass 10 immer die Form

$$0 = A x^2 + B y^2 + C z^2 + D x y + M \tag{13}$$

annehmen kann. Dreht man nun noch (vergl. 192, Fig. 2) die jetzt in der Knotenlinie liegende Axe nach X zurück, d. h. setzt man $\varphi = 0$, $\theta = 0$ und $\psi = -\psi$, oder ersetzt man x und y nach 192:4, 5 durch $x \operatorname{Cos}\psi - y \operatorname{Sin}\psi$ und $x \operatorname{Sin}\psi + y \operatorname{Cos}\psi$, so geht 13 über in

$$\begin{aligned}0 = {} & (A \operatorname{Cos}^2\psi + B \operatorname{Sin}^2\psi + D \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi) x^2 + \\ & + (A \operatorname{Sin}^2\psi + B \operatorname{Cos}^2\psi - D \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi) y^2 + \\ & + C z^2 - (A \operatorname{Sin} 2\psi - B \operatorname{Sin} 2\psi - D \operatorname{Cos} 2\psi) x y + M\end{aligned} \tag{14}$$

Bestimmt man daher noch die willkürliche Grösse ψ durch die dafür immer einen reellen Werth ergebende Gleichung

$$(A - B) \operatorname{Sin} 2\psi - D . \operatorname{Cos} 2\psi = 0 \tag{15}$$

so nimmt endlich 13 die mit 1 übereinstimmende Form

$$0 = A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 + M \tag{16}$$

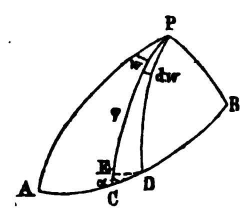
an. — Der Rest des Textes bedarf wohl in Beziehung auf die darin enthaltene

analytische Entwicklung kaum einer weitern Erläuterung, und für das Ellipsoid kann auf 199 verwiesen werden. Um sich auch von den übrigen vier Flächen zweiten Grades eine etwelche Vorstellung zu erwerben, kann man z. B. die Schnitte betrachten, welche durch die Coordinatenebenen oder durch Parallelebenen zu denselben erhalten werden: Bei dem Hyperboloid mit einem Mantel werden die Schnitte parallel zur XY Ellipsen, diejenigen parallel zur XZ oder YZ Hyperbeln; ist $a = b$, so kann man sich dasselbe durch Rotation einer Hyperbel um die kleine Axe entstanden denken, also als eine Art hyperbolisches **Zylindroid.** — Bei dem Hyperboloid mit zwei Mänteln werden die Schnitte parallel zu XY und XZ Hyperbeln, — diejenigen parallel zu YZ für $x < a$ imaginär, für $x > a$ Ellipsen; ist $b = c$, so kann man sich dasselbe durch Rotation einer Hyperbel um die grosse Axe entstanden denken, also als eine Art hyperbolisches Doppel-**Conoid.** — Beim elliptischen Paraboloid sind die Schnitte parallel YZ Ellipsen, diejenigen nach XY und XZ Parabeln; ist $p_1 = p_2$ oder $b = c$, so kann man sich dasselbe durch Rotation einer Parabel um ihre grosse Axe entstanden denken, also als ein parabolisches Conoid. — Beim hyperbolischen Paraboloid endlich sind die Schnitte von XY und XZ Parabeln, deren erstere den positiven und deren zweite den negativen Theil von X zur Axe hat; der Schnitt von YZ ist eine durch den Anfangspunct gehende Gerade, der einer Parallelebene zu YZ eine Hyperbel, so dass man sich die ganze sattel-artige Fläche als eine Folge von Hyperbeln denken kann, deren Scheitel auf den erwähnten Parabeln liegen.

199. Das Ellipsoid und Sphäroid. Setzt man in 197:1 eine der Coordinaten gleich Null, so erhält man für den Schnitt der zu ihr senkrechten Coordinatenebene, also auch für den Schnitt jeder Ebene, eine Gleichung zweiten Grades. Es ist also z. B. auch jeder ebene Schnitt eines Ellipsoides eine Linie zweiten Grades, und zwar, da er nothwendig eine geschlossene Linie sein muss, eine Ellipse. Für die tangirende Ebene am Ellipsoide vergl. 200, — für seinen Kubikinhalt 205. — In dem speciellen Falle, wo zwei Axen, z. B. $2a$ und $2b$, einander gleich werden, somit alle zu ihrer Ebene parallelen Schnitte Kreise des Radius a, alle durch die dritte Axe aber geführten Schnitte (Meridiane) Ellipsen der Axen $2a$ und $2c$ sind, kann offenbar das Ellipsoid, das nun **Sphäroid** heissen mag, als durch Rotation dieser Ellipse um $2c$ entstanden gedacht werden. Die kürzeste Verbindungslinie zweier Puncte eines solchen Sphäroides nennt man **geodätische Linie**, und diese schneidet jeden Meridian unter einem Winkel (Azimuth), dessen Sinus zu dem Abstande des Durchschnittspunctes von der Rotationsaxe umgekehrt proportional ist.

Die Grundeigenschaft der geodätischen Linie leitet Joh. Jakob **Baeyer** (Müggelheim bei Köpenik 1794; Generalmajor im preussischen Generalstabe) in seiner Schrift „Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Berlin 1862 in 4.“ auf folgende Weise ab: Es sei AB eine beliebige Verbindung

der Puncte A und B auf einer Rotationsfläche, — PC und PD ein Paar sehr naher Meridiane, — $PE = PD$, also DE ein Parallel, dessen Radius mit r bezeichnet werden mag, während R den Radius von EC darstelle. Dann hat man



$$ds = CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{R^2 d\varphi^2 + r^2 dw^2}$$
$$= dw \sqrt{R^2 \left(\frac{d\varphi}{dw}\right)^2 + r^2}$$

oder

$$s = \int U . dw \qquad \text{wo} \qquad U = \sqrt{R^2 p^2 + r^2} \qquad \text{und} \qquad p = \frac{d\varphi}{dw}$$

Lassen wir φ in $\varphi + z$ übergehen, wo z eine willkürliche Function von w ist, welche für A und B verschwindet, so erhalten wir entsprechend für die neue Verbindung von A und B

$$s' = \int U' . dw \qquad \text{und} \qquad p' = \frac{d(\varphi + z)}{dw} = \frac{d\varphi}{dw} + \frac{dz}{dw} = p + \frac{dz}{dw}$$

wo nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn $U = F(\varphi, p)$ gesetzt wird,

$$U' = F\left(\varphi + z,\ p + \frac{dz}{dw}\right) = U + \frac{dU}{d\varphi} . z + \frac{dU}{dp} . \frac{dz}{dw} + \ldots$$

Multiplicirt man aber letztere Gleichheit beidseitig mit dw und integrirt, so erhält man

$$s' - s = \int \frac{dU}{d\varphi} z . dw + \int \frac{dU}{dp} . dz + \ldots$$

Wenn nun s ein Minimum werden soll, so muss $s' - s$ für jeden Werth von $\pm z$ einen positiven Werth erhalten; da man aber z willkürlich, also auch so klein annehmen kann, dass die Glieder der ersten Ordnung grösser werden als die Summe der übrigen, ausser wenn jene verschwinden, so folgt, dass das Minimum nur eintreten kann, wenn die Glieder der ersten Ordnung verschwinden. Man hat also für das Minimum

$$o = \int \frac{dU}{d\varphi} z . dw + \int \frac{dU}{dp} . dz$$

oder, da

$$d\left[\frac{dU}{dp} . z\right] = \frac{dU}{dp} . dz + z . d\left(\frac{dU}{dp}\right) \quad \text{also} \quad \int \frac{dU}{dp} . dz = \frac{dU}{dp} z - \int z . d\left(\frac{dU}{dp}\right)$$

ist,

$$o = \frac{dU}{dp} . z + \int z \left[\frac{dU}{d\varphi} dw - d\left(\frac{dU}{dp}\right)\right]$$

Da aber z und somit das erste Glied letzterer Gleichung für beide Grenzen des Integrals verschwinden, sonst aber z willkürlich bleiben soll, so muss somit

$$o = \frac{dU}{d\varphi} dw - d\left(\frac{dU}{dp}\right) \qquad \text{oder} \qquad o = \int \frac{dU}{d\varphi} dw - \frac{dU}{dp}$$

sein, oder, wenn man mit $\frac{d\varphi}{dw} = p$ multiplicirt, da $\frac{dU}{d\varphi} dw . p = dU$ ist,

$$U = p . \frac{dU}{dp} + \text{Const.} \qquad \text{oder} \qquad \text{Const.} = U - p . \frac{dU}{dp}$$

Setzt man aber hier

$$U = \sqrt{R^2 p^2 + r^2} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{dU}{dp} = \frac{R^2 p}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}}$$

so erhält man

$$\text{Const.} = \sqrt{R^2 p^2 + r^2} - \frac{R^2 p^2}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}}$$

Da nun, wenn $\angle PCD = \alpha$,

$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{ED}{EC} = \frac{r \,.\, dw}{R \,.\, d\varphi} \qquad \text{also} \qquad p = \frac{d\varphi}{dw} = \frac{r}{R}\,\text{Ctg}\,\alpha$$

so folgt schliesslich

$$\text{Const.} = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 \,.\, \frac{r^2}{R^2}\,\text{Ctg}^2\,\alpha + r^2}} = r \,.\, \text{Sin}\,\alpha$$

Es hat also die kürzeste Linie auf einer durch Rotation entstandenen Oberfläche die Eigenschaft, dass auf jedem ihrer Puncte der Abstand r von der Drehungsaxe multiplicirt in den Sinus des Azimuthes an diesem Puncte, eine constante Grösse ist.

200. Die tangirende Ebene. Legt man durch einen Punct $(x_1 y_1 z_1)$ einer Fläche

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

und zwei benachbarte Puncte $(x_1 + \alpha_1,\ y_1,\ z_1 + \gamma_1)$ und $(x_1,\ y_1 + \beta_1,\ z_1 + \gamma_2)$ ebenderselben eine Ebene, so erhält man (193:3, 4) für ihre Gleichung

$$z - z_1 = (x - x_1)\frac{\gamma_1}{\alpha_1} + (y - y_1)\frac{\gamma_2}{\beta_1} \tag{2}$$

Sind nun α_1 und β_1, folglich auch die γ, verschwindend klein, so wird die Ebene **tangirend**, während 2 in

$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1) \qquad \text{wo} \qquad p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy} \tag{3}$$

übergeht, und den Winkel n dieser tangirenden Ebene gegen XY kann man (193:6) nach

$$\text{Cos}\,n = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \qquad \text{oder} \qquad \text{Tg}\,n = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{4}$$

berechnen. Nach 3 folgt z. B.

$$\frac{x \,.\, x_1}{a^2} + \frac{y \,.\, y_1}{b^2} + \frac{z \,.\, z_1}{c^2} = 1 \tag{5}$$

als Gleichung der ein Ellipsoid im Puncte $(x_1 y_1 z_1)$ tangirenden Ebene.

Um 2 zu erhalten, hat man in 193:3 nach 193:4

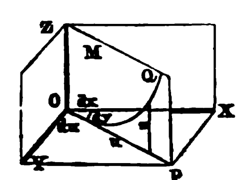
$A = -\beta_1 \gamma_1 \qquad B = -\alpha_1 \gamma_2 \qquad C = \alpha_1 \beta_1 \qquad D = \beta_1 \gamma_1 x_1 + \alpha_1 \gamma_2 y_1 - \alpha_1 \beta_1 z_1$

zu setzen.

201. Die Krümmung der Flächen. Legt man durch einen Punct einer Fläche eine Senkrechte zu der in ihm tangirenden Ebene (200), so erhält man die ihm zugehörende **Normale.** Legt man durch diese Normale eine Ebene M, so schneidet sie die Fläche in einer Curve, zu der man nach 139 den Krümmungskreis suchen kann. Dreht man M, so verändert sich im Allgemeinen der Krümmungs-

halbmesser, nimmt aber für eine gewisse Stellung ein **Maximum**, für die dazu senkrechte Stellung dagegen ein **Minimum** an.

Verlegt man den Anfangspunct der Coordinaten in den Berührungspunct O, und lässt die Ebene der X Y mit der tangirenden Ebene zusammenfallen, so kömmt die Normale in die Axe der Z zu liegen, und die Ebene M schneidet die Fläche in einer Curve O Q, zu der die Kante O P von M in X Y Tangente ist, und der nach 139:3 in O der Krümmungskreis



$$R = \frac{(du^2 + dz^2)^{3/2}}{du \cdot d^2 z} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \cdot d^2 z} \qquad 1$$

entspricht. Da aber O P Tangente ist, so muss $dz = 0$ sein, während entsprechend 58

$$d^2 z = r \cdot dx^2 + 2s \cdot dx \cdot dy + t \cdot dy^2 \text{ wo } r = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right),\ s = \left(\frac{d^2 z}{dx \cdot dy}\right),\ t = \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$$

und man erhält daher, wenn noch $w = dy : dx$ gesetzt wird,

$$R = \frac{dx^2 + dy^2}{d^2 z} = \frac{1 + w^2}{r + 2sw + t \cdot w^2} \qquad 2$$

wo w die Tangente des Winkels der Ebene M mit X Z darstellt. Dreht man die Ebene M um Z, so ändert sich offenbar w, während die nur von der Gleichung der Fläche abhängigen Grössen r, s, t unverändert bleiben. Es ist also R nur von w abhängig, und da aus 2

$$\frac{dR}{dw} = 2 \frac{sw^2 + (r - t)w - s}{(r + 2sw + tw^2)^2}$$

folgt, so wird daher R ein Maximum oder Minimum, wenn

$$w^2 + \frac{r - t}{s} w - 1 = 0 \qquad 3$$

d. h. wenn w zwei Werthe annimmt, deren Product gleich -1 ist, oder die in doppeltem Gegensatze stehen; diess hat aber nach 182 nur statt, wenn die entsprechenden Ebenen M zu einander senkrecht stehen, w. z. b. w. — Die Krümmung der Flächen wurde in allgemeiner Weise zuerst durch **Clairault** in seinen „Recherches sur les courbes à double courbure. Paris 1731 in 4." studirt; für die neuern Untersuchungen vergl. man z. B., ausser der in 45 erwähnten „Introductio" von **Euler** und mancher speciellen Abhandlung dieses grossen Geometers in den Petersburger Memoiren von 1747, 1771, 1785, etc., — der in 131 angeführten „Application" von **Monge** und seinen Abhandlungen in Bd. 9 und 10 der „Mémoires présentés, — und manchen andern in 131, 191, etc. citirten Werken, — „**Gauss**, Disquisitiones generales circa superficies curvas (Comment. Soc. Gotting. 1827; franz. Paris 1852 in 8.), — L. **Crémona**, Preliminare di una teoria geometrica delle superficie. Bologna 1866 in 4., — etc."

202. Die Curven von doppelter Krümmung. Stellt man eine Linie im Raume durch zwei Gleichungen

$$y = \varphi(x) \qquad z = \psi(x) \qquad 1$$

dar, so sind

$$y' - y = (x' - x)\frac{dy}{dx} \qquad z' - z = (x' - x)\frac{dz}{dx} \qquad 2$$

die Gleichungen einer Tangente an dieselbe im Puncte (x y z), während

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0 \qquad 3$$

eine durch den Punct senkrecht zu der Tangente gelegte Ebene, die sog. **Normalebene,** darstellt, und

$$(z'-z)\frac{d^2y}{dx^2}=(x'-x)\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)+(y'-y)\frac{d^2z}{dx^2} \qquad 4$$

die Gleichung der sich der Curve am innigsten anschliessenden, der sog. **Osculationsebene,** ist, welche auch die Tangente in sich fasst. Je nachdem sich letztere Ebene ändert oder nicht, wenn man zu folgenden Puncten der Curve übergeht, stellt 1 eine ebene oder eine doppeltgekrümmte Linie dar.

Die Gleichungen 1 stellen zugleich die Gleichungen der Projectionen der Curve auf die Ebenen der XY und XZ dar. Geht x in x + h über, so werden y und z zu

$$y+h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\cdots \qquad z+h\frac{dz}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\cdots \qquad 5$$

und in ähnlicher Weise hat man für eine zweite Curve, welche durch den Punct x′y′z′ geht, wenn x′ zu x′ + h wird

$$y'+h\frac{dy'}{dx'}+\frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y'}{dx'^2}+\cdots \qquad z'+h\frac{dz'}{dx'}+\frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{d^2z'}{dx'^2}+\cdots \qquad 6$$

Sollen die beiden Curven einen gemeinschaftlichen Punct haben, so wird diess durch die Bedingungen

$$x=x' \qquad y=y' \qquad z=z' \qquad 7$$

ausgedrückt. Sollen sie überdiess in diesem Puncte eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, so muss auch

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'} \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{dz'}{dx'} \qquad 8$$

sein, — für eine Berührung zweiter Ordnung auch

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2} \qquad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z'}{dx'^2} \qquad 9$$

etc. Ist die zweite Curve z. B. eine Gerade

$$y'=ax'+\alpha \qquad z'=bx'+\beta \qquad 10$$

so unterliegt sie offenbar 7 und 8, wenn

$$y'-y=a(x'-x) \qquad z'-z=b(x'-x) \qquad a=\frac{dy}{dx} \qquad b=\frac{dz}{dx}$$

folglich sind 2 die Gleichungen einer Tangente. — Eine Normale zu einer Curve doppelter Krümmung zu ziehen, ist offenbar eine unbestimmte Aufgabe, da es unendlich viele Gerade gibt, welche durch einen gegebenen Punct der Curve gehen und auf der an denselben gezogenen Tangente senkrecht stehen; dagegen liegen alle diese Senkrechten in einer Ebene, der sog. Normalebene. Soll aber eine Ebene

$$Ax'+By'+Cz'+D=0$$

durch den Punct x y z gehen und zu 2 senkrecht stehen, so muss nach 195

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{B}{A} \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{C}{A}$$

sein, also ist 3 wirklich die Gleichung der Normalebene. — Soll eine Fläche

$$z' = f(x', y') \qquad 11$$

mit der Curve 1 einen Punct gemeinschaftlich haben, oder gar mit ihr eine Berührung der ersten, zweiten, etc. Ordnung eingehen, so muss sie analoge Bedingungen erfüllen, wie sie unter 7, 8, 9, ... für eine Curve ausgesprochen worden sind. So z. B. wird eine Ebene

$$z' = A x' + B y' + C$$

mit 1 den Punct $x y z$ gemein haben, wenn

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y) \qquad 12$$

Geht die Abscisse x in $x + h$ über, so nehmen y und z die durch 5 gegebenen Werthe an, während für den Punct der Ebene, dem $x + h$ und $y + h \frac{dy}{dx} + \ldots$ zugehören, nach 12 die dritte Coordinate

$$z + A h + B\left(h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\right) \qquad 13$$

sein wird, so dass die Differenz der dritten Coordinate von Curve und Ebene nach 5 und 13

$$h\left(\frac{dz}{dx} - A - B\frac{dy}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - B\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots$$

beträgt. Setzt man zur Bestimmung von A und B die beiden Factoren von h und h^2 gleich Null, so wird

$$B = \frac{d^2z}{dx^2} : \frac{d^2y}{dx^2} \qquad A = \frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} : \frac{d^2y}{dx^2} \qquad 14$$

und es stellt daher 4 nach 12 die Gleichung der sog. Osculationsebene vor. Substituirt man aus 2 in 4, so sieht man, dass die Gleichung identisch wird, und es enthält also die Osculationsebene die Tangente in sich. — Vergl. die bei 201 aufgezählten Schriften, — ferner „Wilhelm **Schell** (Fulda 1826; Professor der Mathematik zu Marburg), Theorie der Curven von doppelter Krümmung. Leipzig 1859 in 8., — etc.“

203. Die einhüllenden und developpabeln Flächen. Lässt man in der eine Fläche vorstellenden Gleichung $F(x, y, z, w) = 0$ die Grösse w nach und nach andere und andere Werthe annehmen, so erhält man eine Folge von Flächen, von denen je zwei auf einander folgende sich in einer Curve, der sog. **Charakteristik,** schneiden werden, — die Folge aller dieser Charakteristiken aber bildet die sog. **einhüllende** Fläche aller jener Flächen. Ist speciell die eingehüllte Fläche eine Ebene, welche beständig einer Geraden parallel ist oder durch einen gegebenen Punct geht, so heisst die einhüllende **cylindrische** oder **conische** Fläche; bei beiden sind die charakteristischen Curven Gerade, und es sind daher beide, sowie überhaupt alle Flächen, welche sich als Ort einer Geraden denken lassen, deren zwei nächste Lagen derselben Ebene angehören, **developpabel,** d. h. sie lassen sich auf einer Ebene ausbreiten, — während dagegen Flächen, welche dieser letztern Bedingung nicht genügen, **windschief** (gauche) heissen.

Die „Surfaces gauches“, für welche **Klügel** im Deutschen den Namen „windschiefe Flächen“ zu belieben wusste, sollen zuerst von Jean-Baptiste-

Marie-Charles Meusnier de la Place (Tours 1754 — Mainz 1793, wo ihm eine Kugel das Bein wegriss; französischer Genie-Oberst und später Divisionsgeneral) in seinem „Mémoire sur la courbure des surfaces (Mém. des savants étrangers X 1776)“ einlässlich betrachtet worden sein.

204. Die Complanation. Bezeichnet d O ein Flächenelement, so ist nach 165 und 200:4 (s. Fig. 1)

$$d\,O = \frac{d\,x\,.\,d\,y}{\mathrm{Cos}\;n} = d\,x\,.\,d\,y\,\sqrt{1+p^2+q^2} \qquad \mathbf{1}$$

ein Ausdruck, den man, um die Oberfläche zu erhalten, zweimal, z. B. zuerst nach x und dann nach y, zu integriren hat. Setzt man

$$d\,x = P\,.\,d\,\varphi + Q\,.\,d\,\psi \qquad d\,y = P'\,.\,d\,\varphi + Q'\,d\,\psi \qquad \mathbf{2}$$

so ist für die Integration nach x offenbar y als constant anzusehen, also $P'\,d\,\varphi + Q'\,d\,\psi = 0$ oder

$$d\,\psi = -\frac{P'}{Q'}\,.\,d\,\varphi \qquad \text{und somit} \qquad d\,x = \frac{P\,Q' - Q\,P'}{Q'}\,.\,d\,\varphi$$

zu setzen. Für die zweite Integration ist sodann φ als constant anzusehen, also $d\,y = Q'\,d\psi$ zu setzen, und für diese Werthe geht 1 in

$$O = \int\!\!\int (P\,Q' - Q\,P')\,\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\,\varphi\,.\,d\,\psi \qquad \mathbf{3}$$

über. So z. B. genügen der Kugelgleichung $x^2+y^2+z^2=r^2$ die Werthe

$$x = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi \qquad y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\psi \qquad z = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

also ist in diesem Fall

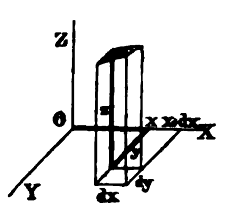
$$P\,Q' - Q\,P' = r^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi \qquad p = -\frac{x}{z} = -\mathrm{Tg}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi$$

$$q = -\frac{y}{z} = -\mathrm{Tg}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\psi \qquad \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

$$O = r^2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi}\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,d\,\varphi\,.\,d\,\psi = 4\,r^2\,\pi \qquad \mathbf{4}$$

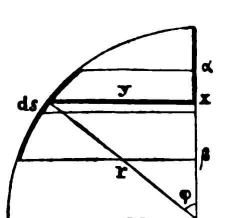
Und so weiter.

Die Alten, und noch **Archimedes**, wussten nur die Oberflächen der geraden Zylinder und Kegel, der Kugeln und Kugelzonen zu berechnen. **Hugens** fand sodann 1657 die Fläche des parabolischen Conoid's, und im folgenden Jahre auch diejenige des hyperbolischen Conoid's und des Sphäroides. Allgemeine Methoden, wie die oben im Texte entwickelte, wusste dagegen erst die Infinitesimalrechnung aufzustellen. — Um den Schwerpunct x′ y′ z′ der Fläche O zu bestimmen, hat man offenbar im Allgemeinen die Gleichungen



$$x'.\,O = \int\!\!\int x\,.\,d\,O \qquad y'.\,O = \int\!\!\int y\,.\,d\,O \qquad z'.\,O = \int\!\!\int z\,.\,d\,O \qquad \mathbf{5}$$

zu benutzen; in speciellen Fällen kann man auch speciell vorgehen. Soll man z. B. den Schwerpunct einer Kugelzone bestimmen, so weiss man zum Voraus, dass er in der Senkrechten vom Kugelcentrum auf die bestimmenden



Parallelebenen liegt, — ferner, dass die Zone nach 186 die Fläche

$$O = 2r\pi(\beta - \alpha)$$

hat, das ds entsprechende Element derselben aber die Fläche

$$dO = 2r\pi . dx = 2y\pi . dx . \text{Cosec.}\,\varphi =$$
$$= 2y\pi . ds = 2y\pi\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und dass endlich nach 134 : 2

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad \text{also} \quad y\,dy = (r - x)\,dx \quad \text{oder} \quad y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = r$$

ist. Es geht somit die erste 5 in

$$x' . (\beta - \alpha) = \int_\alpha^\beta x\,dx = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \quad \text{oder} \quad x' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \qquad 6$$

über, so dass der Schwerpunct einer Zone genau in die halbe Höhe fällt.

205. Die Cubatur. Bezeichnet dV das durch dO und seine Projection auf XY bestimmte prismatische Körper-Element, so ist offenbar (v. 204 : Fig. 1)

$$dV = dx . dy . z \qquad 1$$

und hieraus findet sich entsprechend 204

$$V = \int\int (P\,Q' - Q\,P')\,z\,d\varphi\,d\psi \qquad 2$$

So z. B. genügen der Gleichung 198 : 4 des Ellipsoides die Werthe

$$x = a \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\psi \qquad y = b \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\psi \qquad z = c \operatorname{Cos}\varphi \qquad 3$$

wofür $P\,Q' - Q\,P' = a\,b \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi$ wird; also stellt

$$V = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} a\,b\,c \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi\,d\varphi\,d\psi = \frac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi \qquad 4$$

das Volumen des Ellipsoides vor.

Schon **Archimedes** lehrte Kugel, Sphäroid und parabolisches Conoid zu cubiren, und später wurden von Bonaventura **Cavaleri** oder Cavalieri (Bologna 1598 — Bologna 1647; Schüler Galilei's und Professor der Mathematik zu Bologna), **Wallis**, etc. noch mehrere andere Körper durch Summirung von Reihen berechnet, bis sodann die Infinitesimalrechnung allgemeine Methoden, wie die im Texte Mitgetheilte, ermöglichte. — Für die Bestimmung des Schwerpunctes $x'\,y'\,z'$ des Volumens V hat man offenbar im Allgemeinen die Gleichungen

$$x' . V = \int\int\int x . dV \qquad y' . V = \int\int\int y . dV \qquad z' . V = \int\int\int z . dV \qquad 5$$

zu benutzen; in speciellen Fällen kann man aber auch hier wieder für Volumen und Schwerpunct speciell vorgehen. Hat man z. B. Körper, welche zu einer Axe, wir wollen annehmen zur Coordinatenaxe X, symmetrisch sind, so findet man Volumen und Schwerpunct eines zwischen den in den Abständen α und β vom Anfangspuncte zur Axe senkrechten Schnitten liegenden Stückes V offenbar nach den einfachern Formeln

$$V = \int_\alpha^\beta X . dx \qquad V . x' = \int_\alpha^\beta x\,X . dx \qquad 6$$

wo X die Fläche des dem Abstande x entsprechenden Querschnittes ist. So

z. B. hat man beim Ellipsoide für X eine Ellipse zu setzen, deren Gleichung nach 198:4

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

ist, deren Axen somit $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ und $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ sind, und es ist daher nach 143:18

$$X=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\pi=bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

also nach 6

$$V=\int_\alpha^\beta bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=bc\pi\left[_\alpha^\beta x-\frac{x^3}{3a^2}\right]$$

$$=bc\pi(\beta-\alpha)\left(1-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3a^2}\right) \qquad 7$$

$$V.x'=\int_\alpha^\beta bc\pi\left(x-\frac{x^3}{a^2}\right)dx=\frac{bc\pi}{2}(\beta^2-\alpha^2)\left(1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2a^2}\right)$$

oder

$$x'=\frac{3(\alpha+\beta)(2a^2-\alpha^2-\beta^2)}{4(3a^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)} \qquad 8$$

Für $\beta=a$ und $\alpha=-a$, d. h. für das ganze Ellipsoid, wird natürlich $x'=0$, während nach 7 wie oben $V=\frac{4}{3}abc\pi$ folgt.

206. Die darstellende Geometrie. Zieht man von einem Puncte (Pole) Gerade durch alle bemerkenswerthen Puncte eines Gebildes, schneidet diese Geraden durch eine Ebene, und verbindet die Durchschnittspuncte genau so, wie die Puncte am Gebilde verbunden sind, so erhält man eine **Polarprojection** des Gebildes. Ist der Punct das Auge, so heisst die Projection **perspectivisch.** Ist dagegen der Punct unendlich weit von der Bildebene entfernt, und diese senkrecht zu der projicirenden Geraden, so heisst die Projection **orthogonal,** — speciell **Grundriss** oder **Aufriss,** wenn die Bildebene horizontal oder vertical ist, — **axonometrisch,** wenn die Projicirenden mit drei zu einander senkrechten Hauptrichtungen des Gebildes bestimmte Winkel bilden, und zwar **isometrisch,** wenn alle drei, — **monodimetrisch,** wenn zwei dieser Winkel gleich sind. — Die Lehre, die räumlichen Gebilde durch Projectionen darzustellen, und mit Hülfe derselben die in der analytischen Geometrie durch Rechnung gelösten Aufgaben durch Zeichnung zu lösen, heisst **darstellende Geometrie** oder **Géométrie descriptive.**

Die darstellende Geometrie wurde eigentlich erst durch das Werk „**Monge,** Leçons de géométrie descriptive. Paris 1794 in 4. (7 éd. par Brisson 1847)" wissenschaftlich begründet, obschon einzelne Parthien derselben, und namentlich die Perspective, schon in viel früherer Zeit bearbeitet wurden, vergleiche z. B. „**Lambert,** Die freie Perspective. Zürich 1759 in 8. (2. A. Zürich 1774, 2 Bde. in 8.; frans. Zuric 1759 in 8.)". Seit Monge ist dieses Gebiet mit

einer reichen Litteratur versehen worden, aus der, neben der schon 73 erwähnten Schrift von Ladomus, etwa folgende Werke namhaft gemacht werden mögen: „Louis Léger **Vallée** (1784; Inspecteur général des ponts-et-chaussées), Géométrie descriptive. Paris 1819—1825, 2 Vol. in 4., und: Traité de la science du dessin. Paris 1821 in 4. (2. éd. 1838), — **Lefébure** de Fourcy, Traité de géométrie descriptive. Paris 1832 in 8. (5. éd. 1843), — Joseph-Alphonse **Adhémar** (Paris 1797; Privatlehrer der Mathematik in Paris), Traité de géométrie descriptive. Paris 1834 in 8. (3. éd. 1846), ferner: Traité de perspective linéaire. Paris 1838 in 8. (2. éd. 1846), und: Traité des ombres (2. éd.), Paris 1852 in 8., — C. F. A. **Leroy** (17..—1854; Professor der darstellenden Geometrie in Paris), Traité de géométrie descriptive. Paris 1842, 2 Vol. in 4. (4. éd. par Martelet 1855; deutsch von Kauffmann, Stuttgart 1838), — Melchior **Ziegler** (Winterthur 1801; Ingenieur), Darstellende Geometrie. Winterthur 1843 in 4., — Théodore **Olivier** (Lyon 1793 — Lyon 1853; Professor der darstellenden Geometrie in Paris, und Mitbegründer der École centrale), Cours de géométrie descriptive. Paris 1845 in 4. (2. éd. 1852; Additions, Compléments, Développements, Mémoires 1843—1851, 4 Vol. in 4.), — Julius **Weisbach** (Mittelschmiedeberg bei Annaberg 1806; Bergrath und Professor der angewandten Mathematik in Freiberg), Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. Freiberg 1857 in 8., — Karl Theodor **Anger** (Danzig 1803 — Danzig 1858; erst Gehülfe von Bessel, dann Professor der Mathematik zu Danzig), Elemente der Projectionslehre mit Anwendung der Perspective auf die Geometrie. Danzig 1858 in 8., — G. **Delabar**, Professor der Mathematik zu St. Gallen: Ueber die verschiedenen Projectionsarten im Allgemeinen, und die axonometrischen und parallel-perspectivischen im Besondern. St. Gallen 1860 in 4., — Jules-Antoine-René Maillard de **La Gournerie** (1814; Professor an der École polytechnique in Paris), Traité de perspective linéaire. Paris 1859 in 4., und: Traité de géométrie descriptive. Paris 1860—1864, 3 Part. in 4., — **Babinet** et **Blum**, Eléments de géométrie descriptive. Paris 1860 in 8., — **Tilscher**, Die Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen. Wien 1862 in 8., — Rudolf **Staudigl**, Grundzüge der Reliefperspective. Wien 1868 in 8., — Joseph **Schlesinger**, Docent in Wien: Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Wien 1870 in 8., — etc."

XX. Die Methode der kleinsten Quadrate.

207. Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate. Wird eine Grösse B unter Vermeidung constanter Fehlerquellen wiederholt, z. B. n-mal, bestimmt, so hat offenbar, sobald n gross genug ist, um das Erscheinen jedes zufälligen Fehlers in + und — gleich wahrscheinlich zu machen, das **arithmetische Mittel**

$$M = \frac{1}{n} \Sigma b \qquad 1$$

sämmtlicher Bestimmungen $b_1, b_2, \ldots b_n$ die grösste Wahrscheinlichkeit für sich. Denkt man sich aber alle beobachteten Werthe wie Puncte im Raume verbreitet, so entspricht (196) der so eben be-

sprochene wahrscheinlichste Werth ihrem Schwerpuncte. Die Entfernungen der Puncte von dem Schwerpuncte werden durch die Abweichungen der Beobachtungswerthe von dem Mittel ersetzt, und die Constanten sind bei gleicher Güte der Beobachtungen sämmtlich gleich, also z. B. gleich einer Einheit, zu setzen. Es muss also (133, 196) für den wahrscheinlichsten Werth die **Summe der Fehlerquadrate ein Minimum** sein, und dieses ist der Fundamentalsatz der von Gauss und Legendre eingeführten Methode der kleinsten Quadrate.

Die Bedeutung und Berechtigung des arithmetischen Mittels besprachen schon **Simpson** in seiner Abhandlung „On the Advantage of taking the Mean of a Number of Observations in Practical Astronomy (Phil. Trans. 1755)", **Lambert** in seiner „Photometria. Aug. Vind. 1761 in 8.", etc. — Hat man nach 1 das Mittel aus n Beobachtungen bestimmt, und kömmt eine neue Beobachtung b hinzu, so kann man das neue Mittel nach der Formel

$$M' = \frac{n \cdot M + b}{n+1} = M + \frac{b - M}{n+1} \qquad 2$$

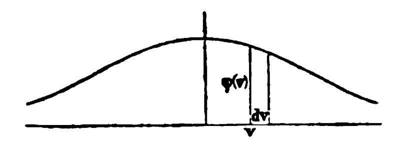
berechnen. — Vergleicht man die einzelnen Beobachtungen mit ihrem Mittel, und setzt z. B.

$$b_1 - M = v_1 \qquad b_2 - M = v_2 \quad \ldots\ldots \quad b_n - M = v_n \qquad 3$$

so stellen die v die wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen vor, und dabei ist offenbar

$$\Sigma v = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = 0 \qquad 4$$

Bei jeder Gattung von Beobachtungen sind Fehler bis zu einer gewissen Grösse als klein und beinahe nothwendig zu betrachten, während merklich grössere Fehler nur ausnahmsweise, und je grösser, desto weniger vorkommen werden; es hängt also die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler der Grösse v zu begehen, irgendwie von der Grösse, aber sicherlich nicht von dem Zeichen dieses Fehlers ab, kann also als eine symmetrische Function desselben angesehen und z. B. mit $\varphi(v)$ bezeichnet werden, — und wenn man sich die v als Abscissen, die $\varphi(v)$ als Ordinaten aufgetragen denkt, so wird man eine die wahrscheinliche Fehlervertheilung darstellende, symmetrische und sich nach beiden Seiten rasch der Axe nähernde Curve erhalten. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen v und v + dv liege, ist (36) gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zwischen diesen Grenzen enthaltenen Fehler, also (entsprechend 140) gleich $\varphi(v) \cdot dv$, und somit die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen die Grenzen — c und + c oder — ∞ und + ∞ falle,



$$w = \int_{-c}^{+c} \varphi(v)\, dv \qquad \text{oder} \qquad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv \qquad 5$$

da 1 der Gewissheit entspricht. Bezeichnet W die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Reihe von n gleich guten Beobachtungen die Fehler $v_1\, v_2 \ldots v_n$ vorkommen, so ist nach 36

$$W = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \ldots\ldots \varphi(v_n) \qquad 6$$

und zwar muss W, wenn diese Fehler nach 3 berechnet werden, also nach

unserem Grundsatze die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben, auch ein Maximum annehmen, d. h. es muss nach 56 und 63

$$\frac{dW}{dM} = W\left(\frac{d.\varphi(v_1)}{\varphi(v_1).dv_1}\cdot\frac{dv_1}{dM} + \frac{d.\varphi(v_2)}{\varphi(v_2).dv_2}\cdot\frac{dv_2}{dM} + \ldots + \frac{d.\varphi(v_n)}{\varphi(v_n).dv_n}\cdot\frac{dv_n}{dM}\right)$$

für die aus 3 folgenden Werthe

$$\frac{dv_1}{dM} = \frac{dv_2}{dM} = \ldots\ldots = \frac{dv_n}{dM} = -1$$

zu Null werden, d. h.

$$0 = \frac{d.\varphi(v_1)}{\varphi(v_1).dv_1} + \frac{d.\varphi(v_2)}{\varphi(v_2).dv_2} + \ldots\ldots + \frac{d.\varphi(v_n)}{\varphi(v_n).dv_n}$$

sein, was in Vergleichung mit 4, wenn 2a eine Constante ist,

$$2av = \frac{d.\varphi(v)}{\varphi(v).dv} \qquad \text{oder} \qquad 2av.dv = \frac{d.\varphi(v)}{\varphi(v)}$$

bedingt, oder, wenn c eine Constante ist,

$$av^2 + \log c = \log\varphi(v) \qquad \text{oder} \qquad \varphi(v) = c.e^{av^2} \tag{7}$$

so dass 6 in

$$W = c^n.e^{a(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)} \tag{8}$$

übergeht. Da nach dem angenommenen Grundsatze kleinere Fehler eine grössere Wahrscheinlichkeit haben, so muss offenbar a negativ sein, kann also z. B. durch $-h^2$ ersetzt werden. — Setzt man

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.dx \qquad \text{so ist auch} \qquad V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}.dy$$

also stellt nach 205 : 1

$$V^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx.dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} z.dx.dy$$

das Volumen des von einer in's Unendliche ausgedehnten Fläche der Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ begrenzten Körpers dar. Da aber hiernach z für alle Puncte der Ebene XY, welche vom Anfangspuncte denselben Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ haben, gleich wird, so ist diese Oberfläche durch Rotation um die Axe der Z entstanden, also kann der Körper als eine Summe von zur Ebene der XY senkrechten Zylinderschalen des Volumens $2r\pi.dr.z$ betrachtet werden, also muss auch

$$V^2 = \int_0^\infty 2r\pi.z.dr = \pi\int_0^\infty e^{-r^2}.d(r^2) = -\pi\left[\,{}_0^\infty\, e^{-r^2}\right] = \pi$$

sein, — also hat man das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.dx = \sqrt{\pi} \tag{9}$$

welches zuerst **Cauchy** auf diese Weise erhalten haben soll. Nach 5 und 7 ergibt sich hiernach

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v).dv = \frac{c}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2v^2}.h.dv = \frac{c}{h}\sqrt{\pi} \quad \text{also} \quad c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

oder also

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2v^2} \tag{10}$$

Nimmt man die constante Grösse h als Einheit an, so erhält man nach dieser Formel die zusammengehörigen Werthe

v	φ (v)	v	φ (v)	v	φ (v)
0,0	0,5642	0,7	0,3456	1,4	0,0795
0,1	5586	0,8	2975	1,5	595
0,2	5421	0,9	2510	1,6	436
0,3	5156	1,0	2076	1,7	314
0,4	4808	1,1	1682	1,8	221
0,5	4394	1,2	1337	1,9	153
0,6	3936	1,3	1041	2,0	103

mit deren Hülfe die obige Curve construirt wurde. — Für denselben Werth von c geht 8 in

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \cdot e^{-h^2 \cdot \Sigma v^2} \qquad 11$$

über, woraus, wie übrigens schon aus 8, geschlossen werden kann, dass ein Maximum von W einem Minimum von Σv^2 entspricht, — dass also der schon im Texte gegebene und dort entsprechend meiner „Note zur Methode der kleinsten Quadrate (Bern. Mitth. 1849)“ abgeleitete Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate auch auf diese Weise als nothwendige Folge des für das arithmetische Mittel angenommenen Grundsatzes erwiesen werden kann. — Die Methode der kleinsten Quadrate hatte sich schon 1795 der damals erst 18jährige **Gauss** zur Berechnung der Planetenbahnen ausgedacht, aber erst 1809 in seiner „Theoria motus“ davon öffentliche Kenntniss gegeben, — mindestens drei Jahre später, als sie unabhängig von ihm durch **Legendre** gefunden und in seinen „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris 1806 in 4.“ publicirt worden war, — und nur wenig früher, als auch **Laplace** diesem Gegenstande in seiner „Théorie analytique des probabilités (v. 35)“ einen eigenen Abschnitt gewidmet hatte; es ist somit die Prioritätsfrage etwas zweifelhaft, während dann allerdings **Gauss** nachmals durch sein fundamentales Werk „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ. Gottingæ 1821—1826 in 4. (Franz. durch Bertrand mit Beifügung der frühern Abhandlungen von Gauss, Paris 1855 in 8.)“ alle seine Vorgänger überglänzte. — Zur Vervollständigung der Literatur sind noch, ausser den in 35 genannten Werken von Hagen, Liagre, etc., anzuführen: „**Cauchy**, Sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers élémens, déterminés par un grand nombre d'observations, pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe, devienne un Minimum (Journ. de l'école polyt. 13), — Joh. Franz **Encke** (Hamburg 1791 — Spandau 1865; Professor der Astronomie, Director der Sternwarte und Secretär der Academie in Berlin; vergl. sein „Leben und Wirken“ von Bruhns, Leipzig 1869), Ueber die Methode der kleinsten Quadrate (Berl. Jahrb. 1834—1836), — **Gerling**, Die Ausgleichungsrechnungen der practischen Geometrie. Hamburg 1843 in 8., — Wilhelm **Denzler** (Sulgen im Thurgau 1811; Lehrer der Mathematik am Schullehrer-Seminar in Küssnacht, und später an der Zürcher-Hochschule), Ueber den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate (Zürch. Mitth. Bd. 2), — Alexis **Sawitsch** (Bjelowodsk im Gouvernement Charkow 1811; Professor der Astronomie und Geodäsie zu Petersburg), Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berech-

nung der Beobachtungen und geodätischen Messungen oder die Methode der kleinsten Quadrate. Petersburg 1857 in 8. (Russisch; deutsch von Lais, Mitau 1863 in 8.), — **Dienger**, Die Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. Braunschweig 1857 in 8., — Elie **Ritter** (Genf 1801 — Genf 1862; Lehrer der Mathematik in Genf), Manuel de l'application de la méthode des moindres carrés au calcul des observations. Paris 1858 in 8., — George Biddell **Airy** (Alnwick in Northumberland 1801; früher Professor der Astronomie und Physik zu Cambridge, jetzt Director der Sternwarte zu Greenwich), On the algebraical and numerical theory of errors of observations and the combination of observations. Cambridge 1861 in 8., — W. v. **Freeden**, Rector der Oldenburgischen Navigationsschule: Die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate für die Bedürfnisse der Anfänger bearbeitet. I. Braunschweig 1863 in 8., — Peter Andreas **Hansen** (Tondern in Schleswig 1795; Director der Sternwarte zu Gotha), Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. Leipzig 1867 in 8. (Auch Bd. 8 der Abhandl. der sächs. Ges.), — Fr. **Faà** de Bruno, Professor der Mathematik in Turin, Traité élémentaire du calcul des erreurs. Paris 1869 in 8., — **Baeyer**, Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbureau's der europäischen Gradmessung: I. Die Methode der kleinsten Quadrate. II. Die Anwendung derselben auf die Geodäsie. (Als Manuscript gedruckt). In 4., — etc."

208. Theorie der Fehler bei directen Bestimmungen. Hat man für eine Grösse B eine Anzahl n gleich zuverlässiger Bestimmungen $b_1 b_2 \ldots b_n$ der Fehler $\pm f_1 f_2 \ldots f_n$ erhalten, so dass immer $B = b \pm f$, so findet man durch Addition im Mittel

$$B = \frac{1}{n} \Sigma b + \frac{1}{n} \Sigma(\pm f) = M + \Delta B \qquad 1$$

wo M das Mittel der sämmtlichen Bestimmungen und ΔB der **Fehler des Mittels** ist. Setzt man

$$v = M - b \qquad m = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}} \qquad f = \sqrt{\frac{\Sigma f^2}{n}} \qquad 2$$

d. h. bezeichnet durch v die Abweichung einer Bestimmung vom Mittel, durch m die **mittlere Abweichung** einer solchen vom Mittel, und durch f den **mittlern Fehler** einer Bestimmung, so hat man nach 207

$$\Sigma f^2 = \Sigma v^2 + n \,.\, \Delta B^2 \qquad \text{oder} \qquad f^2 = m^2 + \Delta B^2 \qquad 3$$

und nach 1

$$\Delta B^2 = \left[\frac{\Sigma(\pm f)}{n}\right]^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2 + \ldots \pm 2 f_1 f_2 \pm \ldots}{n^2}$$

also am wahrscheinlichsten

$$\Delta B^2 = \frac{\Sigma f^2}{n^2} = \frac{f^2}{n} \qquad \text{oder} \qquad \Delta B = \frac{f}{\sqrt{n}} \qquad 4$$

und somit nach 3 und 2

$$f^2 = m^2 + \frac{f^2}{n} \qquad \text{oder} \qquad f = m\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \qquad 5$$

Für Beobachtungen von verschiedenen mittlern Fehlern f_1 und f_2 mittelt man aus, welche Anzahl $^1/p_1$ der einen ein ebenso gutes Resultat als eine Anzahl $^1/p_2$ der andern erzeuge, d. h. man setzt nach 4

$$\frac{f_1}{\sqrt{1:p_1}} = \frac{f_2}{\sqrt{1:p_2}} \qquad \text{woraus} \qquad p_1 : p_2 = f_2^2 : f_1^2 \qquad 6$$

folgt, und diese relativen Zahlen p, die sog. **Gewichte** der Beobachtungen, treten nun an die Stelle der bisdahin gleich der Einheit gesetzten Constanten, so dass nun

$$B = \frac{\Sigma pb}{\Sigma p} \pm \frac{f}{\sqrt{\Sigma p}} \quad \text{während} \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{n}} \quad \text{und} \quad f = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{n-1}} \qquad 7$$

mittlere Abweichung und mittlern Fehler in Beziehung auf die angenommene Gewichtseinheit bezeichnen. Endlich ist noch beizufügen, dass man häufig die Grösse $f' = 0{,}674486 \,.\, m$, d. h. den Fehler, von dem es eben so wahrscheinlich ist, dass er erreicht als überschritten wird, als sog. **wahrscheinlichen Fehler** einführt.

Um 4 zu erhalten, hat man sich den vorhergehenden Werth von

$$\Delta B^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2 + \ldots \pm 2 f_1 f_2 \pm 2 f_1 f_3 \pm 2 f_2 f_3 \pm \ldots}{n^2}$$

für alle möglichen Combinationen der Zeichen + und — aufzuschreiben, und aus den sämmtlichen Werthen das Mittel zu nehmen; da hiebei sich zu jeder bei den doppelten Producten ergebenden Zeichenfolge auch die entgegengesetzte finden wird, so müssen sich im Mittel offenbar alle diese doppelten Producte aufheben. — Für $p_2 = 1$ ergibt sich nach 6 sofort $p_1 . f_1^2 = f_2^2$, und wenn man also das Fehlerquadrat einer Beobachtung mit ihrem Gewichte multiplicirt, so reducirt man dadurch diese Beobachtung auf eine Beobachtung des Gewichtes 1; es ist daher $\Sigma p v^2$ die Summe der Fehlerquadrate von n Beobachtungen des Gewichtes 1, und daher stellen nach 2 und 5

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{n}} \qquad f = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{n-1}}$$

für eine solche Beobachtung mittlere Abweichung vom Mittel und mittleren Fehler vor. Das Mittel hat nun aber nach 188 das Gewicht Σp, also muss nach 6

$$\Delta B^2 : f^2 = 1 : \Sigma p \qquad \text{oder} \qquad \Delta B = \frac{f}{\sqrt{\Sigma p}}$$

sein, womit 7 erwiesen ist. — Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$ liege, ist nach 207:5, 10, 9

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-c}^{+c} e^{-h^2 v^2} . h dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ch}^{+ch} e^{-t^2} . dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} . dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} . dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_T^\infty e^{-t^2} . dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_T^\infty e^{-t^2} . dt \qquad 8$$

wo $h . v = t$, und $ch = T$ gesetzt wurde. Ist aber

$$U = e^{t^2}\int_t^\infty e^{-x^2}dx \text{ so folgt } \frac{dU}{dt} = e^{t^2}.2t.\int_t^\infty e^{-x^2}.dx - e^{t^2}.e^{-t^2} = 2t.U - 1 \quad 9$$

und somit

$$\frac{d^2U}{dt^2} = 2t.\frac{dU}{dt} + 2U, \quad \frac{d^3U}{dt^3} = 2t\frac{d^2U}{dt^2} + 2.2.\frac{dU}{dt}, \quad \frac{d^4U}{dt^4} = 2t\frac{d^3U}{dt^3} + 2.3\frac{d^2U}{dt^2}$$

also allgemein

$$\frac{d^{n+1}U}{dt^{n+1}} = 2t\frac{d^nU}{dt^n} + 2n\frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}}$$

oder

$$(n+1)U_{n+1} = 2tU_n + 2U_{n-1} \quad \text{wo} \quad U_h = \frac{d^hU}{h!\,dt^h} \quad \text{und} \quad U_0 = U \quad 10$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{(n+1)U_{n+1}}{U_n} - 2t \quad \text{oder} \quad \frac{U_n}{2tU_{n-1}} = -\frac{1:2t^2}{1-(n+1)U_{n+1}:(2tU_n)}$$

und somit nach 9 successive, wenn $1:2t^2 = q$ gesetzt wird,

$$2t.U = \cfrac{1}{1 - \cfrac{U_1}{2tU}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 - \cfrac{2U_2}{2tU_1}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 - \cfrac{3U_3}{2tU_2}}}} = \cdots$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \cdots}}}}} \quad 11$$

Wendet man diese von Laplace in solcher Weise zuerst angeführte Entwicklung auf 8 an, so erhält man

$$w = 1 - \frac{1}{T.\sqrt{\pi}.e^{T^2}} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{Q}{1 + \cfrac{2Q}{1 + \cfrac{3Q}{1 + \cdots}}}} \quad 12$$

wo $Q = 1:2T^2$, und kann somit, da für Kettenbrüche der Form $b_1:(a_1 + b_2:(a_2 + \ldots))$ die 29 : 1 analoge Recursion

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{B_{n-1}\cdot a_n + B_{n-2}\cdot b_n}{A_{n-1}\cdot a_n + A_{n-2}\cdot b_n} \quad 13$$

erhalten wird, ohne Schwierigkeit mit jeder beliebigen Genauigkeit für verschiedene Argumente T den Werth von w berechnen, so z. B. die von Encke (Berl. Jahrb. f. 1834) gegebene Tafel construiren, von der das Täfelchen

T	w	T	w	T	w
0,0	0,0000	0,7	0,6778	1,4	0,9523
0,1	1125	0,8	7241	1,5	9661
0,2	2227	0,9	7969	1,6	9763
0,3	3286	1,0	8427	1,7	9838
0,4	4284	1,1	8802	1,8	9891
0,5	5205	1,2	9103	1,9	9928
0,6	6039	1,3	9340	2,0	9953

einen kleinen Auszug enthält, und aus der z. B. durch Interpolation gefunden werden kann, dass

$$w = 1/2 \qquad \text{und} \qquad T = 0{,}476936 = \varrho$$

mit einander correspondiren, also der $w = 1/2$ entsprechende Werth von $c = T : h$

$$f' = \frac{0{,}476936}{h} = \frac{\varrho}{h} \qquad 14$$

dem im Texte eingeführten wahrscheinlichen Fehler entspricht. — Um endlich noch h zu bestimmen, hat man nach 2 und 207 : 11

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n . e^{-h^2 . n . m^2} \quad \text{oder} \quad \log W = n \log h - \frac{n}{2} \log \pi - n . m^2 . h^2$$

also

$$\frac{dW}{dh} = n . W \left(\frac{1}{h} - 2 h m^2\right)$$

Es wird also W ein Maximum, wenn

$$\frac{1}{h} - 2 h m^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \qquad 15$$

und hiefür geht 14 in

$$f' = 0{,}476936 . m \sqrt{2} = 0{,}674486 . m \qquad 16$$

über. Ist f' bestimmt und ist f'' irgend ein anderer Fehler, so ist dessen Wahrscheinlichkeit nach 8

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{f'' h} e^{-t^2} . dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{f''}{f'} \varrho} e^{-t^2} . dt \qquad 17$$

und **Encke** hat am oben angeführten Orte neben der Tafel mit dem Argumente T auch eine solche mit dem Argumente $f'' : f'$ gegeben, von welcher das Täfelchen

f'' : f'	w	f'' : f'	w	f'' : f'	w	f'' : f'	w	f'' : f'	w
0,0	0,0000	1,0	0,5000	2,0	0,8227	3,0	0,9570	4,0	0,9930
1	0538	1	5419	1	8434	1	9635	1	9943
2	1073	2	5817	2	8622	2	9691	2	9954
3	1604	3	6194	3	8792	3	9740	3	9963
4	2127	4	6550	4	8945	4	9782	4	9970
5	2641	5	6883	5	9083	5	9818	5	9976
6	3143	6	7195	6	9205	6	9848	6	9981
7	3632	7	7485	7	9314	7	9874	7	9985
8	4105	8	7753	8	9411	8	9896	8	9988
9	4562	9	8000	9	9495	9	9915	9	9991
1,0	5000	2,0	8227	3,0	9570	4,0	9930	5,0	9993

ebenfalls einen Auszug gibt. Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler innerhalb gewisser Grenzen liegt, mit dem Verhältnisse der Anzahl der zwischen diesen Grenzen liegenden Fehler zur Anzahl aller Fehler übereinstimmen muss, so ergibt sich aus demselben, dass z. B.

264 ‰ der Fehler < 0,5 f' sind, oder 264 ‰ zwischen 0,0 f' und 0,5 f'
500 . . . . . . 1,0 . . . . 236 . . . . 0,5 . . 1,0
688 . . . . . . 1,5 . . . . 188 . . . . 1,0 . . 1,5
823 . . . . . . 2,0 . . . . 135 . . . . 1,5 . . 2,0
908 . . . . . . 2,5 . . . . 85 . . . . 2,0 . . 2,5
957 . . . . . . 3,0 . . . . 49 . . . . 2,5 . . 3,0

liegen werden, etc., und in der That bestätigt sich diess durch die Erfahrung. So hat z. B. **Bessel** in seinen berühmten „Fundamentis astronomiae", auf die natürlich erst später eigentlich eingetreten werden kann, für eine Reihe von 470 Bestimmungen, welche der ausgezeichnete Beobachter James **Bradley** (Shireborn 1692 — Chalford 1762; erst Pfarrer, dann Professor der Astronomie zu Oxford, zuletzt Director der Sternwarte zu Greenwich) machte, $f' = 0'',2637$ gefunden, und somit correspondiren, wenn z die ‰ der Fehler, $z' = 0{,}470 \cdot z$ die Anzahl der bei Bradley zu vermuthenden Fehler bezeichnet,

f''	f'' : f'	w	z	z'	z''
''					
0,0	0,000	0,000	202	95	94
0,1	0,379	0,202	189	89	88
0,2	0,758	0,391	166	78	78
0,3	1,138	0,557	137	64	58
0,4	1,517	0,694	105	50	51
0,5	1,896	0,799	76	36	36
0,6	2,275	0,875	52	24	26
0,7	2,654	0,927	32	15	14
0,8	3,034	0,959	20	9	10
0,9	3,413	0,979	11	5	7
1,0	3,792	0,990	10	5	8
∞	∞	1,000			

während z'' die Anzahl der wirklich vorgekommenen Fehler angibt. Wie sich überhaupt durch die Erfahrung die aufgestellten Principien bewähren, zeigen auch die 38 besprochenen Würfelversuche auf das Eclatanteste. So z. B. wurden durch dieselben für die Erfahrungswahrscheinlichkeit einen bestimmten unpaaren Wurf zu erhalten, aus 10000 Würfen 15 Werthe gefunden, und wenn man diese als Beobachtungen b betrachtet, so erhält man unter Anwendung der frühern Bezeichnungen, jedoch nun natürlich $z' = 0{,}015 \cdot z$ setzend:

b	v	v²	f''	f'' : f'	w	z	z'	z''
0,0539	18	324	0,0000	0,000	0,000	190	3	2
487	70	4900	010	0,357	0,190	340	5	5
515	42	1764	030	1,072	0,530	322	5	5
566	— 9	81	060	2,143	0,852	132	2	3
512	45	2025	100	3,572	0,984	16	0	0
568	— 11	121	∞	∞	1,000			
618	— 61	3721						
639	— 82	6724						
599	— 42	1764						
581	26	676						
549	8	64						
508	49	2401						
612	— 55	3025						
538	19	361						
570	— 13	169						

$M = 0{,}0557 \qquad \Sigma v = +4 \qquad \Sigma v^2 = 28120$

$m = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{15}} = 0{,}0043 \qquad f' = 0{,}647 \cdot m = 0{,}0028$

$f = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{14}} = 0{,}0045 \qquad \Delta B = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{15 \cdot 14}} = 0{,}0012$

$B = 0{,}0557 \pm 0{,}0012$

anstatt

$B = {}^1/_{18} = 0{,}0556$

Ist für mehrere aus $n_1, n_2, \ldots$ Beobachtungen bestehende Reihen der mittlere Fehler einer einzelnen Bestimmung derselbe, so verhalten sich die Gewichte

der aus den einzelnen Reihen abgeleiteten Resultate nach 4 und 6

$$p_1 : p_2 = \frac{f^2}{n_2} : \frac{f^2}{n_1} = n_1 : n_2 \qquad \text{etc.} \qquad 18$$

d. h. es kann das Gewicht durch die Anzahl der Beobachtungen ersetzt werden. So wurden in Marburg unter Leitung von **Gerling** für einen gewissen Winkel mit einem Breithaupt'schen Theodoliten folgende Werthe gefunden, deren jeder als Mittel aus der neben ihm stehenden Anzahl p einzelner Beobachtungen hervorgegangen war:

b	p	p . b	v	p . v	v²	p v²
° ′ ″						
17 56 45,00	5	225,00	— 5,22	— 26,10	27,248	136,24
31,25	4	125,00	8,53	34,12	72,761	291,04
42,50	5	212,50	— 2,72	— 13,60	7,398	36,99
45,00	3	135,00	— 5,22	— 15,66	27,248	81,74
37,50	3	112,50	2,28	6,84	5,198	15,59
38,33	3	114,99	1,45	4,35	2,103	6,31
27,50	3	82,50	12,28	36,84	150,798	452,39
43,33	3	129,99	— 3,55	— 10,65	12,603	37,81
40,63	4	162,52	— 0,85	— 3,40	0,723	2,89
36,25	2	72,50	3,53	7,06	12,461	24,92
42,50	3	127,50	— 2,72	— 8,16	7,398	22,19
39,17	3	117,51	0,61	1,83	0,372	1,12
45,00	2	90,00	— 5,22	— 10,44	27,248	54,49
40,83	3	122,49	— 1,05	— 3,15	1,103	3,31

Es ergeben sich aus diesen Beobachtungen entsprechend 7 successive

$$n = 14 \qquad \Sigma p = 46 \qquad \Sigma p b = 1830{,}00 \qquad M = \frac{\Sigma p b}{\Sigma p} = 39'',78$$

$$\Sigma p v = -0{,}12 \qquad \Sigma p v^2 = 1167{,}03 \qquad f = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{n-1}} = \pm 9'',475$$

$$\Delta B = \frac{f}{\sqrt{\Sigma p}} = \pm 1'',397$$

also endlich

$$B = 17^0 56' 39'',78 \pm 1'',40$$

als bester Werth des Winkels.

209. Theorie der Fehler bei indirekten Bestimmungen. Kann eine Grösse t nicht direkt beobachtet, sondern muss sie aus beobachteten Grössen $t_1 t_2 \ldots$ durch Rechnung abgeleitet werden, und ist z. B.

$$t = a + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_n t_n \qquad 1$$

wo a $a_1 a_2 \ldots$ Constante sind, so hat man, wenn f $f_1 f_2 \ldots$ die Fehler, und p $p_1 p_2 \ldots$ die Gewichte der t $t_1 t_2 \ldots$ bezeichnen, offenbar

$$\pm f = \pm a_1 f_1 \pm a_2 f_2 \pm \ldots \text{ oder } f^2 = a_1^2 f_1^2 + a_2^2 f_2^2 + \ldots \pm 2 a_1 a_2 f_1 f_2 \pm \ldots$$

also im Mittel

$$f^2 = \Sigma a^2 f^2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{p} = \Sigma \frac{a^2}{p} \qquad 2$$

Ist aber

$$t = f(t_1, t_2, \ldots t_n) \qquad 3$$

also
$$dt = \left(\frac{dt}{dt_1}\right) dt_1 + \left(\frac{dt}{dt_2}\right) dt_2 + \ldots + \left(\frac{dt}{dt_n}\right) dt_n \qquad 4$$

und substituirt man in diese partiellen Differentialquotienten die beobachteten und berechneten Werthe, so erhält man für sie Zahlen $a_1\ a_2 \ldots$ Ersetzt man daher noch die dt, dt_1, $dt_2, \ldots$ durch f, f_1, $f_2, \ldots$, so reducirt sich der durch 3 ausgedrückte allgemeine Fall auf den vorhergehenden.

Um 2 zu erhalten, ist genau dieselbe Ueberlegung anzuwenden, welche zur Ableitung von 208 : 4 gebraucht wurde. — Ist eine Länge oder ein Winkel x aus zwei gemessenen Theilen zusammenzusetzen, und haben diese Theile die Unsicherheiten f_1 und f_2, oder die Gewichte p_1 und p_2, so hat man nach 1 und 2

$$x = a + b \qquad f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad \text{oder} \quad p = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 + p_2} \qquad 5$$

So gibt z. B. **Gerling** an, es sei für den einen Theil eines Winkels durch 25malige Repetition mit einem Theodoliten, bei welchem man den mittlern Fehler einer einfachen Messung zu $\pm 4''$ annehmen könne, $109^0\ 41'\ 4'',44$ gefunden worden, — für den andern Theil durch 30malige Repetition mit einem Theodoliten des Fehlers $\pm 9''$ aber $40^0\ 26'\ 34'',26$. In diesem Falle hat man nach 5 und 208 : 4, 6, wenn man das Gewicht einer einfachen Messung am ersten Theodoliten als Einheit nimmt,

$$f_1 = \frac{4}{\sqrt{25}} = \pm 0'',800 \qquad f_2 = \frac{9}{\sqrt{30}} = \pm 1'',643 \qquad f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \pm 1'',828$$

$$p_1 = 25 \qquad p_2 = \frac{4^2 \cdot 30}{25 \cdot 9^2} \cdot 25 = 5,92 \qquad p = \frac{25 \times 5,92}{25 + 5,92} = 4,79$$

$$x = 150^0\ 7'\ 38'',70 \pm 1'',828$$

eine Genauigkeit, welche man, nach dem Werthe von p zu schliessen, schon durch fünfmalige Messung des ganzen Winkels mit dem ersten Theodoliten mehr als erreicht hätte. — Ist eine Grösse B ein n-faches einer wiederholt mit dem mittlern Fehler f oder dem Gewichte p durch Messung oder Versuch bestimmten Grösse b, so ist ihr muthmasslicher Werth nach 1 und 2

$$B = n \cdot b \pm \Delta B \qquad \text{wo} \qquad \Delta B = n \cdot f \qquad 6$$

und dabei ist, wenn P das dieser Bestimmung zukommende Gewicht bezeichnet, nach 2

$$\frac{1}{P} = \frac{n^2}{p} \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{p}{n^2} \qquad 7$$

Ist dagegen eine Grösse B das n-fache des Gegensatzes einer wiederholt mit dem mittlern Fehler f oder Gewichte p durch Messung oder Versuch bestimmten Grösse b, so ist ihr muthmasslicher Werth nach 1—4, da $d(n:b):db = -n:b^2$ ist,

$$B = \frac{n}{b} \pm \Delta B \qquad \text{wo} \qquad \Delta B = \frac{n}{b^2} \cdot f \qquad 8$$

und dabei ist, wenn P das dieser Bestimmung zukommende Gewicht bezeichnet,

$$\frac{1}{P} = \frac{n^2}{b^4} \cdot \frac{1}{p} \qquad \text{oder} \qquad P = \frac{b^4}{n^2} \cdot p \qquad 9$$

Ein Beispiel dazu mag folgende Versuchsreihe ergeben, welche ich im Frühjahr 1850, veranlasst durch eine Notiz von Léon **Lalanne** (Paris 1811: Ingénieur-en-chef des ponts-et-chaussées) in dem von ihm mit verschiedenen Mitarbeitern herausgegebenen Werke „Un Million de faits (3. éd. Paris 1843 in 8.)", machte: Auf einer, circa einen Quadratfuss haltenden Tafel zog ich

(vergl. Bern. Mitth. 1850) eine Reihe von Parallelen im Abstande $a = 45^{mm}$, — brach aus einer Stricknadel ein Stückchen von $l = 36^{mm}$ Länge heraus, — warf Letzteres serienweise je 100 mal auf die Tafel, nach jedem Wurfe die Tafel etwas drehend, — und notirte, wie gross die Anzahl q der Fälle war, in welcher während jeder Serie die Nadel eine der Parallelen kreuzte. Ich erhielt so, wenn m die Anzahl der Fälle bezeichnet, in denen bei 50 solchen Versuchen ein gewisser Werth von q erhalten wurde:

q	m	m.q	v	m v	v^2	$m v^2$
41	1	41	9,64	9,64	92,930	92,93
42	3	126	8,64	25,92	74,650	223,95
43	2	86	7,64	15,28	58,370	116,74
45	7	315	5,64	39,48	31,810	222,67
46	2	92	4,64	9,28	21,530	43,06
47	1	47	3,64	3,64	13,250	13,25
48	3	144	2,64	7,92	6,970	20,91
49	2	98	1,64	3,28	2,690	5,38
50	3	150	0,64	1,92	0,410	1,23
51	8	408	— 0,36	— 2,88	0,130	1,04
52	3	156	— 1,36	— 4,08	1,850	5,55
53	2	106	— 2,36	— 4,72	5,570	11,14
54	1	54	— 3,36	— 3,36	11,290	11,29
55	1	55	— 4,36	— 4,36	19,010	19,01
56	2	112	— 5,36	— 10,72	28,730	57,46
57	1	57	— 6,36	— 6,36	40,450	40,45
58	1	58	— 7,36	— 7,36	54,170	54,17
59	1	59	— 8,36	— 8,36	69,890	69,89
60	2	120	— 9,36	— 18,72	87,610	175,22
61	1	61	— 10,36	— 10,36	107,330	107,33
62	2	124	— 11,36	— 22,72	129,050	258,10
63	1	63	— 12,36	— 12,36	152,770	152,77

$$\Sigma m = 50 \qquad \Sigma m q = 2532$$

$$B = \frac{2532}{50} = 50,64$$

$$\Sigma m v = 0, \quad \Sigma m v^2 = 1703,54$$

$$f = \sqrt{\frac{\Sigma m v^2}{\Sigma m - 1}} = \pm 5,90$$

$$\Delta B = \frac{f}{\sqrt{\Sigma m}} = \pm 0,83$$

also eigentlich

$$B = 50,64 \pm 0,83$$

und zwar, wenn das Gewicht jeder einzelnen Bestimmung zu 1 angenommen wird, mit dem Gewichte

$$\Sigma m = 50$$

Die Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der Nadel einen Strich zu treffen, ist also nach 6

$$w = 0,5064 \pm 0,0083$$

Bezeichnet aber φ den Winkel, welchen die Nadel bei einer ihrer Lagen mit einer Senkrechten zu den Parallelen macht, so ist, wie Rudolf **Merian** (Basel 1797; erst Kaufmann, dann Professor der Mathematik in Basel) bei Anlass meiner Versuche hervorgehoben hat, die φ entsprechende Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens

$$\frac{b}{a} = \frac{l \cdot \operatorname{Cos} \varphi}{a}$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, dass der Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ falle

$$\frac{d\varphi}{1/2\,\pi} = \frac{2 \cdot d\varphi}{\pi}$$

also (36) die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Lage ein Zusammentreffen statt habe

$$\frac{l \cdot \operatorname{Cos} \varphi}{a} \times \frac{2 \cdot d\varphi}{\pi} = \frac{2 \cdot l \cdot \operatorname{Cos} \varphi \cdot d\varphi}{a \cdot \pi}$$

daher die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens überhaupt

$$w = \int_0^{\pi/2} \frac{2.1.\operatorname{Cos}\varphi . d\varphi}{a\pi} = \frac{2.1}{a\pi}\Big[_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}\varphi\Big] = \frac{2.1}{a\pi} \quad \text{so dass} \quad \pi = \frac{2.1}{a} \cdot \frac{1}{w} \qquad \mathbf{10}$$

und daher, wenn man w durch die entsprechende Erfahrungswahrscheinlichkeit ersetzt, π gewissermassen durch solche Wurfversuche gefunden werden kann. Für obige Zahlen erhält man nach 10 und 8

$$\pi = \frac{2.1}{a} \cdot \frac{1}{w} + \frac{2.1}{a . w^2} \cdot \Delta w = \frac{2.36}{45 . 0{,}5064} \pm \frac{2.36}{45 . 0{,}5064^2} . 0{,}0083 =$$
$$= 3{,}1596 \pm 0{,}0518$$

so dass also wirklich π innerhalb der Fehlergrenze richtig bestimmt ist. — Für weitere Anwendungen vergleiche z. B. 224.

210. Die überschüssigen Gleichungen. Ist $m < n$, und hat man n Gleichungen der Form

$$a x + b y + c z + \ldots + h = 0 \qquad \mathbf{1}$$

zwischen m Unbekannten x, y, z,... und gewissen Bekannten a, b,..., von denen wenigstens einige durch Beobachtung bestimmt worden sind, so werden keine Werthe von x, y,... allen diesen Gleichungen vollkommen genügen, sondern es werden sich die Gleichungen 1 durch Substitution irgend solcher Werthe auf

$$a x + b y + c z + \ldots + h = f \qquad \mathbf{2}$$

reduciren, wo die kleinen Grössen f ein Maass für die Fehlerhaftigkeit dieser Annahmen bilden. Quadrirt und addirt man letztere Gleichungen, so erhält man

$$x^2 \Sigma a^2 + y^2 \Sigma b^2 + z^2 \Sigma c^2 + \ldots + 2 x y \Sigma a b +$$
$$+ 2 x z \Sigma a c + \ldots + 2 x \Sigma a h + 2 y \Sigma b h + \ldots = \Sigma f^2 \qquad \mathbf{3}$$

und für die besten Werthe der x y z ... werden nach dem Grundsatze der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen gelten müssen, welche Σf^2 zum Minimum machen, d. h. für welche nach den Regeln der Differentialrechnung

$$\frac{d\,\Sigma f^2}{d x} = 0 \qquad \frac{d\,\Sigma f^2}{d y} = 0 \qquad \frac{d\,\Sigma f^2}{d z} = 0 \ldots \qquad \mathbf{4}$$

werden, oder also welche aus den nach 3 und 4 gebildeten m Gleichungen

$$\begin{array}{l} x \Sigma a^2 + y \Sigma a b + z \Sigma a c + \ldots + \Sigma a h = 0 \\ x \Sigma a b + y \Sigma b^2 + z \Sigma b c + \ldots + \Sigma b h = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array} \qquad \mathbf{5}$$

berechnet werden, — Gleichungen, welche offenbar direct aus den Gleichungen 1 hervorgehen, wenn man jede derselben mit dem Factor multiplicirt, welchen x_1 oder $y_1 \ldots$ in derselben hat, und alle so erhaltenen Gleichungen, welche in Beziehung auf dieselbe Unbekannte gebildet worden sind, addirt.

Für Anwendungen der im Texte enthaltenen, und wohl keiner weitern Begründung bedürfenden Lehren, sowie der Methode der kleinsten Quadrate überhaupt, mag z. B. auf 224, 328, 342, 375, 376, 413, etc. verwiesen, und hier nur noch die historische Notiz beigefügt werden, dass sich schon lange vor Gauss und Legendre, der vortreffliche Tobias **Mayer** in seiner „Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe (Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748. Nürnberg 1750 in 4.)" die Frage stellte, wie Unbekannte zu bestimmen seien, wenn die Anzahl der Gleichungen ihre Anzahl übertreffe, und schon damals auf ganz rationelle Weise aus den ihm vorliegenden 27 Gleichungen die zur Berechnung der drei Unbekannten nöthigen drei Normalgleichungen bildete. Vergl. 394.

XXI. Die Messungen mit Kette, Kreuzscheibe und Messtisch.

211. Die practische Geometrie. Die sog. practische Geometrie (Topographie, Feldmessen), aus der sich wahrscheinlich in alten Zeiten die reine Geometrie erst herausbildete, hat den speciellen Zweck, mit Hülfe einzelner Längen- und Winkel-Messungen, und daran gelehnter Constructionen oder Rechnungen eine Reihe von Puncten auf dem Felde ihrer gegenseitigen Lage nach zu bestimmen, und so Anhaltspuncte, sei es für die Verzeichnung oder Berechnung einzelner Grundstücke, sei es für Entwerfung eigentlicher Karten zu erhalten. Während die grössern, sog. **geodätischen** Operationen dieser Art, bei denen die Gestalt und Grösse der Erde theils bestimmt, theils wenigstens in Betracht gezogen werden soll, und ebenso die sog. **chorographischen** Regeln zur Entwerfung von Kartennetzen, am Besten erst in Verbindung mit der Astronomie behandelt werden (siehe XL und XLI), so schliessen sich dagegen die einfachern Mess-Operationen ganz schicklich als ein Uebungsfeld an die Geometrie an.

Für praktische Geometrie sind namentlich folgende Werke zu vergleichen: „**Hutton**, A Treatise on Mensuration both in Theory and Practice. London 1771 in 4. (2. ed. 1788 in 8.), — Joh. Tobias **Mayer** (Göttingen 1752 — Göttingen 1832; Sohn des Astronomen Tobias Mayer; Professor der Mathematik und Physik zu Altdorf, Erlangen und Göttingen), Praktische Geometrie. Göttingen 1778—1783, 3 Bde. in 8. (4. Aufl. in 5 Bänden 1814—1818), — Louis **Puissant** (La Ferme de la Gastellerie im Dép. Seine-et-Marne 1769 — Paris 1843; Professor der Geodäsie zu Paris und Mitglied der Academie), Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement. Paris 1807 in 4. (2 éd. 1820), — **Lacroix**, Manuel d'arpentage. Paris 1825 in 16. (5 éd. 1834; deutsch von Unger, Gotha 1827 in 8.; ital., Milano 1831 in 16. und später), — Antonio Maria **Bordoni** (Pavia 1789 — Pavia 1860; Professor der Mathematik, Geodäsie und Hydrometrie zu Pavia), Trattato di geodesia elementare. Milano 1825 in 8. (2 ed. Pavia 1843), — **Crelle**, Handbuch des Feldmessens und Nivellirens. Berlin 1826 in 8., — Hermann **Umpfenbach** (Mainz 1798 —

Giessen 1863; Professor der Mathematik zu Giessen), Praktische Geometrie. Frankfurt 1834—1835, 2 Bde. in 8., — Friedrich Wilhelm **Barfuss** (Apolda 1809; Lehrer der Mathematik in Weimar), Handbuch der höhern und niedern Messkunde. Weimar 1842 in 8. (3. A. 1854), — William **Simms** (Birmingham 1793 — Carlshalton 1860; Mechaniker in London), On the principal mathematical Instruments (6. ed. London 1844 in 8.), — C. F. **Schneitler**, Die Instrumente und Werkzeuge der höhern und niedern Messkunst Leipzig 1848 in 8. (2. A. 1852), und: Lehrbuch der gesammten Messkunst. Leipzig 1851 in 8. (2. A. 1854), — J. **Lemoch**, Lehrbuch der praktischen Geometrie. Wien 1849, 2 Bde. in 8., — Karl **Engelbreit**, Die Instrumente der Geodäsie. Nürnberg 1852 in 8. mit Atlas in fol., — Friedrich **Hartner**, Professor der praktischen Geometrie in Gratz und Wien: Handbuch der niedern Geodäsie mit einem Anhange über die Elemente der Markscheidekunst. Wien 1852 in 8. (2. A. 1856), — K. M. **Bauernfeind**, Professor der Ingenieurwissenschaften zu München: Elemente der Vermessungskunde. München 1856—1858, 2 Bde. in 8. (3. A. 1869), — Samuel **Alsop**, A Treatise on Surveying. Philadelphia 1857 in 8., — Fr. **Baur**, Lehrbuch der niedern Geodäsie. Wien 1858 in 8., — Georg Christian Conrad **Hunäus** (Goslar 1802; Professor der praktischen Geometrie zu Hannover), Die geometrischen Instrumente der gesammten praktischen Geometrie. Hannover 1864 in 8., — P. **Breton** de Champ, Traité du levé des plans et de l'arpentage. Paris 1865 in 8., — Jakob **Rebstein**, Professor der Mathematik zu Frauenfeld: Lehrbuch der praktischen Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Theodolitenmessungen. Frauenfeld 1868 in 8., — etc."

212. Die Setzwaage und die Libelle. Da man sich sämmtliche zu bestimmende Puncte auf eine horizontale Ebene (oder bei grösserer Ausdehnung auf eine mit der Erde concentrische Kugelfläche) projicirt denkt, und einerseits diese Projectionen, anderseits die Längen der Proijcirenden (die Höhen) bestimmen soll, so bedarf man vor Allem ein Mittel, eine horizontale Ebene zu erkennen oder herzustellen. Hiezu kann die sog. **Setzwaage** dienen, d. h. ein gleichschenkliges Dreieck, in dessen Scheitel ein sog. **Loth** aufgehängt ist; denn, wenn das Loth über der Mitte der Basis einspielt, so ist letztere horizontal, und wenn somit die Setzwaage auf eine Gerade oder nach zwei zu einander senkrechten Richtungen auf eine Ebene gestellt, und Gerade oder Ebene so lange verändert werden, bis das Loth einspielt, so sind auch sie horizontal. Genauer aber ist die sog. **Libelle**, welche aus einer cylindrischen, im Innern nach oben kreisförmig ausgeschliffenen, mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit (Aether) bis auf eine Luftblase gefüllten Röhre besteht, und gewöhnlich in messingener Fassung über einem Lineale aufgehängt ist. Die Mitte der Luftblase nimmt beständig den höchsten Punct ein, und wenn man die Libelle in zwei Lagen auf eine um n geneigte Gerade aufsetzt, und je an der vom einen Ende auslaufenden Theilung den Stand der beiden Blasenenden abliest, so hat man

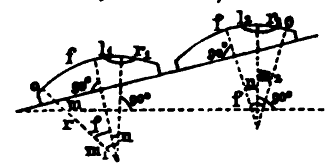
$$n = m_1 - f = \frac{l_1 + r_1}{2} \cdot v - f, \quad n = f - m_2 = f - \frac{l_2 + r_2}{2} \cdot v \quad 1$$

wo v den Winkelwerth eines Theilstriches bezeichnet, und hieraus

$$n = \frac{l_1 + r_1 - l_2 - r_2}{4} \cdot v \qquad f = \frac{l_1 + r_1 + l_2 + r_2}{4} \cdot v \quad 2$$

Um v zu bestimmen, befestigt man die Libelle auf ein um eine Axe drehbares Fernrohr, bringt nach und nach durch Drehen dasselbe Blasenende mit zwei Theilstrichen zum Einspielen, und liest entweder an einem an der Axe befindlichen Theilkreise, oder an einer in bekannter Distanz aufgestellten Messlatte je die Stellung des Fernrohrs ab (vergl. 221.) Bezeichnet ferner d den v entsprechenden Bogen und r den Radius der Krümmung, so ist (129) $r \cdot v \cdot \mathrm{Sin}\, 1'' = d$, und wenn daher z. B. für $v = 1''$, $d = 1^{mm}$ werden soll, so muss $r = 206^m$ sein. Bei der Libelle ist endlich wohl zu beachten, dass jede ungleichmässige Erwärmung störend wirkt, da die Blase immer gegen das wärmere Ende hinstrebt.

Setzwaage und Loth sind wahrscheinlich sehr alt, — Letzteres kömmt wenigstens schon in dem Almagest des **Ptolemäus** (V 12) vor. Die Röhrenlibelle wurde dagegen, wie ich 1857 (vergl. Viertelj. der Zürch. nat. Ges. II 306—309) nachwies, zuerst 1666 in einer kleinen Schrift „Machine nouvelle pour la conduite des eaux, pour les bâtimens, pour la navigation et pour la plupart des autres arts. Paris in 8.“ beschrieben, und ist wahrscheinlich eine Erfindung des Pariser-Mechanikers **Chapotot**, von dessen Lebensumständen man jedoch leider nichts weiss.



Ihr Name ist von Libella (kleine Waage) abgeleitet; die Franzosen heissen sie Niveau d'air zum Unterschiede von dem weit ältern Niveau d'eau (der 268 erwähnten Kanalwaage) der Feldmesser. — Die im Texte erwähnte Störung durch Wärme scheint Anne-Jean-Pascal-Chrysostome **Duc-la Chapelle** (Montauban 1765 — Montauban 1814; reicher Privatastronom zu Montauban) zuerst bemerkt und 1802 in der Connaiss. des temps beschrieben zu haben. — Die ältesten Libellen waren mit Weingeist gefüllt, enthielten wirklich eine Luftblase, wurden nicht ausgeschliffen, und an den Enden zugeschmolzen; in neuerer Zeit sind nur noch die gemeinen Libellen so beschaffen, — die feinern sind im Innern möglichst gerade ausgeschliffen, werden nahe zu mit Aether gefüllt, und vor dem Schliessen durch Erwärmen luftleer gemacht. Schluss durch Zuschmelzen ist sicherer als der durch eingeschliffene Glasstöpsel, — dagegen ist bei ihm allerdings eher ein Zerspringen in grosser Wärme zu befürchten. — Wird die Libelle in eine Fassung eingespannt, so ist die Bestimmung von v zu wiederholen, da eine kleine Aenderung im Drucke eine ganz merkliche Formänderung veranlasst. — Für die sog. Axenlibelle vergl. 329. — Für das Nivelliren von Ebenen wird der Röhrenlibelle oft eine, nur ein einmaliges Aufsetzen erfordernde sog. **Dosenlibelle** substituirt, — ein cylindrisches, mit einer gläsernen Kugelschaale von grossem Radius gedecktes, und bis auf eine kleine Luftblase (deren Stand beim

obersten Punct des Deckels die Horizontalität anzeigen und beim Drehen um eine verticale Axe nicht variren soll) mit Weingeist gefülltes Gefäss.

213. Die Längenmessung. Zum Messen der Distanzen benutzt man gewöhnlich eine Messkette oder Messschnur von 50′ oder auch von 10^m Länge; da sich jedoch bei derselben die durch ungleichmässiges Anstrecken, ungenaues Einrichten, Unebenheiten des Terrains, etc., ergebenden Fehler sämmtlich summiren, so substituirt man ihr bei Messungen, deren Genauigkeit über $^1/_{1000}$ betragen soll, Systeme von auf Stativen liegenden, mit Libelle und (s. 301) Thermometer versehenen Massstäben, deren Zwischenräume mit Keil oder Fühlhebel bestimmt werden. — Da für ein grosses α sehr nahe $(1 + 1 : \alpha)^n = 1 + n : \alpha$, so darf man annehmen, dass die Genauigkeit $1 : \alpha$ einer linearen Messung für Flächen 2, für Volumen 3 mal geringer werde. — Betrachtet man die freihängende Kette l als Kreisbogen des Radius r und des Winkels 2α, so stellt die Sehne x die wahre Distanz, und der Pfeil d die Senkung der Kette dar, und man hat (129 : 2, 4, 10 und 100 : 4) nahe für $l = 50'$

$$x = 2\,r\,(\mathrm{Arc}\,\alpha - \frac{\mathrm{Arc}^3\,\alpha}{6}) = l - \frac{8\,d^2}{3\,.\,l} = 50' - 0{,}0533\,.\,d^2 \qquad 1$$

Um den Werth b einer, in der Höhe h über dem Meere, gemessenen Basis B im Niveau des Meeres zu finden, hat man, wenn r den Erdradius bezeichnet,

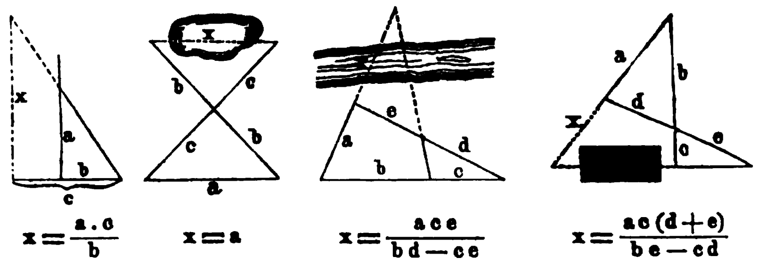
$$\frac{b}{B} = \frac{r}{r+h} \quad \text{oder} \quad b = B - \frac{B\,h}{r}\left(1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \ldots\right) \qquad 2$$

Die zur Aufzeichnung anzuwendende Verjüngung des Maassstabes hängt von dem Zwecke ab. Nimmt man $^1/_{10}{}^{mm}$ als letzte sichtbare Grösse an, so ist z. B. die Verjüngung $^1/_{10000}$ zu wählen, wenn noch 1^m sichtbar sein soll. Die eidgenössische Karte hat $^1/_{100000}$, die Keller'sche Reisekarte $^1/_{480000}$. — Mit blosser Längenmessung kann man mit Hülfe einiger Stäbe auf dem Felde nach 93 eine Senkrechte errichten, nach 89 oder 116 eine Parallele construiren, nach 84 oder 111 einen Winkel halbiren, nach 89 eine Höhe messen, nach 105 oder 117 die Flächen von Figuren bestimmen, nach 89 die unmessbare Distanz zweier zugänglicher Puncte verlegen, nach 109 die Distanz eines unzugänglichen Punctes bestimmen und eine Gerade über ein Hinderniss weg verlängern, etc.

Die Längenmessapparate sind namentlich zu Gunsten der sog. Gradmessungen (vergl. 369—374) fortwährend vervollkommnet worden: So tauchen allerdings schon bei der um das Jahr 827 bei Bagdad vorgenommenen Gradmessung Stäbe zum Längenmessen auf; aber während damals, ja noch 1669 bei der von Jean **Picard** (La Flèche in Anjou 1620 — Paris 1682; Priester und Mitglied der Pariser-Academie) ausgeführten Messung die Stäbe noch

hölzerne waren, so zog schon im Anfange des 18. Jahrhunderts Jaques **Cassini** eiserne Stäbe vor, da er leichter fand, die Temperatur als die Feuchtigkeit in Rechnung zu ziehen. Während aber Cassini noch glaubte, die kleinen Undulationen, welche auch das ebenste Terrain hat, vernachlässigen zu dürfen, so legten 1736 **Bouguer** und Charles-Marie de **La Condamine** (Paris 1701 — Paris 1774; Mitglied der Pariser-Academie) in richtiger Ueberlegung, dass ein Zeitaufwand von 26 Tagen durch das bessere Resultat hinlänglich gerechtfertigt sei, in Peru jeden einzelnen Stab sorgfältig horizontal, — ja am Ende des 18. und zu Anfang des 19. Jahrhunderts gingen aus den Werkstätten, denen Jesse **Ramsden** (Halifax 1735 — Brighthelmstone 1800; Schüler von Dollond; Mechanikus und Optikus in London), Etienne **Lenoir** (Mer bei Blois 1744 — Paris 1832; Mechaniker in Paris), Georg von **Reichenbach** (Durlach 1772 — München 1826; Artillerie-Officier und einer der Chef's der mathematisch-optischen Institute in München und Benedictbeuern), etc. vorstanden, eigentliche Basisapparate hervor: Diese Letztern, mögen die Stäbe aus Eisen, oder Platin, Glas, etc. bestehen, haben das gemein, dass die Stäbe auf Stative zu liegen kommen, welche in horizontalem und verticalem Sinne die nöthigen Verschiebungen erlauben, um aligniren und nivelliren zu können. Die Temperatur wird entweder, wie z. B. bei dem 1834 von Joh. Caspar **Horner** (Zürich 1774 — Zürich 1834; Astronom auf der Weltreise Krusensterns, dann Professor der Mathematik in Zürich; vergl. Bd. 2 meiner Biographieen) und Joh. Georg **Oeri** (Zürich 1780 — Zürich 1852; Schüler von Fortin; Mechaniker in Zürich) mit Benutzung von „Heinrich Christian **Schumacher** (Bramstedt 1780 — Altona 1850; Director der Sternwarten zu Mannheim und Altona), Schreiben an Olbers über den Apparat zur Messung der Basis bei Braack. Altona 1821 in 4.", und der von dem Verfertiger des Apparates, Joh. Georg **Repsold** (Wremen in Hannover 1771 — Hamburg 1830; Mechaniker und Spritzenmeister in Hamburg), direct an Horner überschriebenen Notizen, für die Schweiz construirten Apparate, unmittelbar an eingelegten Thermometern abgelesen, — oder, wie z. B. bei dem 1792 von Jean-Charles **Borda** (Dax im Dép. Landes 1733 — Paris 1799; Divisionschef im Marine-Ministerium und Mitglied der Academie in Paris; vergl. Notice historique von Lefevre in Mém. de l'Inst. Sc. math. IV) und **Lenoir** für Frankreich Angefertigten, aus der mikroskopisch abgelesenen Bewegung berechnet, welche das freie Ende eines Metallstabes (Kupfer von 0,00001717 Ausdehnung für 1° C.) macht, dessen anderes Ende auf dem eigentlichen Maassstabe (Platin von 0,00000884 Ausd.) festgeschraubt ist. Bei beiden Apparaten wurden zur Verhütung von Verschiebungen zwei auf einander folgende Stäbe nicht genau zur Berührung gebracht, und dann die Zwischenräume gemessen, — bei Ersterm durch Einsenken eines Stahlkeiles, bei Letzterm durch Verschieben einer Zunge; doch dürfte der 1816 von **Hassler** bei der amerikanischen Küstenvermessung zuerst angewandte optische Contact, der überdiess erlaubt, mit Einem Stabe zu operiren, noch vorzüglicher sein: War nämlich der Stab, dessen Enden mit Spinnefaden markirt waren, und der auf seinem Stative auch in der Längenrichtung verschoben werden konnte, zum ersten Male gelegt, so wurde über sein Ende ein, auf eigenem Stative am Boden ruhendes und nach allen Richtungen verschiebbares Mikroskop so aufgestellt, dass sein festes Fadenkreuz damit coincidirte; dann wurde der Stab neu gelegt, so dass sein Anfang in dasselbe Kreuz fiel, — nun das Mikroskop wieder über das Ende versetzt, — u. s. w.; bei Anwendung von zwei

Mikroskopen gewährt dieses, neuerdings von Ignazio **Porro** (Pignerol 1795; Ingenieur, meist in Paris lebend) portirte Princip, eine schöne Controle. — Ueber die am Ende des Textes erwähnten Constructionen ist höchstens beizufügen, dass, wenn man die beiden Kettenstäbe in einer Distanz von 20' einsteckt, und die Kette am Ende des 21. Gliedes anzieht, nach 93 nothwendig ein rechter Winkel entsteht, — dass die beiden Parallelconstructionen in den Noten zu 89 und 116 bereits ausgeführt sind, — und dass auch die übrigen



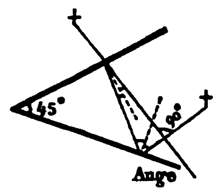
$$x = \frac{a \cdot c}{b} \qquad x = a \qquad x = \frac{a\,c\,e}{b\,d - c\,e} \qquad x = \frac{a\,c\,(d+e)}{b\,e - c\,d}$$

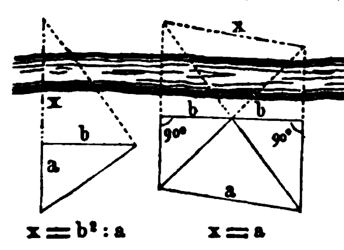
Constructionen, von denen übrigens Einige durch die beistehenden Figuren angedeutet werden, sich in sehr einfacher Weise aus den citirten Sätzen ergeben.

214. Kreuzscheibe und Winkelspiegel. Ist man mit zwei zu einander senkrechten Diopterlinealen, einer sog. **Kreuzscheibe**, oder zwei unter 45⁰ gegen einander geneigten Spiegeln (284), einem sog. **Winkelspiegel** versehen, so lassen sich Senkrechte so leicht errichten, und (durch probiren) fällen, dass die meisten der in 213 gelösten Aufgaben noch einfachere und genauere Lösungen zulassen, so z. B. nach 93 die Bestimmung der Distanz eines unzugänglichen Punctes. Soll die Distanz **zweier** unzugänglicher Puncte bestimmt werden, so fälle man von ihnen Senkrechte auf eine Hülfsgerade, und suche auf jeder derselben den Punct auf, von dem je der andere unzugängliche Punct über die Mitte zwischen ihren Fusspuncten gesehen wird; die Distanz der so gefundenen zwei Puncte ist die Gesuchte und sogar zu ihr parallel. Ferner kann man nach 124 leicht Puncte einer Kreislinie von gegebenem Durchmesser auffinden — einzelne Puncte oder eine krumme Linie nach 77 durch Coordinaten aufnehmen, etc.

Der Gebrauch der Absehen oder **Diopter**, um Richtungen zu nehmen, kömmt schon in den ältesten Zeiten vor, und schon damals scheint der dem Auge zugewandte oder sog. **Oculardiopter** meist aus einem Blättchen mit einer kreisrunden Oeffnung oder einer Spalte bestanden zu haben, — der dem Gegenstande zugewandte oder **Objectivdiopter** aus einem Rähmchen mit Fadenkreuz. Auch die Kreuzscheibe oder das Winkelkreuz (Diopterkreuz, Equerre d'arpenteur), scheint ziemlich alt zu sein, da nicht nur schon Nicolas **Bion** (1658? — Paris 1733; Landkarten- und Globen-Händler in Paris) in seinem verdienstlichen „Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématique. Paris 1713 in 8. (Auch 1716 und später; deutsch von Doppelmayr unter dem Titel: Mathematische Werkschule.

Nürnberg 1741 und später in 4.; engl. von E. Stone, London 1758 in fol.)" dieses Instrumentchen abbildet und beschreibt, sondern sogar schon Johannes **Ardüser** (Lenz 1584 — Zürich 1665; Ingenieur in Zürich; vergl. Bd. 4 meiner Biographieen) in seinem Werke „Geometriæ theoricæ et practicæ. XII Bücher. Zürich 1627 in 4. (2. A. in 14 Büchern 1646)" dasselbe kennt und zu benutzen lehrt. Es ist leicht zu verificiren, indem man mittelst desselben vier angeblich rechte Winkel an einander legt, und nun nachsieht, ob der letzte Schenkel mit dem ersten coincidirt, — eine Verificationsmethode, welche sich ohne weiteres auch auf den Winkelspiegel überträgt, ein sehr bequemes Tascheninstrumentchen, dessen Theorie aus beistehender Figur hervorgeht, und das von dem Aeltern der beiden Optiker George **Adams** in London (Vater 17..—1786; Sohn 1750—1795) erfunden, von dem Jüngern in seinem „Geometrical and graphical Essays, containing a general description of mathematical Instruments. London 1791 in 8. (Deutsch von Geissler, Leipzig 1795)" beschrieben wurde. Statt seiner wird auch oft ein von **Bauernfeind** erfundenes Instrumentchen, für welches aber hier auf dessen Schrift „Das **Prismenkreuz**, ein neues einfaches Messinstrument. München 1851 in 8." verwiesen werden muss, benutzt, mit dem man sich überdiess in eine Gerade einvisiren kann. — Von den im Texte erwähnten Constructionen dürften zwei durch die beistehenden Figuren hinlänglich erläutert werden, — die übrigen nicht einmal dieses Hülfsmittels bedürfen. — Für einige andere Spiegelinstrumente können die Schriften „Georg **Winkler** (Gross-Wiesendorf 1776 — ?; Professor der Forstmathematik zu Bruckersdorf und Mariabrunn bei Wien), Beschreibung eines verbesserten Spiegel-Lineales. Wien 1809 in 8., — Elard **Romershausen** (Niederurff in Unterhessen 1784 — Marburg 1857; erst Pfarrer zu Acken, dann Privatmann), Der Spiegeldiopter. Zerbst 1818 in 8. (2. A. Halle 1845), — etc.", verglichen werden.





215. Der Messtisch. Eine Tafel, welche mit Hülfe einer gewöhnlichen Libelle oder einer hiefür hinlänglich genauen Dosenlibelle horizontal gestellt werden kann, und so aufgestellt ist, dass jeder Punct und jede Gerade auf derselben mittelst der sog. **Einlothzange** und einem ein Fernrohr tragenden sog. **Diopterlineal** vertical über einen Punct und parallell zu einer Geraden auf dem Felde gebracht werden können, kann als sog. **Mensel** oder **Messtisch** dazu dienen, einen Punct in richtiger Lage gegen zwei ihrer Distanz nach gegebene Puncte zu verzeichnen. Zuerst wird der Messtisch über dem einen Endpuncte der auf ihm verzeichneten gemessenen Distanz, der sog. **Standlinie** oder **Basis**, aufgestellt und nivellirt, — dann, wo nöthig, das Diopterlineal so corrigirt, dass das Fadenkreuz seines Fernrohrs beim Drehen des Letztern um seine Axe einem Lothfaden folgt, oder von einem Objecte auf

dessen Spiegelbild in einem künstlichen Horizonte geführt werden kann, — nunmehr das Diopterlineal an die verzeichnete Basis angelegt, und die Tischplatte gedreht, bis der andere Endpunct im Fadenkreuze erscheint, — und schliesslich eine Visirlinie nach dem zu bestimmenden Puncte gezogen; nachher wird entweder bei dem sog. **Polygonisiren** die Visirlinie gemessen und aufgetragen, — oder bei dem sog. **Vorwärtsabschneiden** der Messtisch über dem zweiten Endpuncte der Basis eingestellt, und wieder eine Visirlinie gezogen, — oder endlich bei dem sog. **Rückwärtsabschneiden** der Messtisch über dem gesuchten Puncte mit Hülfe der ersten Visur annähernd eingestellt, und dann eine Visirlinie durch den zweiten Endpunct der Basis gezogen.

Gewöhnlich wird nach dem Zeugnisse, das Daniel **Schwenter** (Nürnberg 1585 — Altdorf 1636; erst Professor der orientalischen Sprachen, dann der Mathematik zu Altdorf), der Verfasser der seiner Zeit berühmten „Deliciæ physico-mathematicæ oder mathematische und philosophische Erquickstunden. Nürnberg 1636 in 4. (2. A., von Harsdörffer fortgesetzt, 1651—1653, 3 Theile)", in seiner „Beschreibung des geometrischen Tischleins, welches Joh. Prätorius erfunden. Nürnberg 1619 in 4. (nachmals als dritter Tractat in dessen Geometriæ practicæ novæ et auctæ tractatus I—IV, Nürnberg 1627 in 4., aufgenommen)" ablegt, — angenommen, es habe dessen Lehrer, Johannes **Prätorius** (Joachimsthal 1537 — Altdorf 1616; erst Mechanikus in Nürnberg, dann folgeweise Professor der Mathematik in Wittenberg und Altorf) etwa um 1611 den Messtisch, der daher auch wohl „mensula prætoriana" genannt wurde, erfunden. Immerhin darf nicht vergessen werden, dass auch **Ardüser** in dem 214 erwähnten Werke, und wohl unabhängig von Prätorius, dieselben Operationen auf einem mit Papier überzogenen, auf einem Stuhl „nach dem Horisont" gelegten Brette lehrt, — ja das von dem noch frühern Leonhard **Zubler** (Zürich 1563 — Zürich 1609; Mechaniker und Rathsherr in Zürich) in seinem Schriftchen „Fabrica et usus instrumenti chorographici. Germanice descripta a Leonh. Zublero et latio donata a Casp. Wasero. Basileæ 1607 in 4. (Auch deutsch 1607 und 1625)" beschriebene, ihm durch Philipp **Eberhard** (Zürich 1563 — Zürich 1627; Steinmetz in Zürich) wenigstens seiner ersten Idee nach bekannt gewordene Werkzeug eigentlich nichts anderes als ein eben solcher roher Messtisch ist. — Von Manchen wurde früher das von dem Ingenieur J. W. **Zollmann** in seiner „Anleitung zur Geodäsie oder praktischen Geometrie. Halle 1744 in fol. (Auch 1774)" beschriebene und, obwohl viel ältere, doch meist auch nach ihm benannte **Scheibeninstrument** (das eine runde mit Papier zu bespannende Scheibe und ein um ihren Mittelpunct drehbares Diopterlineal hatte, dessen, den einzelnen Visuren entsprechende Durchschnitte für jeden Standpunct auf einen bestimmten der zum voraus gezogenen concentrischen Kreise notirt wurden) dem Messtische aus den ähnlichen Gründen vorgezogen, welche jetzt, mit allerdings etwas mehr Recht, für den Theodoliten gegenüber dem Messtische geltend gemacht werden.

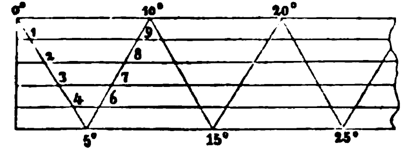
216. Das Princip der Multiplication. Der Messtisch kann nicht nur zum Verzeichnen, sondern auch zum genauen Messen eines Win-

kels a dienen. Stellt man ihn nämlich über dem Scheitel des zu messenden Winkels auf, — visirt nach dem einen Winkelpuncte und dann nach dem andern, — stellt nun durch Drehen des Tisches den Diopterlineal wieder auf den ersten Punct zurück, und visirt nochmals auf den zweiten, etc., bis nach n Operationen die letzte Visur einen Winkel von etwas mehr als b Umdrehungen mit der ersten bildet, so hat man, wenn c die Distanz der dem Radius r entsprechenden Puncte dieser Visirlinien ist,

$$n \,.\, a = b \,.\, 360^0 + \text{Arcus Chordæ}\ \frac{c}{r}$$

woraus sich a bei Vermeidung constanter Fehler um so genauer finden lässt, je grösser n ist.

Die Einführung des Principes der Multiplication verdankt man dem ältern Tobias **Mayer**, vergl. dessen Abhandlung „Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et novum instrumentum goniometricum (Comment. Gotting. II 1752)". — Arcus chordæ (c : r) lässt sich einer Sehnentafel (VI), oder einem mit ihrer Hülfe construirten sog. **geradlinigen Transporteur** entnehmen, von dem beistehende Figur, in der zum Auftrage der Sehnen von 5⁰, 10⁰, 15⁰,... ein Decimeter für r = Chorde 60⁰ angenommen wurde, einen Begriff gibt, und dessen Gebrauch dem des allbekannten verjüngten Maassstabes analog ist.



217. Die Pothenot'sche Aufgabe. Die von Snellius zuerst behandelte, später nach Pothenot benannte Aufgabe, die Lage eines Stand punctes D (s. Fig. 1) gegen 3 bekannte Puncte A, B, C zu bestimmen, kann mit dem Messtische auf folgende Weise gelöst werden: Man stellt denselben (am leichtesten mit einer Orientirboussole) so über D auf, dass die verzeichneten Geraden AB und BC den entsprechenden Geraden auf dem Felde möglichst parallel sind, und zieht nun durch die Puncte auf dem Tische und Felde Visirlinien, welche ein sog. **Fehlerdreieck** $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ bestimmen mögen; dann dreht man den Tisch ein wenig (wo möglich über die parallele Lage hinaus) und construirt ein zweites Fehlerdreieck $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$; die Verbindungslinien $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\gamma_1\,\gamma_2$ (eigentlich nach 124 die Kreislinien $\alpha_1\,\alpha_2$ B C, $\beta_1\,\beta_2$ A C, $\gamma_1\,\gamma_2$ A B) schneiden sich in dem gesuchten Puncte. — Kennt man (s. Fig. 2) a, b und den in das Viereck A B C D fallenden Winkel α, und hat β und γ gemessen, so kann man (98 : 4; 103) aus

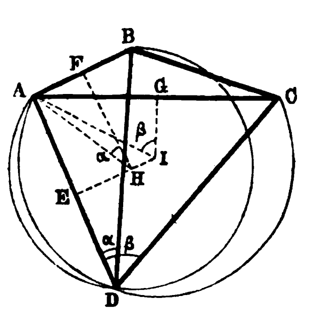
$$\text{Tg}\,\frac{\varphi-\psi}{2} = \text{Tg}\,(x-45^0)\ \text{Tg}\,\frac{\varphi+\psi}{2} \quad \text{wo Tg}\,x = \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Sin}\,\psi} = \frac{b\,\text{Sin}\,\beta}{a\,\text{Sin}\,\gamma} \qquad 1$$

und

$$\varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad 2$$

φ und ψ, und dann (103) r, s, t berechnen. — Für annähernde Bestimmungen (z. B. um den Standpunct beim Lothen gegen bekannte Puncte am Ufer festzulegen) kann man nach Horner's Vorschlage β und γ auf Strohpapier auftragen, und D durch Versuch ermitteln, — oder auch, wenn man (s. Fig. 2) A B und ihre Orientirung ($\delta + \varphi$) kennt, die auf D an der Boussole (314) für A D und B D gemachten Ablesungen δ und ε bei A und B antragen.

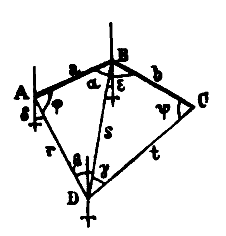
Willebrord **Snellius** löste die im Texte behandelte Aufgabe in seinem „Eratosthenes batavus, de terræ ambitus vera quantitate. Lugd. Batav. 1617 in 4." durch Rechnung in der theils durch die beistehende Figur, theils durch das Schema

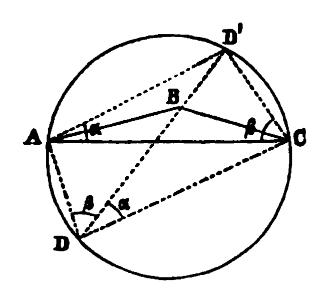


Dreieck	Gegeben
AFH	$AF = \frac{1}{2}c$, α, 90°
AGI	$AG = \frac{1}{2}b$, β, 90°
AHI	$AH, AI, \angle HAI = HAF - IAF$
AEH	$AH, \angle AHE = 180^\circ - AHI, 90^\circ$
ACD	$b, \beta, \angle CAD = IAG + 90^\circ - AIH$
ABD	$c, \alpha, \angle BAD = A + \angle CAD$

Dreieck	Gesucht
AFH	$AH, \angle HAF$
AGI	$AI, \angle IAG = \angle IAF - A$
AHI	$HI, \angle AHI, \angle AIH$
AEH	AE, $2 . AE =$ **AD**
ACD	**CD**
ABD	**BD**

angedeuteten Weise. Später gab Laurent **Pothenot** (16.. — Paris 1732; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris) in einer 1692 vorgelegten Abhandlung: „Problème de géométrie pratique: Trouver la position d'un lieu que l'on ne peut voir des principaux points d'où l'on observe (Anc. Mém. Par. X)" eine Lösung derselben Aufgabe, welche nun seinen Namen erhielt. — Die im Texte gegebene constructive Lösung mittelst Fehlerdreieckes setzt, da diese klein werden sollen, eine unter dem Tische in Coulissen laufende, etwas drehbare, bei jeder Aufnahme irgend einmal, wenn der Tisch eben orientirt ist, auf Null gestellte und dann festgeklemmte Boussole, eine sog. **Orientirboussole**, voraus. Es ist diese Methode besonders durch Joh. Georg **Lehmann** (Johannismühle bei Baruth 1765 — Dresden 1811; Director der Plankammer in Dresden), vergl. den zweiten Band seiner „Lehre vom Situationszeichnen. Dresden 1812, 2 Bde. in 8. mit Atlas in fol. (5. A. 1843)", behandelt worden. — sodann von Friedrich August Wilhelm **Netto** (Leipzig 1783 — ?; Lehrer der militärischen Messkunst in Dresden und Berlin), vergl. sein „Lehrbuch der gesammten Vermessungskunde. Berlin 1820—1825, 2 Bde. in 8.", — etc. — Eine andere constructive Lösung, welche (vergl. A. N. 430) **Bessel** und **Kulenkamp** gaben, besteht darin, dass man auf dem gesuchten Standpuncte D den Messtisch einmal so dreht, dass das an A C gelegte Diopterlineal über C hinaus den Punct C auf dem Felde zeigt, und sodann eine





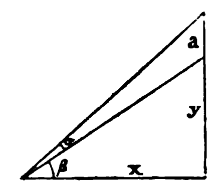
Visur AD' nach B sieht, — nachher so, dass das wieder an AC gelegte Diopterlineal über A hinaus den Punct A auf dem Felde zeigt, und wieder eine Visur CD' nach B sieht; legt man sodann durch D', A und C eine Kreislinie, und verlängert D'B bis an dieselbe, so stellt der erhaltene Punct D vor, da die beiden α und ebenso die beiden β der Figur als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleich sind. — Für Ableitung der im Texte gegebenen Formeln zur Lösung durch Rechnung dürften die daselbst befindlichen Citationen genügen, — zum Näherungsverfahren von **Horner** ist höchstens beizufügen, dass schon Georg Friedrich **Brander** (Regensburg 1713 — Augsburg 1783; Mechaniker in Augsburg) in seiner „Beschreibung eines Universal-Messtisches. Augsburg 1772 in 8." ein verwandtes, wenn auch nicht ganz so praktisches Verfahren lehrte, — zum Näherungsverfahren mit der Boussole ist nichts beizufügen, — und für einige andere Methoden kann auf „**Gerling**, Die pothenot'sche Aufgabe. Marburg 1840 in 8." verwiesen werden. — Für die von **Lambert** gestellte und nach ihm benannte Aufgabe, die relative gegenseitige Lage von sechs Puncten zu bestimmen, wenn an dreien derselben die Azimuthe der drei übrigen bestimmt worden sind, muss ich mich beschränken, auf die hübsche Lösung derselben zu verweisen, welche Georg Daniel Eduard **Weyer** (Hamburg 1818; früher Assistent der Hamburger-Sternwarte, jetzt Professor der Mathematik und Astronomie in Kiel) in Grunert's Archiv (III 74—75) veröffentlicht hat. — Für zwei andere hieher gehörende Aufgaben verweise ich auf 114 und 116.

218. Der Distanzmesser. Hat das Fernrohr des Diopterlineals zu dem horizontalen Mittelfaden noch einen Parallelfaden im Winkelabstande α, und spielt eine an seiner Axe befestigte Spitze über einem getheilten Kreise, dessen Centrum ebenfalls in der Axe liegt, und dessen Nullpunct bei horizontalem Fernrohr mit der Spitze coincidirt, so kann es als **Distanzmesser aus Einem Stande** dienen; denn stellt man in der Horizontaldistanz x einen getheilten Stab vertical auf, und fällt eine Länge a desselben zwischen die Faden, während der getheilte Kreis die Ablesung β gibt, so hat man die Gleichung

$$x \operatorname{Tg}(\alpha+\beta) - x \operatorname{Tg}\beta = a \quad \text{oder} \quad x \doteq a \operatorname{Ctg}\alpha \operatorname{Cos}^2\beta - \frac{a}{2}\operatorname{Sin} 2\beta \qquad 1$$

wo bei x, wenn die Genauigkeit $1/_{200}$ genügt, das letztere Glied, sowie die Veränderung der Bildweite, vernachlässigt werden kann. Die Grösse Ctg α wird am besten bestimmt, indem man den Stab in bekannter Distanz aufstellt. — Bei der **Stadia** der Militär's wird x analog bestimmt, indem man beobachtet, in welcher Distanz vom Scheitel ein gewisses a (z. B. ein Mann) zwischen die Schenkel eines in bestimmter Entfernung vom Auge gehaltenen Winkels passt.

Den im Texte beschriebenen Distanzmesser benutzte Ludwig **Wenz** (Basel 1695 — Basel 1772; Professor der Mechanik und Stadtnotar in Basel) schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, machte darüber an Euler Mittheilung, und beschrieb ihn in der Abhandlung „Solutio famosissimi problematis geometrico-practici de invenienda distantia objecti remoti ope unicæ et cujuscunque, ut vocant, stationis (Act. Helvet. IV)", — nur hatte er noch keine Parallelfaden, sondern mass die beiden Höhenwinkel $(\alpha+\beta)$ und β zweier vertical über einander stehender Puncte von bekannter Distanz a. — Die erste Gleichung 1 geht unmittelbar aus der Figur hervor, und aus ihr folgt

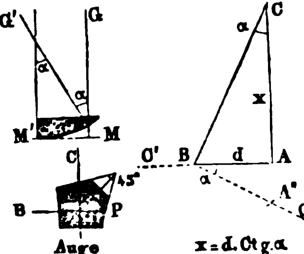


$$x = \frac{a}{Tg(\alpha+\beta) - Tg\,\beta} = \frac{a(1 - Tg\,\alpha\,Tg\,\beta)}{Tg\,\alpha(1 + Tg^2\beta)} = \frac{a\,Cos^2\beta\,(1 - Tg\,\alpha\,Tg\,\beta)}{Tg\,\alpha}$$

oder die zweite Gleichung 1, mit deren Hülfe bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes

$$y = x\,.\,Tg\,\beta = a\,Ctg\,\alpha\,.\,{}^1/_2\,Sin\,2\beta \qquad 2$$

gefunden wird. Um x und y auf dem Felde ohne eigentliche Rechnung erhalten zu können, haben meine beiden Freunde Johannes **Wild** (Richtersweil 1814; jetzt Professor der Geodäsie am schweizerischen Polytechnikum) und Joh. Heinrich **Denzler** (Eglisau 1814; jetzt Katasterdirector in Solothurn), vergl. „Wild, Ueber die topographische Vermessung des Kantons Zürich, nebst Erklärung des dabei angewandten logarithmischen Rechenstabes (Verh. der techn. Ges. in Zürich 1847), einen eigenen Rechenstab construirt, an dem man auf $a\,.\,Ctg\,\alpha$ (die Distanz für $\beta = 0$) einstellt, während der gewöhnliche Schieber $Cos^2\beta$, eine Art Schlaufe aber ${}^1/_2\,Sin\,2\beta$ entspricht. — Da die im Texte beschriebene Stadia, namentlich für die Artillerie, unzureichend ist, so hat man sie zu ersetzen gesucht, und so entstand unter Anderm der sog. **Telemeter** des französischen Genie-Oberst **Goulier**, der aus zwei durch ein Band d von 40^m verbundenen Apparaten besteht: Der Eine A besteht aus dem einen rechten Winkel gebenden Prisma P, — der Andere B theils aus einem ebensolchen Prisma, theils aus einer planconvexen Linse M′, welche gegen eine planconcave Augenlinse M von gleicher Brennweite etwas verschoben werden kann, so dass das Auge bei einem direct gesehenen Gegenstande G auch einen seitlichen Gegenstand G′ sieht, und der durch Letztern bestimmte Winkel α angenähert durch die Verschiebung MM′ bestimmt wird. Soll nun x gemessen werden, so stellt sich A vorläufig in dem einen Endpuncte auf, während B ungefähr senkrecht zu AC in die Distanz d geht; dann bewegt sich A seitlich, bis er durch sein P den andern Endpunct C über B hinaus in C′ sieht, — und nun verschiebt B sein M′ so, dass er A durch M, und C durch sein P nach derselben Richtung in A″ und C″ zu sehen glaubt. Nach zahlreichen Versuchen einer schweizerischen Experten-Commission kann man so x in $2^1/_2$ Minuten durch einmalige Messung auf $1^1/_2$, in 5 Minuten durch zehnmalige Messung auf 1% genau erhalten.



XXII. Die Messungen mit Theodolit, Spiegelsextant und Nivellirinstrument.

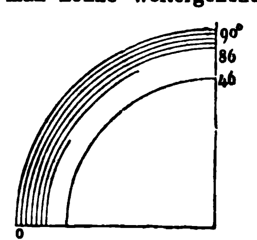
219. Die getheilten Kreise. Theoretisch kann die Theilung eines Kreises bis in's Unendliche fortgesetzt und mit unbegrenzter Genauigkeit ausgeführt werden, — practisch dagegen erreicht man nur zu bald eine theils durch den Radius des Kreises, theils durch die Theilungsmittel und das zu theilende Material (früher Holz, Eisen, Messing, — jetzt gewöhnlich Silber und zuweilen Glas) bedingte oberste Grenze. Setzen wir z. B. die Bogenlänge einer Minute $2 r \pi : 360 . 60$ gleich einer Einheit, so wird $r = 3437,7468$, und wenn daher jene Einheit auch nur $1/_{10}'''$ d. d. werden soll, so muss der Radius schon nahe $2^1/_2{}'$, oder der Kreis ein sog. fünffüssiger sein. Zudem wird gefordert, dass die Theilstriche scharf und deutlich seien, und man darf daher mit der directen Theilung nicht einmal bis an die Grenzen der Möglichkeit gehen, — bei 6—8zölligen Kreisen wohl nicht weiter als bis 10′, bei 20—36zölligen bis 2′.

Um die Theilung weiter treiben zu können, wurden in älterer Zeit mitunter Monstre-Instrumente construirt, und häufig die ganzen Kreise durch Sectoren ersetzt; so besass der von **Tycho Brahe** (Knudstrup bei Helsingborg 1546 — Prag 1601; erst königlich dänischer, dann kaiserlicher Astronom) im Jahre 1569 oder 1570 für die Gebrüder Hainzel in Augsburg auf einem Hügel unter einem Zelte aufgestellte Quadrant einen Radius von $17^1/_2{}'$, — ja der Radius des Quadranten (wenn es nicht etwa nur eine Art Gnomon, s. 350, war), an dem der Fürst **Ulugbegh** in der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts zu Samarkand beobachtete, soll gleich der Höhe der Sophienkirche in Constantinopel gewesen sein. In neuerer Zeit hat man dagegen eingesehen, dass solche grossen und schweren Kreise schädlichen Formänderungen ausgesetzt, auch kaum scharf zu theilen sind, — Sectoren noch um so mehr; man geht daher bei tragbaren Instrumenten nur höchst selten über 12zöllige, bei festen Instrumenten nur ausnahmsweise über 3füssige Kreise hinaus. — Für Theilmethoden auf 325 und 328 verweisend, mag noch beigefügt werden, dass zum Reinigen der Theilkreise ein mit Speichel befeuchteter leinener Lappen, — bei grösserm Widerstande mit befettetem Finger aufzureibender Lampenruss zu empfehlen ist.

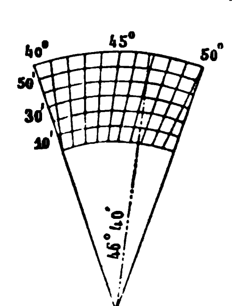
220. Der Vernier. Bei jedem zu Winkelinstrumenten verwendeten getheilten Kreise ist die Stellung eines Index an demselben abzulesen, wobei von Index und Theilung je das Eine fest, das Andere mit der Visirvorrichtung beweglich ist. Um diese Ablesung genauer zu erhalten, wendete man früher **Transversaltheilungen** an, während jetzt gewöhnlich der Index durch den Nullpunct einer zum Kreise concentrischen Hülfstheilung, des sog. **Vernier,** ersetzt wird: Ist nämlich z. B. ein Kreis von 10 zu 10′ getheilt, und

wünscht man dennoch auf 10″ genau ablesen zu können, so theilt man zur Hülfe einen Bogen von 59.10′ in 60 (allgemein n — 1 in n) gleiche Theile. Jeder der neuen Theile ist um $10' - \frac{59}{60} . 10' = 10''$ (oder $\frac{1}{n}$) kleiner als ein Theil der Hauptheilung, und wenn also z. B. der 0te Theilstrich des Vernier so zwischen 54° 30′ und 54° 40′ der Hauptheilung steht, dass der 7te Theilstrich desselben mit einem Theilstriche der Hauptheilung zusammenfällt, so muss er bei $54^0\ 30' + 7 . 10'' = 54^0\ 31'\ 10''$ stehen, und entsprechend in andern Fällen. — Für das sog. Ablesemikroskop vergl. 327, — für Untersuchung der Theilung und Elimination der Excentricität 328.

Die Nothwendigkeit, genauer ablesen zu können, als es die directe Theilung der Kreise erlaubte, veranlasste schon den Portugiesen Pedro Nunnez oder **Nonius** (Alcazar de Sal 1492 — Coimbra 1577; Professor der Mathematik zu Coimbra) in seinem Werke „De crepusculis. Olyssipone 1542 in 4.“ ein Hülfsmittel vorzuschlagen, das auf dem glücklichen Gedanken basirte, man könne weitergehender Theilung **verschiedene Theilung desselben Bogens** substituiren: Man solle nämlich einem in seine 90° getheilten Quadranten noch 44 concentrische Hülfsquadranten beigeben, und diese in 89, 88, 87, ... 46 Theile theilen; wenn dann eine gewisse Richtung mit keinem Theile der Hauptheilung zusammentreffe, so werde sie doch nahe mit irgend einem Theilstriche der Hülfstheilung übereinstimmen, dessen Werth dann ja leicht berechnet werden könne.



Praktisch war jedoch dieser Vorschlag wenig werth, da es einerseits (vergl. Delambre, Hist. III 402—405) gar nicht so leicht war, den nächsten Theilstrich auszumitteln, der dann in manchen Fällen nicht einmal eine grosse Annäherung darbot, — anderseits dabei 45 verschiedene Theilungen erforderlich waren, von denen einzelne (47, 53,...) sogar Primzahlen entsprachen, — ja es ist zu begreifen, dass **Tycho** an Einer Probe, ihn wirklich auszuführen, mehr als genug hatte, und sofort nach etwas Anderem suchte. Glücklicher Weise war er (vergl. seine Epist. astr. lib. 1) bei seinem Aufenthalte in Leipzig durch Johannes **Hommel** (Memmingen 1518 — Leipzig 1562; Professor der Mathematik in Leipzig) mit der jetzt noch gebräuchlichen Einrichtung der sog. verjüngten Maassstäbe bekannt geworden, und hatte nun den Einfall, dasselbe Princip auch auf Kreistheilungen anzuwenden, wodurch z. B. schon bei 4zölligen Kreisen, die entsprechend beistehender Figur direct nur in Grade getheilt wurden, doch immerhin auf 10′ genau abgelesen werden konnte. Obschon Tycho, wie einige Decennien später ein gewisser Johannes **Ferrerius** zuerst bemerkt zu haben scheint, eigentlich statt geraden Transversalen hätte durch das Kreiscentrum gehende Transversalbogen anwenden sollen, so erwies sich dennoch sein Verfahren prak-

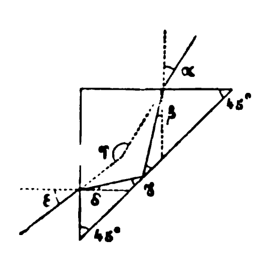


tisch sehr gut, und verhalf ihm wesentlich zu der seine Beobachtungen auszeichnenden Genauigkeit. Auch spätere Astronomen machten mit Erfolg davon Anwendung, und noch 1672 beobachtete Jean **Richer** (16.. — Paris 1696; Mitglied der Pariser-Academie) in Cayenne (vergl. 371 und 385) mit einem 6füssigen Octanten, dessen kupferner Limbus mittelst Transversalen Minuten gab, ja noch deren Sechstel abzuschätzen erlaubte. — Nach und nach wurden dann allerdings auch die Transversalen wieder durch die im Texte beschriebene neue Anwendung des Nonius'schen Gedankens verdrängt, welche Pierre **Vernier** (Ornans 1580 — Ornans 1637; Münzdirector der Grafschaft Burgund) in seinem Schriftchen „La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques. Bruxelles 1631 in 12." zuerst beschrieb, und die daher mit Recht seinen Namen, häufig aber allerdings auch den von Nonius trägt. — Theilt man, wie im Texte, für den Vernier (n — 1) Theile der Haupttheilung in n Theile, so läuft derselbe **mit** der Theilung, während er für (n + 1) in n **rückwärts** gehen muss.

221. Der Theodolit. Das wichtigste Winkelinstrument ist der nach und nach aus dem **Astrolabium** der Alten (einem getheilten Kreise mit Dioptern) hervorgegangene sog. **Theodolit,** welcher aus einem mit Hülfe von drei Fussschrauben horizontal zu stellenden Kreise, dem sog. **Limbus,** besteht, der entweder fest ist (gemeiner Theodolit) oder um eine verticale Axe gedreht werden kann (Repetitions-Theodolit). Auf einer in dem getheilten Kreise centrisch laufenden Scheibe, der sog. **Alhydade,** welche mindestens ein Paar sich diametral gegenüberstehender Vernier's trägt, stehen zwei gleich hohe Lager für die Axe eines geraden (terrestrischer Theodolit) oder mittelst Prisma gebrochenen Fernrohrs (astronomischer Theodolit oder Universalinstrument), an welche wieder ein getheilter Kreis, der sog. **Höhenkreis,** angesteckt ist, dessen Vernier-Paar an einem der Lager sitzt. Jede Veränderung in der Lage des Fernrohrs wird durch das Instrument selbst in eine horizontale und eine verticale Bewegung zerlegt, und man kann daher mit demselben gleichzeitig Horizontalwinkel und Höhendifferenzen messen, sobald dasselbe gehörig aufgestellt und corrigirt ist. — Zu letzterm Zwecke wird die Libelle auf die Axe des Fernrohrs gesetzt, dieses über eine der (gewöhnlich getheilten Kopf mit Index besitzenden und dann auch zur Untersuchung der Libelle benutzbaren) Fussschrauben gebracht, und nun die Libelle eingestellt; dann wird die Libelle verkehrt auf die Axe gesetzt, und vom allfälligen Ausschlag die Hälfte an der Fussschraube, der Rest an der Libelle selbst corrigirt; nachher dreht man die Alhydade um 180°, und verbessert einen neuen Ausschlag der Libelle zur Hälfte an der Fussschraube, zur Hälfte am einen Lager; hierauf stellt man die Axe parallel zu den beiden andern Fusschrauben, und bringt mit ihnen nochmals die Libelle zum Einspielen. Dann stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf

einen Gegenstand ein, legt hierauf das Fernrohr in seinen Lagern um, oder führt es nach Drehen der Alhydade um 180° durch Durchschlagen auf den Gegenstand zurück, und verbessert endlich die Hälfte der Abweichung an den Stellschrauben des Fadenkreuzes oder des Prisma's. Sind so die Hauptfehler gehoben, so ist das Instrument zur Winkelmessung bereit, bei welcher zur Elimination der Theilungsfehler beim Repetitionstheodoliten die Multiplication (216) angewandt werden kann. Für die Messung von Höhenwinkeln vergl. 225, — für die Axenlibelle 329.

Das Astrolabium bestand ursprünglich aus einem, an einem Ringe gehaltenen oder aufgehängten, sich in Folge der Schwere von selbst vertical stellenden Kreise; später erhielten solche Kreise oder die ihnen substituirten Quadranten und Sectoren, um nicht nur Verticalwinkel messen zu können, eigene Stative, mit Kugelgelenken, — ja es begann spätestens **Tycho** einen Kreis mittelst Fussschrauben horizontal zu stellen, und über ihm einen drehbaren Quadranten mit Dioptern anzubringen, um so von selbst jeden zu messenden Winkel in eine horizontale und eine verticale Componente zu zerlegen, d. h. einen sogenannten **Azimuthalquadrant** zu construiren, aus dem dann nach und nach durch die Bemühungen der **Brander**, **Ramsden**, **Reichenbach**, etc. der im Text beschriebene Theodolit entstand. Letzterer Name kam um die Mitte des 18. Jahrhunderts von England her zu uns, und ist wahrscheinlich durch successive Umformung aus Alhydade entstanden, da (vergl. eine Note von A. Morgan in Phil. Mag. 1846) schon in den vorhergehenden Jahrhunderten zur Bezeichnung eines mit Dioptern oder Alhydade versehenen Kreises die Uebergangsformen: Athelida, athelidirter Kreis, theodelitirter Kreis, etc. gebraucht worden sein sollen. — Bei dem sog. gebrochenen, spätestens 1816 durch **Reichenbach** angewandten Fernrohr, fallen die vom Objective kommenden Strahlen auf ein in der Mitte der hohlen Drehaxe angebrachtes gleichschenklig-rechtwinkliges Glasprisma, und werden durch dasselbe in die eine, das Ocular tragende Hälfte der Drehaxe geworfen.



Fällt aber ein Strahl unter dem Winkel α auf das Prisma ein, so verlässt er es auch (s. 283 und 286) unter dem Winkel $\varepsilon = \alpha$, da

$$\beta + \gamma = 45^\circ = \delta + \gamma \qquad \text{also} \qquad \beta = \delta$$

und dabei bilden der einfallende und austretende Strahl einen Winkel

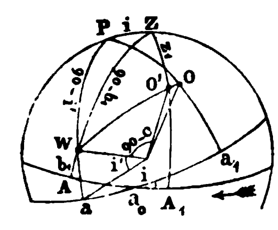
$$\varphi = (\alpha - \beta) + 180 - 2\gamma + (\varepsilon - \delta) = 90^\circ + 2\alpha \quad 1$$

so dass das gebrochene Fernrohr nur für $\alpha = 0$ der Forderung, es solle die optische Axe senkrecht zur Drehaxe stehen (keine Collimation besitzen), Genüge leisten kann. — Beim astronomischen Fernrohr wird mit und ohne Prisma **oben-unten** als **unten-oben**, — dagegen nur ohne Prisma **links-rechts** als **rechts-links** erscheinen. — Hat eine der Fussschrauben des Theodoliten einen getheilten Kopf mit Index, so kann man einerseits damit v (s. 212) nach der Formel

$$v = \frac{h \cdot w}{n \cdot l \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 1''} \quad 2$$

bestimmen, wo l die Entfernung zweier Fussschrauben, w aber die Weite

ihrer Schraubengänge bezeichnet, und h die Anzahl der Schraubengänge gibt, für welche das eine Blasenende n Theilstriche durchläuft, — und anderseits diese Theilung benutzen, um mit mehr Sicherheit die bei Correction der Libelle und der Lager sich ergebenden Ausschläge gerade zur Hälfte an der Schraube zu verbessern. — Wenn auch die Fehler des Theodoliten nach den angegebenen Methoden möglichst gehoben sind, so wird doch immer noch der sog. Horizontalkreis eine kleine Neigung i gegen den wahren Horizont besitzen, so dass sein Pol P den Abstand i von dem Zenithe Z hat, und nur der Theilpunct a_0 desselben wirklich im Horizonte liegt. Ferner wird die Drehaxe des Fernrohrs nicht genau mit dem Horizontalkreise parallel sein, sondern ihr Westende W eine kleine Erhebung i' über denselben haben, und während die optische Axe zu ihr senkrecht stehen und nach O weisen sollte, wird sie den Winkel $90^0 - c$ mit ihr bilden, und nach O' gerichtet sein, so dass der Ablesung a_1 am Horizontalkreise der Punct A_1 am Horizonte entspricht. Nun hat man aus Dreieck P Z W, wenn b_1 die Angabe der Libelle ist,



$$\mathrm{Sin}\, b_1 = \mathrm{Sin}\, i' . \mathrm{Cos}\, i + \mathrm{Cos}\, i' . \mathrm{Sin}\, i . \mathrm{Cos}\,(a - a_0 + 90^0)$$

oder nahe, da $a = 90^0 + a_1$,

$$b_1 = i' - i\, \mathrm{Sin}\,(a - a_0) = i' - i\, \mathrm{Cos}\,(a_1 - a_0) \qquad 3$$

und aus demselben Dreiecke

$$\mathrm{Sin}\,(A - a_0 + 90^0) : \mathrm{Sin}\,(a - a_0 + 90^0) = \mathrm{Cos}\, i' : \mathrm{Cos}\, b_1 \quad \text{oder} \quad A = a = 90^0 + a_1 \qquad 4$$

Ferner folgt aus Dreieck Z W O', wenn z_1 die annähernd am Theodoliten (nach 225) bestimmte Zenithdistanz von O' ist,

$$\mathrm{Cos}\,(90^0 - c) = \mathrm{Sin}\, b_1 . \mathrm{Cos}\, z_1 + \mathrm{Cos}\, b_1 . \mathrm{Sin}\, z_1 . \mathrm{Sin}\,[90^0 - (A - A_1)]$$

Da in dieser Gleichung die linke Seite und das erste Glied rechts klein, so muss auch das zweite Glied rechts abgesehen von z_1, also $\mathrm{Sin}\,[90^0 - (A - A_1)]$ klein sein, also nahe

$$c = b_1 . \mathrm{Cos}\, z_1 + [90^0 - (A - A_1)]\, \mathrm{Sin}\, z_1 \quad \text{oder} \quad A_1 = a_1 + c . \mathrm{Cosec}\, z_1 - b_1 \mathrm{Ctg}\, z_1 \qquad 5$$

so dass sich also jede Ablesung mit Hülfe von 3 und 5 leicht corrigiren lässt, sobald man i, i', a_0 und c kennt. — Stellt man aber den Kreis successive auf a_1, $120^0 + a_1$ und $240^0 + a_1$ ein, und bestimmt mit der Libelle die zugehörigen b_1, b_2 und b_3, so hat man, da $\mathrm{Cos}\, 120^0 = - {}^1/_2$, $\mathrm{Sin}\, 120^0 = + {}^1/_2 \sqrt{3}$, $\mathrm{Cos}\, 240^0 = - {}^1/_2$ und $\mathrm{Sin}\, 240^0 = - {}^1/_2 \sqrt{3}$,

$$b_1 = i' - i\, \mathrm{Cos}\,(a_1 - a_0) \qquad b_2 = i' + {}^1/_2\, i\, \mathrm{Cos}\,(a_1 - a_0) + {}^1/_2\, i\, \mathrm{Sin}\,(a_1 - a_0) \sqrt{3}$$
$$b_3 = i' + {}^1/_2\, i\, \mathrm{Cos}\,(a_1 - a_0) - {}^1/_2\, i\, \mathrm{Sin}\,(a_1 - a_0) \sqrt{3}$$

und hieraus durch Combination

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3\, i' \qquad b_2 - b_3 = \sqrt{3} . i . \mathrm{Sin}\,(a_1 - a_0) \qquad b_2 + b_3 - 2\, b_1 = 3 . i . \mathrm{Cos}\,(a_1 - a_0) \qquad 6$$

woraus sich i, i', a_0 bequem berechnen lassen. Um c zu bestimmen, ist es am einfachsten, das Fernrohr in den Lagern umzulegen, wobei c das Zeichen ändert, — nochmals zu nivelliren, wodurch man b_2 erhält, das in Folge einer allfälligen Zapfenungleichheit (s. 329) etwas von b_1 verschieden sein kann, — dann das Fadenkreuz auf O' zurückzuführen und die neue Ablesung a_2 zu machen. Man hat sodann entsprechend 5

$$A_1 = a_2 - c . \mathrm{Cosec}\, z_1 - b_2\, \mathrm{Ctg}\, z_1 \qquad 7$$

so dass aus 5 und 7

$$c = \frac{a_2 - a_1}{2}\, \mathrm{Sin}\, z_1 - \frac{b_2 - b_1}{2}\, \mathrm{Cos}\, z_1 \qquad 8$$

folgt. Statt umzulegen kann man, wenn man bereits nach 328 Excentricität

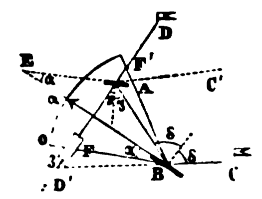
und Indexfehler kennt, um 180° drehen und durchschlagen. — Für die Fadenbeleuchtung und Fadenparallaxe vergl. 326.

222. Der Spiegelsextant. Neben dem Theodoliten ist der kein Stativ erfordernde, also zur See brauchbare und auf Reisen bequeme Spiegelsextant das wichtigste Winkelinstrument. Er besteht aus einem Kreissector, auf dessen Ebene (s. Fig. 1) ein oben durchbrochener oder unbelegter Spiegel A parallel zur Nulllinie der Theilung des Sectors fest aufsitzt. Ein zweiter Spiegel B ist auf einem drehbaren Radius befestigt, und dieser Letztere trägt zugleich den Index oder Vernier für die Ablesung. Dem Spiegel A endlich steht ein Fernrohr F so gegenüber, dass seine optische Axe und die Verbindungslinie der beiden Spiegel an A mit der Normale zu A gleiche Winkel bilden. Visirt man durch F und den unbelegten Theil von A nach einem Gegenstande D, und dreht dann den Spiegel B so, dass man nach derselben Richtung durch doppelte Reflexion einen Gegenstand C zu sehen glaubt, so kann man aus der entsprechenden Ablesung α den Winkel β finden, welchen D und C am Auge bestimmen; denn es ist offenbar

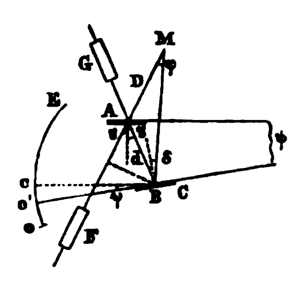
$$\beta = 2\,\delta - 2\,\gamma = 2\,[90 + \delta - (90 + \gamma)] = 2\,\alpha \qquad 1$$

Um die hiernach nöthige Verdopplung nicht immer machen zu müssen, wird gewöhnlich jedem Theilstriche das Doppelte seines Werthes beigeschrieben, — und zur Prüfung des Parallelismus von A mit der Nulllinie oder zur Auffindung des sog. **Collimationsfehler's** hat man einfach nachzusehen, welchen Werth β für einen sehr fernen Gegenstand (C = D) annimmt. — Für die Messung von Höhenwinkeln vergl. 225, — für die Reduction auf den Horizont 223.

Nachdem Robert **Hooke** (Freshwater auf Insel Wight 1635 — London 1703; Professor der Geometrie in London und Secretär der Royal Society) um 1661 ohne den gewünschten Erfolg versucht hatte, Einen Spiegel zur Construction eines Winkelinstrumentes zu verwenden, sandte **Newton** 1700 Zeichnung und Beschreibung eines Sextanten mit zwei Spiegeln an **Halley**, damit er sich über die praktische Bedeutung desselben ausspreche; dieser erkannte jedoch, wie es scheint, dieselbe nicht, — liess die Zusendung liegen, und erst 1742 fand man sie nach seinem Tode unter seinen Papieren. Unterdessen legte John **Hadley** (16.. — London 1744; Instrumentenmacher in London), der viel mit Halley verkehrte, vier Jahre nach Newton's Tode, ohne diesen zu nennen, der Roy. Society ein jener Zeichnung ganz entsprechendes „New instrument for taking angles (Phil. Trans. 1731)“ vor, und da man sofort einsah, welch' grossen Nutzen dasselbe für die Nautik haben müsse, kam es bald unter dem Namen des Hadley'schen oder Spiegel-Sextanten in allge-



meinen Gebrauch. — Der im Texte gegebenen Beschreibung und Theorie des Sextanten ist Folgendes nachzutragen: Dreht man A um 90°, und versetzt F nach F', so kann man bei gleichem Stande von B den Winkel $C'AD' = 180^0 - \beta = 180^0 - 2\alpha$, und somit schon mit einem Octanten alle Winkel zwischen 0 und 180° messen. — Um den von jeder Ablesung in Abzug zu bringenden sog. Collimationsfehler c, oder vielmehr die Ablesung bei parallelem Stande der Spiegel, zu bestimmen, wollen wir uns den Spiegel B so gedreht denken, dass derselbe Gegenstand M sowohl direct als durch doppelte Spiegelung gesehen wird; die entsprechende Ablesung sei c', während φ den Winkel der von M ausgehenden Strahlen, ψ aber den Winkel der beiden Spiegel bezeichne. Man hat alsdann



$$\varphi = 2\gamma - 2\delta = 2[90 + \gamma - (90 + \delta)] = 2\psi \qquad 2$$

ferner

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{d \operatorname{Sin} 2\gamma}{D + d \operatorname{Cos} 2\varphi} \quad \text{oder nahe} \quad \varphi = \frac{1}{\operatorname{Sin} 1''}\left[\frac{d}{D}\operatorname{Sin} 2\gamma - \frac{d^2}{2D^2}\operatorname{Sin} 4\gamma\right] \qquad 3$$

und endlich, da nicht zu vergessen, dass jedem Theilstriche das Doppelte seines Werthes beigeschrieben ist,

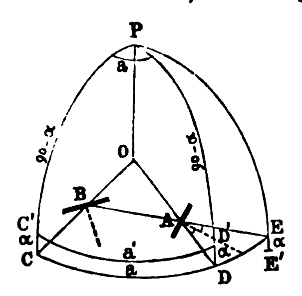
$$\frac{c - c'}{2} = \psi = \frac{\varphi}{2} \qquad \text{oder} \qquad c = c' + \varphi \qquad 4$$

Aus 3 geht hervor, dass für ferne Gegenstände, wie z. B. für die Sonne, φ verschwindet, und in solchem Falle ist nach 4 unmittelbar $c = c'$. Will man die Bestimmung wirklich mit der Sonne machen, so thut man am Besten, ihr Spiegelbild mit dem unmittelbar gesehenen Bilde successive beidseitig zur Berührung zu bringen, und die halbe Summe der entsprechenden Ablesungen für c zu nehmen. Will man dagegen die Bestimmung mit Hülfe eines terrestrischen Gegenstandes der Distanz D bestimmen, so muss man, um nach 3 je φ berechnen zu können, für ein und alle Male 2γ ermitteln: Hiefür wird der Sextant auf einem Stative oder auf seinen Füsschen festgelegt und auf M eingestellt; dann wird ein mit einem Fadenkreuze versehenes Fernröhrchen G so aufgestellt, dass man dadurch M im Spiegel B sieht, — nun mit dem Sextanten $\angle GBM = 2\delta$ gemessen, — die Ablesung s gemacht, — und dann mit Hülfe von 2 und 4 aus

$$s - c = 2\delta = 2\gamma - \varphi \qquad \text{oder} \qquad 2\gamma = s - c + \varphi = s - c' \qquad 5$$

2γ berechnet. Vermehrt man die für den Winkel der Sonne mit einem links von ihr liegenden Gegenstande erhaltene Ablesung, ohne die Lage des Sextanten zu verändern, rasch um dieses 2γ, so dreht sich der reflectirte Sonnenstrahl auch um 2γ und wird daher nach dem Gegenstande hin geworfen, so dass der Sextant bei dieser Manipulation zur Noth, wie schon **Gauss** bemerkte, ein sog. **Heliotrop** (vergl. 284) ersetzen kann. — Um zu untersuchen, ob B senkrecht zum Limbus stehe, sehe man bei C, ob der Rand des Limbus und sein Spiegelbild in B in gleicher Höhe stehen; oder man stelle vor B ein Diopter mit Horizontalfaden, bei E ein Diopter mit eben so hoher Oeffnung, und sehe ob von E aus der Faden und sein Spiegelbild in B in gleicher Höhe liegen. — Ist B nöthigenfalls corrigirt, und der Index auf c gestellt, so sollen sich ein Stern und sein Spiegelbild decken; steht das Spiegelbild höher oder tiefer, so ist A nicht parallel B, und daher zu corrigiren. — Stellt man die erwähnten Diopter so auf den Limbus, dass die durch sie bestimmte

Richtung ungefähr parallel der Axe des Fernrohrs ist, und dreht nun den natürlich bei dieser Operation wieder fest liegenden Sextanten so, dass ein bestimmter Gegenstand G in die Richtung der Diopter fällt, so soll derselbe auch im Fernrohr mitten zwischen den zwei zum Limbus parallelen Faden desselben erscheinen. Zeigt sich ein anderer, wir wollen annehmen höher liegender Gegenstand H daselbst, so schätze man $\angle(G, H) = \alpha$ ab, wozu der Sextant selbst verwendet werden kann, — und corrigire dann entweder das Fernrohr um α, oder bringe α in Rechnung. Letzteres kann auf folgende Weise geschehen: Sind C, D, E die Puncte, in welchen bei paralleler Fernrohraxe die von den beiden Winkelobjecten kommenden, und von den Spiegeln reflectirten Strahlen eine vom Scheitel O des Winkels beschriebene Kugel treffen würden, und P der Pol des sie verbindenden Kreises, so wird nun D um α nach D' gehoben, — also E, da die Normale des Spiegels A immer noch mit dem einfallenden und reflectirten Strahle in derselben Ebene liegen muss, nahe um α nach E' gesenkt, — folglich C aus analogen Gründen wieder nahe um α nach C' gehoben. Man wird somit $C'D' = a'$ messen, dagegen immer noch in der Ebene des Limbus $CD = a$ durch Ablesung bestimmen. Nun folgt aus Dreieck $PC'D'$ nahe

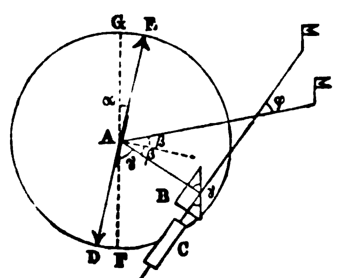


$$\mathrm{Cos}\, a' = \mathrm{Sin}^2 \alpha + \mathrm{Cos}^2 \alpha \,.\, \mathrm{Cos}\, a = \mathrm{Cos}\, a + 2\alpha^2 \,\mathrm{Sin}^2 1'' \,.\, \mathrm{Sin}^2 \frac{a}{2} \qquad 6$$

wo das zweite Glied rechts eine kleine Grösse bezeichnet, so dass man mit genügender Annäherung nach 60 : 4, 5

$$a' = a - \alpha^2 \,.\, \mathrm{Tg} \frac{a}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\, 1'' \qquad 7$$

setzen kann. — Für die Bestimmung der Excentricität des Sextanten und ihres Einflusses, auf 328 verweisend, mag hier vorläufig nur bemerkt werden, dass sie Karl Philipp Heinrich **Pistor** (Berlin 1778 — Berlin 1847; Mechaniker in Berlin) etwa 1845 veranlassen half, den schon von Tob. **Mayer** in seinen „Tabulæ motuum Solis et Lunæ. Londini 1770 in 4.", und von **Borda** in seiner „Description et usage du cercle de réflexion. Paris 1787 in 4. (2 éd. 1802)" vorgeschlagenen **Spiegelkreis**, welcher mit den Vorzügen des Sextanten diejenigen des Vollkreises und sogar der Multiplication verbinden sollte, zu vervollkommnen. Nach seiner Construction sitzt der drehbare Spiegel A auf einem Durchmesser mit zwei Verniers D und E; der feste Spiegel ist durch ein vor dem Fernrohr C stehendes Prisma B ersetzt, dessen Reflexionsebene der Nulllinie G F parallel sein soll. Da man für diese Combination offenbar



$$\varphi = 180^\circ - 2\beta - 2\gamma = 2(90^\circ - \beta - \gamma) = 2\alpha \qquad 8$$

hat, so ist in der That die Theorie des Spiegelkreises ganz der des Sextanten analog, und es lassen sich somit auch alle für den Sextanten entwickelten Theorieen fast unverändert auf ihn übertragen.

223. Die Reduction auf Centrum und Horizont. Kann man sich im Scheitel eines Winkels B A C = A nicht aufstellen, so misst man von einem benachbarten Puncte D (s. Fig.) den Winkel B D C = D, und hat sodann, wenn einer der sog. **Directionswinkel** α oder β und die **Excentricität** e bekannt sind, nach 83 und 103

$$A = D + \text{Arc Sin} \frac{e \sin(\alpha + D)}{b} - \text{Arc Sin} \frac{e \sin \alpha}{c} \qquad 1$$

$$D = A - \text{Arc Tg} \frac{e \sin \beta}{b - e \cos \beta} + \text{Arc Tg} \frac{e \sin(A + \beta)}{c - e \cos(A + \beta)} \qquad 2$$

oder, da in den meisten Fällen e gegen b und c sehr klein, mit hinlänglicher Annäherung

$$A = D + \frac{e \sin(\alpha + D)}{b \sin 1''} - \frac{e \sin \alpha}{c \sin 1''} \qquad 3$$

$$D = A - \frac{e \sin \beta}{b \sin 1''} + \frac{e \sin(A + \beta)}{c \sin 1''} \qquad 4$$

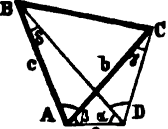
Bezeichnen ferner a den wahren, A den Horizontalwinkel zweier Objecte der Zenithdistanzen b und c, so hat man nach 160, indem man sich aus dem Scheitel des Winkels eine Kugelfläche von beliebigem Radius beschrieben denkt,

$$\cos a = \frac{\cos c \cdot \cos(b - x)}{\cos x} \qquad \text{wo} \qquad \text{Tg}\, x = \text{Tg}\, c \cdot \cos A \qquad 5$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s - a)}{\sin b \cdot \sin c}} \qquad \text{wo} \qquad s = \frac{a + b + c}{2} \qquad 6$$

gesetzt wurde.

Die zur Reduction auf das Centrum der Station dienenden Formeln 1 und 3, von welchen die erste aus



$$\gamma + D = \delta + A \qquad 7$$

$$\sin \gamma : \sin(\alpha + D) = e : b \qquad 8$$
$$\sin \delta : \sin \alpha = e : c$$

hervorgeht, — die zweite aber aus der ersten unter Voraussetzung eines relativ kleinen Werthes von e, tragen häufig den Namen von **Delambre**, der sie zuerst aufgestellt zu haben scheint. — Die zur umgekehrten Aufgabe dienenden Formeln 2 und 4 folgen ebenfalls aus 7, indem man sich zur Bestimmung von γ und δ von D aus Senkrechte auf A C und A B gezogen denkt. — Für 5 und 6 genügt wohl die im Texte gegebene Andeutung.

224. Die sog. Triangulationen. Verbindet man eine Reihe von Puncten unter einander und mit einer genau gemessenen Basis durch eine Kette von Dreiecken oder ein sog. **Dreiecksnetz,** so kann man aus den Winkeln dieser Dreiecke durch Berechnung die Distanz irgend zweier dieser Puncte und die Coordinaten sämmtlicher Puncte, folglich die schönste Controle für eine Detailaufnahme erhalten. Meistens werden die Coordinaten auf einen der Puncte und seinen

Meridian bezogen, und dafür nach 330 oder 344 das Azimuth w einer ersten Seite bestimmt; dann hat man einerseits (s. Fig.)

$$x = a \operatorname{Cos} w \qquad x_1 = x - a_1 \operatorname{Cos} w_1 \qquad x_2 = x_1 + a_2 \operatorname{Cos} w_2 \quad \text{etc.} \qquad 1$$

$$y = a \operatorname{Sin} w \qquad y_1 = y - a_1 \operatorname{Sin} w_1 \qquad y_2 = y_1 + a_2 \operatorname{Sin} w_2 \quad \text{etc.} \qquad 2$$

$$w_1 = w - (\alpha_1 + \alpha_2) + 180^0 \qquad w_2 = w_1 + (\alpha_3 + \alpha_4) - 180^0 \quad \text{etc.} \qquad 3$$

während anderseits

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_1}{\operatorname{Sin} \alpha_2} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha_3}{\operatorname{Sin} \alpha_4} \quad \text{etc.} \qquad 4$$

also durch Multiplication

$$a_n = a \frac{\operatorname{Sin} \alpha_2 . \operatorname{Sin} \alpha_4 \ldots \operatorname{Sin} \alpha_{2n}}{\operatorname{Sin} \alpha_1 . \operatorname{Sin} \alpha_3 \ldots \operatorname{Sin} \alpha_{2n-1}} \qquad 5$$

Aus der ersten Proportion 4 folgt durch Differentation

$$d\, a_1 = d\, a . \frac{\operatorname{Sin} \alpha_2}{\operatorname{Sin} \alpha_1} - a_1 (\operatorname{Ctg} \alpha_1 . d\, \alpha_1 - \operatorname{Ctg} \alpha_2 . d\, \alpha_2) \operatorname{Sin} 1'' \qquad 6$$

und man hat daher bei einer Triangulation auf möglichst gleichseitige Dreiecke zu sehen, damit der Fehler in der Längenmessung sich nicht multiplicire und die Fehler in der Winkelmessung sich nahe aufheben. Aus 5 aber folgt, wenn $\Delta \alpha$ den mittlern Fehler der Winkel und Δa, Δa_n die Fehler der ersten und letzten Seite bezeichnen,

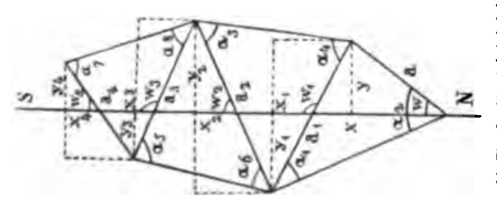
$$\Delta a_n = \pm \Delta a . \frac{a_n}{a} \mp a_n \operatorname{Sin} 1'' (\operatorname{Ctg} \alpha_1 - \operatorname{Ctg} \alpha_2 + \ldots) \Delta \alpha \qquad 7$$

oder durch Quadriren und Weglassen der Glieder mit $\pm$

$$\Delta a_n^2 = a_n^2 \left[\frac{\Delta a^2}{a^2} + \Delta \alpha^2 . \operatorname{Sin}^2 1'' . \Sigma \operatorname{Ctg}^2 \alpha \right] \qquad 8$$

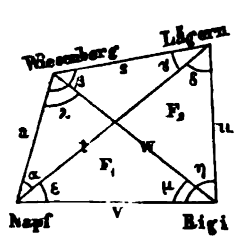
Setzt man $\Delta \alpha = 0$, so wird $\Delta a_n = a_n . \Delta a : a$, d. h. es ist Δa_n dem Fehler der Basis und dem Verhältniss der zu bestimmenden Länge zur Basis proportional. Setzt man $\Delta a = 0$, so wird nahe $\Delta a_n = a_n \operatorname{Ctg} \alpha . \Delta \alpha . \operatorname{Sin} 1'' . \sqrt{2n}$, d. h. es ist Δa_n dem Fehler der Winkel und der Wurzel aus der Anzahl der Verbindungsdreiecke proportional.

Eine erste Andeutung einer Triangulation findet man schon in der von Sebastian **Münster** (Ingelheim 1489 — Basel 1552; Professor der hebräischen Sprache in Basel; s. Bd. 2 meiner Biographieen) herausgegebenen „Cosmographia. Beschreibung aller Lender. Basel 1544 in fol. (auch später wiederholt, und ebenso eine Menge lateinischer, französischer, italienischer, englischer, etc. Ausgaben)“. Er orientirt nämlich an Einem dreier, nach ihrer gegenseitigen Lage zu bestimmender Puncte mit Hülfe eines Compasses einen getheilten



Kreis, und bestimmt von demselben aus die Abweichungen der beiden andern Puncte von der Mittagslinie; dann sieht er, wie viele Stunden er „zu fuss oder zu ross“ brauche, um von diesem ersten Puncte zu einem der beiden andern zu

kommen, verwandelt seinen „fussgang oder ritt zu meilen“, von denen 15 auf einen Grad gehen, misst am zweiten Puncte wieder seinen Winkel, sucht nun durch Construction die andern Seiten des so bestimmten und zugleich orientirten Dreiecks, u. s. f. Als eines der ersten Beispiele einer etwas vollkommenen Operation dieser Art dürfte dagegen die von **Snellius** in dem 217 angeführten Werke beschriebene Triangulation citirt werden. — Die Formeln 1—8 des Textes bedürfen wohl keiner weitern Ableitung; dagegen mag noch an einem einfachen Beispiele gezeigt werden, wie man in neuerer Zeit bei einem Dreiecksnetze, in welchem man mehr Elemente, als die Berechnung wirklich erfordert, gemessen hat, eine sog. **Ausgleichung** derselben vorzunehmen pflegt: In dem in 106 durchgerechneten Vierecke wurden eigentlich durch unmittelbare Messung die 9 Winkel



		°	′	″
1)	$\alpha + \varepsilon =$	87	20	55,1
2)	$\varepsilon =$	48	35	11,0
3)	$\beta - \lambda =$	52	41	57,3
4)	$\lambda =$	44	27	36,0
5)	$\gamma =$	44	4	46,8
6)	$\delta =$	41	12	29,4
7)	$\gamma + \delta =$	85	17	15,1
8)	$\mu =$	48	11	33,5
9)	$\eta - \mu =$	42	0	51,6

bestimmt, aus welchen die in 106 gegebenen Winkelgruppen $\alpha\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon\eta$ folgen, wenn man von jedem der Winkel $1/3$ des Ueberschusses der betreffenden Gruppe über 180° abzieht. Es wurden also, da zur Bestimmung eines Vierecks ausser einer Seite (hier a) schon 4 Winkel (z. B. α, β, δ, ε) hinreichen, überflüssige Winkel gemessen, welche zu Bedingungsgleichungen führen, von denen drei Arten zu unterscheiden sind: Eine **erste Art** bezieht sich auf Bedingungen, welche die an einer einzelnen Station gemessenen Winkel einzugehen haben. So sind in dem vorliegenden Beispiele nicht nur die Winkel γ und δ, sondern es ist auch $\gamma + \delta$ gemessen; bezeichnet man daher die Correction eines Winkels mit seiner in Klammern eingeschlossenen Nummer, so hat man die Bedingungsgleichung

$$44^\circ\ 4'\ 46'',8 + (5) + 41^\circ\ 12'\ 29'',4 + (6) = 85^\circ\ 17'\ 15'',1 + (7)$$

oder

$$-1{,}1 = (5) + (6) - (7) \qquad \mathbf{9}$$

Eine **zweite Art** beruht auf der Winkelsumme $180^\circ + 2\,e$ des Dreiecks, wo nach 188 und 376, wenn F in Quadratmetern ausgedrückt ist,

$$2\,e = \frac{F}{r^2 \operatorname{Sin} 1''} = \operatorname{Num}(\log F - 8{,}2933)$$

So ergibt sich in unserm Beispiele für Dreieck WNR nach den Daten in 106

$$2\,e = \operatorname{Num}(8{,}9693 - 8{,}2933) = 4'',7$$

also die Bedingungsgleichung

$$87^\circ\ 20'\ 55'',1 + (1) + 44^\circ\ 27'\ 36'',0 + (4) + 48^\circ\ 11'\ 33'',5 + (8) = 180^\circ + 4'',7$$

oder

$$+0{,}1 = (1) + (4) + (8) \qquad \mathbf{10}$$

In ähnlicher Weise erhält man für Dreieck WRL den Excess 4″,8 und die Bedingungsgleichung

$$+0{,}8 = (3) + (7) + (9) \qquad \mathbf{11}$$

ebenso für Dreieck NWL den Excess 4″,5 und die Bedingungsgleichung

$$+0{,}3 = (1) - (2) + (3) + (4) + (5) \qquad \mathbf{12}$$

Das vierte Dreieck NLR gibt dagegen offenbar, als durch die andern bedingt, keine neue Bedingungsgleichung. Eine **dritte Art** endlich beruht auf Doppel-

berechnung derselben Seite, sei es durch verschiedene Combination von Dreiecken, sei es aus verschiedenen bekannten Seiten oder gar Grundlinien. So folgt in unserm Beispiele einerseits aus Dreieck N W L und anderseits aus der Dreieckfolge N W R und N R L

$$t_1 = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \text{und} \qquad t_2 = v \cdot \frac{\sin\eta}{\sin\delta} = a \cdot \frac{\sin\lambda \cdot \sin\eta}{\sin\mu \cdot \sin\delta}$$

also muss, da für richtige Winkel $t_1 = t_2$ werden muss,

$$1 = \frac{\sin[\beta - \lambda + (3) + \lambda + (4)] \sin[\delta + (6)] \sin[\mu + (8)]}{\sin[\lambda + (4)] \sin[\gamma + (5)] \sin[\mu + (8) + \eta - \mu + (9)]}$$

sein. Logarithmiren wir diese Gleichung, und bedenken, dass, sobald Δx klein ist, nach 60, 57 und 49

$$\log \sin(x + \Delta x) = \log \sin x + \frac{d \cdot \log \sin x}{dx} \cdot \Delta x = \log \sin x + M \cdot \sin 1'' \cdot \mathrm{Ctg}\, x \cdot \Delta x$$

gesetzt werden kann, wo $M = 0{,}4342945$ den Modulus der gemeinen Logarithmen bezeichnet oder $\log(M \cdot \sin 1'') = 4{,}3233592$ ist, so erhalten wir

$$\log \sin\lambda + \log \sin\gamma + \log \sin\eta - \log \sin\beta - \log \sin\delta - \log \sin\mu =$$
$$= M \cdot \sin 1'' \begin{bmatrix} (3)\,\mathrm{Ctg}\,\beta + (4)\,(\mathrm{Ctg}\,\beta - \mathrm{Ctg}\,\lambda) - (5)\,\mathrm{Ctg}\,\gamma + (6)\,\mathrm{Ctg}\,\delta + \\ + (8)\,(\mathrm{Ctg}\,\mu - \mathrm{Ctg}\,\eta) - (9)\,\mathrm{Ctg}\,\eta \end{bmatrix}$$

oder also mit Benutzung der obigen Daten, wenn alle Glieder mit 10000000 multiplicirt werden, noch die neue Bedingungsgleichung

$$98 = -3 \cdot (3) - 24 \cdot (4) - 22 \cdot (5) + 24 \cdot (6) + 19 \cdot (8) - 0 \cdot (9) \qquad \mathbf{13}$$

Die 5 Bedingungsgleichungen 9—13, welche alle die Form

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots = m_1 \qquad \mathbf{14}$$

haben, können nun nach den in 210 entwickelten Grundsätzen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z,... benutzt werden; da jedoch ihre Anzahl kleiner ist als die der Unbekannten, so wird die Lösung auf diesem Wege eine relativ sehr mühsame, lässt sich dagegen bei Benutzung eines von **Gauss** angedeuteten Fussweges bedeutend abkürzen: Da nämlich die x, y, z,... Fehler sind, also $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ein Minimum werden muss, so hat man

$$x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz + \ldots\ldots = 0 \qquad \mathbf{15}$$

während nach 14

$$a_1\, dx + b_1\, dy + c_1\, dz + \ldots\ldots = 0 \qquad \mathbf{16}$$

Multiplicirt man nun jede der Gleichungen 16 mit einem unbestimmten Factor k, und addirt die Producte, so erhält man mit Hülfe von 15 die identische Gleichung

$$\Sigma ak \cdot dx + \Sigma bk \cdot dy + \Sigma ck \cdot dz + \ldots = x\,dx + y\,dy + z\,dz + \ldots$$

welche für jeden Werth von dx, dy, dz,... bestehen muss, also die Gleichheiten

$$x = \Sigma ak \qquad y = \Sigma bk \qquad z = \Sigma ck \quad \ldots \qquad \mathbf{17}$$

bedingt. Substituirt man diese Werthe in die 14, so erhält man ebensoviele Gleichungen der Form

$$(a_1^2 + b_1^2 + \ldots)\,k_1 + (a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots)\,k_2 + \ldots = m_1 \qquad \mathbf{18}$$

als Unbekannte k vorhanden sind, — kann also aus diesen die k oder die sog. **Correlaten** von Gauss, und sodann endlich aus den 17 die x, y,... berechnen. Wenden wir dieses Verfahren auf unsere 9—13 an, so erhalten wir entsprechend den 17

$$\begin{array}{lll} (1) = k_2 + k_3 & (2) = -k_4 & (3) = k_3 + k_4 - 3\,k_5 \\ (4) = k_2 + k_4 - 24\,k_5 & (5) = k_1 + k_4 - 22\,k_5 & (6) = k_1 + 24\,k_5 \\ (7) = -k_1 + k_3 & (8) = k_2 + 19\,k_5 & (9) = k_3 \end{array} \qquad \mathbf{19}$$

und entsprechend den 18

$$
\begin{aligned}
-\ 1{,}1 &= 3\,k_1 \qquad\quad - k_3 + k_4 + 2\,k_5 \\
0{,}1 &= \qquad 3\,k_2 + k_3 + k_4 - 5\,k_5 \\
-\ 0{,}8 &= k_1 \qquad\ - 3\,k_3 - k_4 + 3\,k_5 \\
0{,}3 &= k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + 4\,k_4 - 49\,k_5 \\
98{,}0 &= 2\,k_1 - 5\,k_2 - 3\,k_3 - 49\,k_4 + 2006\,k_5
\end{aligned}
\qquad \mathbf{20}
$$

Aus letztern 5 Gleichungen ergeben sich

$k_1 = -1{,}521 \quad k_2 = -0{,}265 \quad k_3 = -0{,}913 \quad k_4 = +2{,}338 \quad k_5 = +0{,}105$

und damit nach 19 die Correctionen

(1) = − 1,178   (2) = − 2,333   (3) = + 1,105   (4) = − 0,452   (5) = − 1,498
(6) = + 0,999   (7) = + 0,608   (8) = + 1,730   (9) = − 0,913

welche in der That einerseits in den richtigen Grenzen bleiben, indem noch der benutzte Mittelwerth des meist-gemessenen Winkels $\eta - \mu$ die Unsicherheit $\pm 1'',10$ hat, — und anderseits den 5 Bedingungsgleichungen 9—13 in bester Weise genügen, da sie für die Seite rechts derselben

− 1,107   + 0,100   + 0,800   + 0,310   + 97,835

ergeben, während die Seite links

− 1,1   + 0,1   + 0,8   + 0,3   + 98

ist. — Legt man die erhaltenen Correctionen den gemessenen Winkeln bei, — stellt aus den so erhaltenen Werthen für die Dreiecke N W L, N W R und N R L die Winkel zusammen, und vertheilt die Excesse nach der bekannten Regel 189 : 3 auf die einzelnen Winkel, so erhält man, wenn noch zur Vergleichung die Secunden der früher benutzten unausgeglichenen und der entsprechend behandelten Winkel des damals nicht benutzten Dreiecks N W R beigeschrieben werden:

	°	′	″			°	′	″	″		″
$\alpha + \varepsilon =$	87	20	53,9	Δ N W L:	$\alpha =$	38	45	45,2	43,7	anstatt	42,7
$\varepsilon =$	48	35	8,7		$\beta =$	97	9	33,9	32,5		31,9
$\beta - \lambda =$	52	41	58,4		$\gamma =$	44	4	45,3	43,8		45,4
$\lambda =$	44	27	35,5			180	0	4,4	0,0		
$\gamma =$	44	4	45,3	Δ N W R:	$\alpha + \varepsilon =$	87	20	53,9	52,3	anstatt	53,7
$\delta =$	41	12	30,4		$\lambda =$	44	27	35,5	34,0		34,4
$\gamma + \delta =$	85	17	15,7		$\mu =$	48	11	35,2	33,7		31,9
$\mu =$	48	11	35,2			180	0	4,6	0,0		
$\eta - \mu =$	42	0	50,7	Δ N R L:	$\varepsilon =$	48	35	8,7	7,0	anstatt	9,2
Nach 106 war					$\delta =$	41	12	30,4	28,7		27,6
$a = 44555^m,29$					$\eta =$	90	12	25,9	24,3		28,2
$\log a = 4{,}6488992$						180	0	5,0	0,0		

Nach den oben aufgestellten Formeln für die beiden t ergeben sich nun mit den ausgeglichenen Winkeln die übereinstimmenden Werthe

$$\log t_1 = 4{,}8031110 \qquad \log t_2 = 4{,}8031112$$

während aus den unausgeglichenen Winkeln die merklich differirenden Werthe

$$\log t_1 = 4{,}8031077 \qquad \log t_2 = 4{,}8031181$$

folgen. Es hat also wirklich die Ausgleichung einen nicht unerheblichen Gewinn erzielt; aber dabei ist auch theils der relativ grosse Zeitaufwand nicht zu übersehen, — theils zu bedenken, dass, wenn den aus 1 und 2 Dreiecken mittelst den unausgeglichenen Winkeln erhaltenen Werthen die Gewichte 2 und 1 beigelegt werden, ihr Mittel gerade auch $\log t = 4{,}8031112$ ergibt.

225. Die Messung der Höhenwinkel. Um mit einem Theodoliten Höhenwinkel oder Zenithdistanzen messen zu können, ist entweder (vergl. 226) am Fernrohr nach seiner Längenrichtung eine Libelle angehängt, um es horizontal stellen und so direct den Winkel einer Gesichtslinie mit der Horizontalen messen zu können, — oder es lässt sich, wie namentlich beim astronomischen Theodoliten, das Fernrohr durchschlagen, und so in zwei um 180° verschiedenen Stellungen des Horizontalkreises auf denselben Gegenstand einstellen, wo nun die halbe Summe der Ablesungen am Höhenkreise den Zenithpunct, die halbe Differenz die Zenithdistanz gibt. — Bei dem Spiegelsextanten misst man den der doppelten Höhe gleichen Winkel zwischen einem Gegenstande und seinem Spiegelbilde in einem Quecksilber- oder Spiegelhorizonte. — Aus dem Höhenwinkel α kann man bei kleiner Horizontaldistanz b die Höhe nach $h = b \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha$ berechnen, — während bei grösserer sowohl der Depression des Horizontes (378), als der terrestrischen Refraction (390) Rechnung getragen werden muss, wenn diese sog. **trigonometrische Höhenmessung** wesentlich besser als die barometrische (275), oder gar mit einem Nivellement (226) vergleichbar sein soll.

Ist A ein Gegenstand, B sein Bild in einem horizontalen Spiegel C, h die Höhe des Auges über diesem Letztern, d die Horizontaldistanz des Auges von A und B, β der Elevationswinkel von A, α der Depressionswinkel von B, und x die Höhe von A über der Spiegelebene, so hat man

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{x+h}{d} \qquad \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{x-h}{d}$$

$$\mathrm{Tg}\,\alpha - \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{2h}{d}$$

oder nach leichter Reduction

$$\mathrm{Sin}\,(\alpha - \beta) = \frac{2h}{d} \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\beta \qquad 1$$

und somit

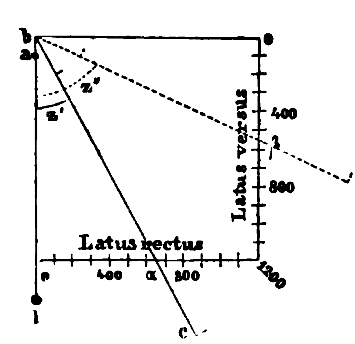
$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{2h\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}{d}$$

oder nahe

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{h}{d\,\mathrm{Sin}\,1''} \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\beta \qquad 2$$

Es geht hieraus hervor, dass für einen etwas entlegenen Gegenstand wirklich der Winkel zwischen ihm und seinem Bilde in einem horizontalen Spiegel statt seinem doppelten Höhenwinkel gesetzt werden kann. — Bei Anwendung des Sextanten auf dem Meere, wo natürlich von der Anwendung eines Spiegels oder von einem sog. **künstlichen Horizont** keine Rede sein kann, wird der Winkelabstand von dem durch die scheinbare Meeresgrenze bestimmten sog. **scheinbaren Horizont** gemessen, der dann aber um die sog. **Kimmtiefe** (vergl. 378) vermindert werden muss, um die Höhe zu erhalten. — Noch mag angeführt werden, dass man in früherer Zeit zum Messen der Höhenwinkel oder Zenithdistanzen noch eine ganze Reihe von

Instrumentén construirte. Ganz besonders beliebt war lange das von **Purbach** erfundene sog. **Quadratum geometricum**, dessen eine Seite mittelst einem in a aufgehängten Lothe l vertical gestellt wurde, während zwei andere Seiten, über welche sich der um b drehbare Diopterlineal b c bewegte, je in 12 Haupttheile (Hunderter) und jeder von diesen noch in 10 kleine Theile (Zehner) getheilt waren. Aus der einer Visur entsprechenden Ablesung α am **Latus rectus** oder β am **Latus versus**, konnte sodann die Zenithdistanz nach der Formel



$$\operatorname{Tg} z = \frac{\alpha}{1200} = \frac{1200}{\beta} \qquad 3$$

oder zur Zeit von Purbach, wo man erst Sinustafeln besass, nach der Formel

$$\operatorname{Sin} z = \frac{\operatorname{Tg} z}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 z}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1200^2 + \alpha^2}} = \frac{1200}{\sqrt{1200^2 + \beta^2}} \qquad 4$$

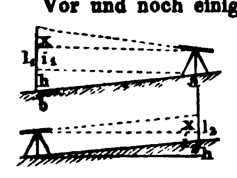
berechnet werden. — Für einige andere solche Winkel-Instrumente älterer Zeit mit Geradtheilung auf die Astronomie verweisend, mag zum Schlusse noch der von **Brander** in seiner Schrift „Die neue Art Winkel zu messen. Augsburg 1772 in 8.“ beschriebene „amphidioptrische“ Goniometer in Form eines Proportionalzirkels, als ein Curiosum ähnlicher Art aus neuerer Zeit citirt werden.

226. Das Nivellirinstrument. Speciell zum Nivelliren oder zum Bestimmen kleiner Höhendifferenzen wendet man ausser der Kanalwaage (268) ein auf einem Pyramidalstativ ruhendes Fernrohr mit Längslibelle an. Spielt die Libelle ein, so soll die Visur horizontal sein; gesetzt aber, letztere habe noch eine Elevation, so wird sie, wenn das Instrument in a und eine Messlatte (Mire) in einem um h tiefern Puncte b aufgestellt wird, die Messlatte in $l_1 = x + i_1 + h$ treffen, wo i_1 die Höhe des Oculars über a und x den durch jene Elevation verursachten Fehler bezeichnet. Wechselt man Instrument und Messlatte, so erhält man $l_2 = x + i_2 - h$, und es ergeben sich

$$2\,h = l_1 - l_2 - (i_1 - i_2) \qquad 2\,x = l_1 + l_2 - (i_1 + i_2)$$

Ist x gehoben, so kann man die Höhendifferenz zweier Puncte einfacher bestimmen, indem man das Instrument zwischen ihnen aufstellt, für beide Puncte die Latthöhe abliest, und ihre Differenz nimmt.

Vor und noch einige Zeit nach Erfindung der Röhrenlibelle, welche trotz ihrer Einfachheit und Sicherheit gar nicht so rasch als man hätte denken sollen, in allgemeinen Gebrauch kam, wurden alle möglichen, und mitunter sehr complicirten Maschinen zum Nivelliren in Vorschlag gebracht, worüber z. B. die ältesten Bände der Pariser-Memoiren und auch das von **La Hire** nach des Verfassers Tode



herausgegebene Werkchen „**Picard**, Traité du nivellement. Paris 1684 in 12, (Deutsch mit Zusätzen von Lambert, Berlin 1770 in 8.)“ nachzusehen. Für die neuere Nivellirkunst vergleiche, ausser den vielen in 211 und seither genannten Gesammtwerken über praktische Geometrie, z. B. „Friedrich **Meinert** (Göllschau in Schlesien 1757 — Schweidnitz 1828; erst Professor der Philosophie in Halle, dann der Fortification in Berlin), Anweisung zum Nivelliren und Profiliren. Halle 1790 in 8., — David **Gilly** (Schwedt 1748 — Berlin 1808; Ober-Baurath in Berlin), Praktische Anweisung zur Anwendung des Nivellirens. Berlin 1801 in 8. (2. A. 1805), — **Netto**, Praktische Anweisung zum Nivelliren. Berlin 1826 in 8., — Ferdinand von **Mitis**, Ingenieur: Das Nivellement mit einem neu erfundenen Instrumente. Wien 1831 in 4.; — Carl **Reinhold**, Anweisung zum praktisch richtigen Nivelliren, bestehend in Beschreibung und Abbildung eines verbesserten Nivellirinstrumentes. Berlin 1844 in 4. (Auch Crelle's Journal für Baukunst Bd. 20), — Simon **Stampfer** (Windisch-Matrey 1792; Professor der praktischen Geometrie in Wien), Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Wien 1845 in 8. (6. A. von Herr 1869), — etc.“ — Mit welcher Genauigkeit man jetzt nivelliren kann, zeigt unter Anderm das begonnene „Nivellement de précision de la Suisse“, für welches Emil **Kern** (Aarau 1830; Mechaniker in Aarau) vorzügliche Instrumente geliefert hat.

Die Mechanik.

La vera fede non è ostile alla scienza, ma ambedue sono raggi di un medesimo sole destinati ad illuminare nella via della verità le nostre cieche e deboli intelligenze.
(Secchi.)

XXIII. Die reine Statik.

227. Vorbegriffe. Jede Bewegung erfordert **Zeit**, und jede Veränderung eines Bewegungszustandes eine Ursache, eine sog. **Kraft**, die nach Angriffspunct, Grösse und Richtung zu bestimmen ist. Wirken mehrere Kräfte zugleich, so heissen sie **Componenten**, — eine sie ersetzende einzelne Kraft nennt man **Resultante**, und ist Letztere Null, so sagt man, die Kräfte stehen im **Gleichgewichte**. Die Lehre vom Gleichgewichte nennt man **Statik**, die Lehre von der Bewegung **Dynamik**, beide zusammen **Mechanik**. Die Mechanik soll übrigens (s. 1) hier nur insoweit behandelt werden, als sie eine rein mathematische Disciplin ist; für die Mechanik des materiellen und schweren Punctes, für die sog. einfachen Maschinen, etc., ist auf den von der Physik handelnden Abschnitt zu verweisen.

Für die Mechanik können folgende Werke verglichen werden: „**Varignon**, Projet d'une nouvelle mécanique. Paris 1687 in 4. (2 éd. 1725, 2 Vol.), — Jakob **Hermann** (Basel 1678 — Basel 1733; Professor der Mathematik zu Padua, Frankfurt a. O. und Petersburg, zuletzt der Moralphilosophie in Basel), Phoronomia. Amstelodami 1716 in 4., — **Euler**, Mechanica. Petrop. 1736, 2 Vol. in 4. (Deutsch von Wolfer's, Greifswalde 1848—1853, 3 Bde. in 8.), und: Theoria motus corporum solidorum et rigidorum. Rostochii 1765 in 4., — **d'Alembert**, Traité de dynamique. Paris 1743 in 4. (Nouv. éd. 1758), — **Lagrange**, Mécanique analytique. Paris 1788 in 4. (3 éd. par Bertrand 1853, 2 Vol.), — Joh. Albert **Eytelwein** (Frankfurt a. M. 1764 — Berlin 1848; Ober-Landesbau-Director und Mitglied der Academie in Berlin; vergl. Lobrede von Encke in Berl. Abh. 1849), Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Berlin 1801 in 8. (3. A. von Forstner, Leipzig 1842), und: Handbuch der Statik fester Körper. Berlin 1808, 3 Bde. in 8., — **Poinsot**, Eléments de statique. Paris 1804 in 8. (9 éd. 1848), — Giuseppe **Venturoli**

(Bologna 1768 — Bologna 1846; Professor der Mathematik zu Bologna), Elementi di Meccanica. Bologna 1806—1807, 2 Vol. in 8. (7 ed. Milano 1846—1847), — **Poisson**, Traité de mécanique. Paris 1811, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1833; deutsch von E. Schmidt, Stuttgart 1825—1826), — **Whewell**, A treatise on dynamics. Cambridge 1823 in 8. (7. ed. 1847), — **Möbius**, Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837, 2 Bde. in 8., — **Navier**, Résumé des leçons de mécanique données à l'école polytechnique. Paris 1841 in 8. (Deutsch von L. Meyer, Hannover 1855), — **Weisbach**, Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Braunschweig 1845—1860, 3 Bde. in 8. (4. A. 1862), — **Duhamel**, Cours de mécanique. Paris 1845—1846, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1853—1854; deutsch von Wagner, Braunschweig 1853), — Jakob Philipp **Kulik** (Lemberg 1793; Professor der Mathematik zu Gratz und Prag), Höhere Mechanik. Leipzig 1846 in 8., — Joseph Wolfgang von **Deschwanden** (Stanz 1819 — Zürich 1866; Professor der darstellenden Geometrie am schweiz. Polytechnikum), Abriss der Mechanik. Zürich 1848 in 8., — Ottaviano Fabrizio **Mossotti** (Novara 1791; Professor der Mathematik, Physik und Astronomie zu Pisa), Lezioni di meccanica rationale. Firenze 1850 in 8., — Jakob Ferdinand **Redtenbacher** (Steyer 1809 — Carlsruhe 1863; Professor der Mechanik in Zürich und Carlsruhe), Prinzipien der Mechanik. Mannheim 1852 in 8. (2. A. 1859), — **Jullien**, Problèmes de mécanique. Paris 1855, 2 Vol. in 8., — Charles-Eugène **Delaunay** (Lusigny im Dép. Aube 1816; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie in Paris), Traité de mécanique rationelle. Paris 1856 in 8., — **Schellbach**, Neue Elemente der Mechanik. Berlin 1860 in 8., — **Sturm**, Cours de mécanique. Paris 1861, 2 Vol. in 8. (Ouvr. posth. publ. par Eug. Prouhet), — Carl Heinrich Alexander **Holtzmann** (Carlsruhe 1811; Professor der Mathematik zu Carlsruhe, der Mechanik zu Stuttgart), Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Stuttgart 1861 in 8.), — **Finck**, Mécanique rationelle. Strasbourg 1864—1865, 3 Part. in 8., — Jacques-Edmond-Emile **Bour** (Gray-en-Franche-Comté 1832 — Paris 1866; Professor der Mechanik in Paris), Cours de mécanique et machines professé à l'école polytechnique. Fasc. 1—2. Paris 1865—1868 in 8., — **Jacobi**, Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866 in 4. (Nach seinem Tode herausgegeben von A. Clebsch.), — A. **Fuhrmann**, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. I. Leipzig 1867 in 8., — **Moigno**, Leçons de mécanique. Vol. 1. Paris 1868 in 8., — etc."

228. Das sog. Kräftenparallelogramm. Zwei Kräfte, welche, in entgegengesetzter Richtung an einem Puncte angebracht, sich Gleichgewicht halten, heissen **gleich**; fügt man daher Kräften eine ihrer Resultante gleiche, aber entgegengesetzte Kraft bei, die sog. **Gegenresultante**, so ist Gleichgewicht. — Der Angriffspunct einer Kraft darf in ihrer Richtung verlegt werden, vorausgesetzt, der neue Angriffspunct sei mit dem alten starr verbunden. — Die Resultante von Kräften, welche nach einer Geraden wirken, ist gleich ihrer algebraischen Summe. — Die Resultante zweier gleichen Kräfte halbirt nothwendig ihren Winkel; folglich steht ein Rhombus im Gleichgewichte, wenn man an zwei Gegenecken desselben je zwei gleiche, nach den Seiten wirkende Kräfte anbringt. — Theilt man die Seiten eines Parallelogrammes im Verhältnisse ihrer Länge, und

verbindet die entsprechenden Theilpuncte der Gegenseiten, so zerfällt es in Rhomben. Bringt man nun an je zwei entsprechenden Gegenecken jedes dieser Rhomben gleiche Kräfte an, so besteht einerseits Gleichgewicht; anderseits heben sich alle Kräfte im Innern auf, und die längs den Seiten des Parallelogrammes wirkenden Kräfte lassen sich auf zwei Paare von Kräften reduciren, welche an zwei Gegenecken wirken und im Verhältnisse der Seiten stehen. Die Resultanten dieser Paare müssen einerseits gleich sein, anderseits im Gleichgewichte stehen, also nach der Diagonale wirken, und diese fällt offenbar mit der Diagonale des von einem der Kräftenpaare bestimmten Parallelogrammes zusammen, so dass diese die Richtung der Resultante darstellt. — Sind drei Kräfte im Gleichgewichte, so muss jede derselben die Gegenresultante der beiden andern sein, d. h. mit der Diagonale ihres Parallelogrammes eine Gerade bilden, — was nur eintrifft, wenn jede der Kräfte gleich der Diagonale des Parallelogrammes der beiden andern ist. — Die Resultante R zweier auf einen Punct wirkenden Kräfte P und Q fällt somit der Richtung und Grösse nach mit der Diagonale des von ihnen bestimmten Parallelogrammes zusammen, und man hat (103, 104)

$$P : Q : R = \operatorname{Sin}(\alpha - \varphi) : \operatorname{Sin}\varphi : \operatorname{Sin}\alpha \qquad 1$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\,\operatorname{Cos}\alpha \qquad 2$$

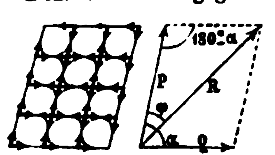
$$\operatorname{Tg}\varphi = \frac{Q\,.\operatorname{Sin}\alpha}{P + Q\,.\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{q\operatorname{Sin}\alpha}{1 + q\operatorname{Cos}\alpha} \quad \text{wo} \quad q = \frac{Q}{P} \qquad 3$$

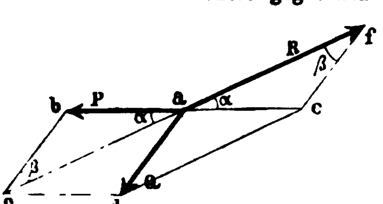
Ist speciell $\alpha = 90^0$, so wird

$$\operatorname{Tg}\varphi = q \qquad R = \sqrt{P^2 + Q^2} = P\,.\operatorname{Sec}\varphi \qquad 4$$

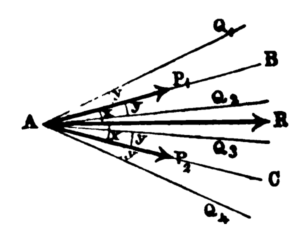
und zwar, wenn $q < 1$, sehr annähernd (nach 43) $R = P + \frac{q}{2}\,Q$ oder nach Poncelet $R = 0{,}96\,.\,P + 0{,}40\,.\,Q$.

Dem im Texte gegebenen Beweise, dass die Resultirende zweier Kräfte der Richtung nach mit der Diagonale des von ihnen bestimmten Parallelogrammes zusammenfallen muss, ist höchstens beizufügen, dass ich ihn schon vor circa 30 Jahren einem von **Duchayla** (vergl. Corresp. de l'école polyt., Paris 1808) veröffentlichten, nachbildete, — und auch die am Schlusse des Textes gegebenen Formeln bedürfen wohl keiner weitern Ableitung. Dagegen dürfte es nicht unzweckmässig sein, den im Texte gegebenen Beweis, dass die Diagonale auch der Grösse nach die Resultirende darstellt, etwas weiter auszuführen: Ist die in Verlängerung der Diagonale a c liegende Kraft R die Gegenresultante von P und Q, so sind die





Kräfte P, Q, R im Gleichgewicht, — also muss P in der Richtung der Diagonale ae liegen; dann sind aber die Dreiecke aef und abc congruent, da sie ef = ad = bc und die Winkel α und β als Scheitelwinkel und Wechselwinkel von Parallelen gleich haben; also ist R = af = ac, w. z. b. w. — Von den verschiedenen Wegen, auf welchen der Beweis des so ziemlich gleichzeitig von **Newton** in seinen Principien (A. 1687, pag. 13—15) ausgesprochenen und von **Varignon** in seinem Werke (s. 227) als Princip in die Mechanik eingeführten Kräftenparallelogrammes versucht worden ist, und von denen der durch Daniel **Bernoulli** im ersten Bande der Petersburger Commentarien gegebene als der erste strenge angesehen wird, hat der folgende, von **Poisson** in seiner Mechanik (s. 227) verfolgte, vielen Beifall gefunden: Wirken auf einen Punct A nach beliebigen Richtungen AB und AC zwei gleiche Kräfte $P_1 = P_2$, so wird ihre Resultirende R einerseits ihren Winkel 2x halbiren, und anderseits zu ihnen in einem nur von der Grösse dieses Winkels abhängigen Verhältnisse stehen, so dass man



$$R = P \cdot \varphi(x) \qquad 5$$

setzen kann. Entsprechend kann man sich P_1 und P_2 als Resultirende je zweier mit ihnen einen gleichen Winkel y bildenden gleichen Kräfte $Q_1 Q_2$ und $Q_3 Q_4$ denken, und

$$P = Q \cdot \varphi(y) \qquad 6$$

setzen, — ferner als Summe der Resultirenden von $Q_1 Q_4$ und $Q_2 Q_3$

$$R = Q \cdot \varphi(x+y) + Q \cdot \varphi(x-y)$$

so dass mit Benutzung von 5, 6 und 60 : 2

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) =$$

$$= \varphi(x) + \frac{y}{1}\varphi'(x) + \frac{y^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{y^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \frac{y^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(x) + \ldots$$

$$+ \varphi(x) - \frac{y}{1}\varphi'(x) + \frac{y^2}{1.2}\varphi''(x) - \frac{y^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \frac{y^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(x) - \ldots$$

$$= 2\left[\varphi(x) + \frac{y^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{y^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(x) + \ldots\right]$$

oder

$$\varphi(y) = 2\left[1 + \frac{y^2}{1.2} \cdot \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{y^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{\varphi^{IV}(x)}{\varphi(x)} + \ldots\right] \qquad 7$$

folgt. Nun ist aber $\varphi(y)$ offenbar von x unabhängig, also müssen die Quotienten $\varphi''(x) : \varphi(x)$, $\varphi^{IV}(x) : \varphi(x)$, etc. ebenfalls von x unabhängig oder constant sein. Setzt man aber z. B.

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -a^2 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 \cdot \varphi(x)}{d x^2} = \varphi''(x) = -a^2 \cdot \varphi(x)$$

so folgen

$$\varphi^{IV}(x) = \frac{d^4 \varphi(x)}{d x^4} = -a^2 \frac{d^2 \cdot \varphi(x)}{d x^2} = + a^4 \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi^{VI}(x) = \frac{d^6 \varphi(x)}{d x^6} = a^4 \cdot \frac{d^2 \varphi(x)}{d x^2} = - a^6 \cdot \varphi(x)$$

etc., und hiefür geht 7 mit Hülfe von 50 : 6 in

$$\varphi(y) = 2\left[1 - \frac{a^2 y^2}{1.2} + \frac{a^4 y^4}{1.2.3.4} - \frac{a^6 y^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right]$$

$$= 2 \cdot \mathrm{Cos}\, a y \qquad 8$$

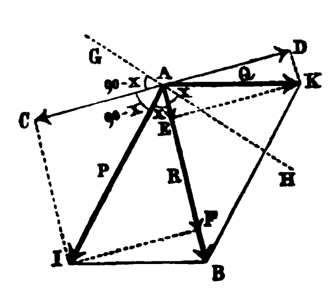
über. Entsprechend ist daher auch

$\varphi(x) = 2 . \text{Cos}\, a x$ oder nach 5 $R = 2 P . \text{Cos}\, a x$ **9**

Die Resultirende R **muss** aber und **kann nur** Null werden, wenn $x = 90^0$ ist, — also muss a eine ganze und ungerade Zahl sein, kann aber nicht 3, 5, ... werden, da sonst R für $x = 30^0$, 18^0, ... ebenfalls Null würde; es bleibt also nur $a = 1$ möglich, so dass 9 in

$R = 2 P . \text{Cos}\, x$ oder $P = \frac{1}{2} R . \text{Sec}\, x$ **10**

übergeht. Mit Hülfe dieser letztern Beziehung lässt sich nun aber das Kräftenparallelogramm leicht nachweisen: Hat man nämlich zwei an A zu einander senkrecht wirkende Kräfte AC und AF, — ergänzt ihr Rechteck, — zieht die Diagonale AI, welche mit AF den Winkel x bildet, und dann noch GH so, dass sie ebenfalls mit AF diesen Winkel x einschliesst, — so kann man nach 10 die Kräfte AF und AC in je zwei nach AI und GH wirkende Kräfte



$\frac{1}{2} AF . \text{Sec}\, x = \frac{1}{2} AI$

und

$\frac{1}{2} AC . \text{Sec}\,(90^0 - x) = \frac{1}{2} AI$

zerlegen; es heben sich also die Componenten nach GH auf, und die Resultirende P von AC und AF besteht aus der AI gleichen Summe der Componenten nach AI, oder sie wird der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale dargestellt. — Wirken aber auf A irgend zwei Kräfte P und Q, und zerlegt man jede derselben gestützt auf den so eben gefundenen Satz nach der Diagonale AB ihres Parallelogrammes und der dazu Senkrechten CD, — so sind offenbar die nach CD wirkenden Componenten AC und AD gleich, — heben sich also; es besteht somit die Resultirende R aus den nach AB wirkenden Componenten AF und AE, deren Summe gleich AB ist, d. h. sie wird der Richtung und Grösse nach durch die Diagonale dargestellt, w. z. b. w. — Es ist dieser Beweis in der That ganz ingenieus, — einzig hat er scheinbar in der zur Ableitung von 8 gemachten Annahme, es sei eine gewisse Constante gleich $(-a^2)$ zu setzen, eine Willkürlichkeit; es hätte zugefügt werden sollen, dass man für $(+a^2)$ nach 146 Cof a y und Cof a x, folglich für $x = \frac{1}{2}\pi$ nicht $R = 0$ erhalten würde. Poisson hat auch für die zweite Auflage seiner Mechanik den Beweis etwas abgeändert, um sich aber nur wieder an einer andern Stelle einen kleinen Sprung zu erlauben, — und Aehnliches habe ich zur Zeit an verschiedenen andern der üblichen Beweise auszusetzen gefunden (vergl. z. B. das in 82 Gesagte), so dass ich schliesslich immer wieder auf den im Texte Gegebenen zurückkam. — Vergl. für die Geschichte dieses Satzes „Joh. Heinrich **Westphal** (Schwerin 1794 — Termini in Sicilien 1831; meist auf Reisen), Demonstrationum compositionis virium expositio de iisque judicium. Gotting. 1817 in 4., — Karl Friedrich Andreas **Jacobi** (Krahwinkel bei Gotha 1795 — Schulpforta 1855; Professor der Mathematik und Physik in Schulpforta), Præcipuorum a Newtono conatum compositionum virium demonstrandi recensio. Gotting. 1817 in 4., — A. H. C. **Westphal**, Ueber die Beweise für das Parallelogramm der Kräfte. Göttingen (s. a., aber nach 1860) in 8., — etc."

229. Allgemeine Regeln für das Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte. Bildet man einen Zug, dessen Seiten den auf einen Punct

wirkenden Kräften gleich und parallel sind, so stellt (228) die Schlussseite desselben der Grösse und Richtung nach die Resultante sämmtlicher Kräfte dar. — Von zwei (in der Ebene) oder drei (im Raume) zu einander senkrechten Componenten ist (228) jede gleich der Resultante multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit ihr bildet. Heissen im ersten Falle die Winkel a und b, — im zweiten α, β, γ, so hat man (93, 94)

$$\mathrm{Cos}^2\,a + \mathrm{Cos}^2\,b = 1 \qquad \mathrm{Cos}^2\,\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\beta + \mathrm{Cos}^2\,\gamma = 1 \qquad 1$$

Um die Resultante mehrerer auf einen Punct wirkender Kräfte zu berechnen, zerlegt man jede der Kräfte nach denselben zwei oder drei zu einander senkrechten Richtungen, nimmt nach jeder dieser Richtungen die algebraische Summe, und sucht nun zu diesen Summen die Resultante.

Wirken auf einen Punct die Kräfte P_1, P_2, ... und sind die Winkel, welche dieselben mit drei zu einander senkrechten Axen bilden, bekannt, so geben offenbar die Formeln

$$R = \sqrt{[\Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, X)]^2 + [\Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, Y)]^2 + [\Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, Z)]^2} \qquad 2$$

$$\mathrm{Cos}\,(R, X) = \frac{\Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, X)}{R} \qquad \mathrm{Cos}\,(R, Y) = \frac{\Sigma P\, \mathrm{Cos}\,(P, Y)}{R}$$

$$\mathrm{Cos}\,(R, Z) = \frac{\Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, Z)}{R} \qquad 3$$

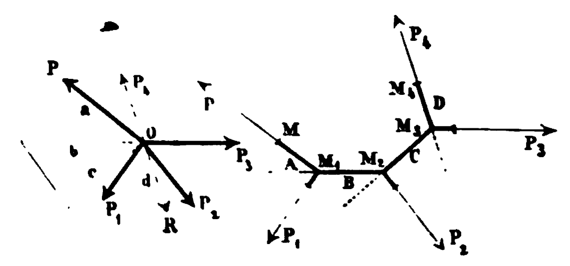
Grösse und Richtung ihrer Resultirenden, und es sind daher die erwähnten Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Summen

$$\Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, X) = \Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, Y) = \Sigma P \,.\, \mathrm{Cos}\,(P, Z) = 0 \qquad 4$$

sind. Denkt man sich den Punct, auf welchen die Kräfte wirken, um eine Grösse ϱ nach irgend einer Richtung verschoben, und sind p_1 p_2 ... die Projectionen dieser Verschiebung auf die einzelnen Kräfte, so erhält man mit Hülfe von 4 und 194 : 8

$$\begin{aligned} \Sigma P p &= \Sigma P \varrho\, \mathrm{Cos}\,(\varrho, P) = \\ &= \varrho\, \Sigma P\, [\mathrm{Cos}\,(\varrho, X)\, \mathrm{Cos}\,(P, X) + \mathrm{Cos}\,(\varrho, Y)\, \mathrm{Cos}\,(P, Y) + \mathrm{Cos}\,(\varrho, Z)\, \mathrm{Cos}\,(P, Z)] \\ &= \varrho\, \mathrm{Cos}\,(\varrho, X)\, \Sigma P\, \mathrm{Cos}\,(P, X) + \varrho\, \mathrm{Cos}\,(\varrho, Y)\, \Sigma P\, \mathrm{Cos}\,(P, Y) + \\ &\quad + \varrho\, \mathrm{Cos}\,(\varrho, Z)\, \Sigma P\, \mathrm{Cos}\,(P, Z) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad 5$$

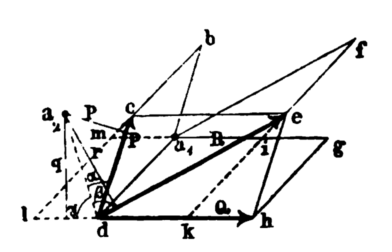
und es lassen sich somit die Gleichungen 4 in diese Eine Gleichung 5 zusammenfassen, von welcher wir in 234 einen wichtigen Gebrauch machen werden. — Bildet man nach der im Texte gegebenen Anleitung einen Zug, dessen Seiten den auf einen Punct O wirkenden Kräften P, P_1, P_2 und P_3 gleich und parallel sind, so stellt b die Resultirende von P und P_1, — c die Resultirende von P, P_1 und P_2, — die Schlussseite d endlich die Resultirende R aller vier Kräfte dar, — und wenn man ihnen daher eine R



gleiche und entgegengesetzte Kraft P_4 zufügt, so stehen die Kräfte $P \ldots P_4$ im Gleichgewichte. Bringt man anderseits dieselben Kräfte theils an den Endpuncten M und M_4 eines biegsamen Seiles, theils an Hülfsseilchen an, welche in den Zwischenpuncten M_1, M_2 und M_3 desselben befestigt sind, so halten sich die Kräfte noch Gleichgewicht, sobald A, B, C, D der Reihe nach a, b, c, d parallel sind: Es kann nämlich an M_1 nur Gleichgewicht sein, wenn die Resultirende von P und P_1 in die Verlängerung von B fällt, da die übrigen Kräfte ihren Gegenzug nach B ausüben, — ähnlich bei M_2, wo diese Resultirende von P und P_1 mit P_2 eine neue Resultirende bildet, etc. Leider erlaubt hier der Raum nicht, diese merkwürdige Correspondenz zwischen dem Kräftenpolygone und dem sog. **Seilpolygone**, für welches natürlich 4 noch besteht, weiter zu verfolgen, und es muss hiefür auf das schon in 89 citirte Werk von **Culmann** hingewiesen werden. Ein besonders wichtiger, specieller Fall des Seilpolygons, die Kettenlinie, wird übrigens in 234 noch einlässlich behandelt werden.

230. Die sog. Momente. Fällt man von irgend einem Puncte eine Senkrechte auf eine Kraft, so heisst das Product der Senkrechten in die Kraft **Moment der Kraft in Beziehung auf den Punct.** — Das Moment der Resultante zweier Kräfte einer Ebene in Beziehung auf einen Punct der Letztern ist (103, 97) gleich der Summe oder Differenz ihrer Momente in Beziehung auf denselben Punct, je nachdem der Punct ausserhalb oder innerhalb des Winkels der beiden Kräfte liegt. Speciell sind die Momente zweier Kräfte in Beziehung auf einen Punct ihrer Resultante einander gleich.

Dieser Momentensatz, den schon **Varignon** in seiner neuen Mechanik (s. 227) ausgesprochen hat, kann entweder als Flächensatz oder durch trigonometrische Beziehungen erwiesen werden: Liegt z. B. der Punct innerhalb in a_1, so hat man eigentlich nur zu beweisen, dass



$$abcd + adef = adhg$$

Nun ist offenbar $abcd = amld$, und $adef = adki$, — und wegen $lk = ce = dh$ ist ihre Summe $iklm = adhg$. — Liegt dagegen der Punct ausserhalb in a_2, so hat man

$$P \cdot p + Q \cdot q = R \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\beta + \gamma)}{\operatorname{Sin}(\alpha + \gamma)} \cdot a_2 d \cdot \operatorname{Sin} \alpha + R \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\beta - \alpha)}{\operatorname{Sin}(\alpha + \gamma)} \cdot a_2 d \cdot \operatorname{Sin} \gamma$$
$$= R \cdot a_2 d \cdot \operatorname{Sin} \beta = R \cdot r$$

w. z. b. w.

231. Der Mittelpunct der parallelen Kräfte und der Schwerpunct. Zwei Kräfte P und Q, deren Angriffspuncte mit einem entweder wirklich festen oder wenigstens durch eine hinlänglich grosse Kraft gehaltenen Puncte verbunden sind, stehen im Gleichgewichte, wenn ihre Resultante durch diesen festen Punct geht, d. h. nach 230, wenn ihre Momente in Beziehung auf denselben gleich sind. Bezeichnet

α den Winkel der von dem festen Puncte auf die Kräfte gefällten Senkrechten, so stellt nach 104

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,P\,Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha} \qquad 1$$

den Druck der Kräfte auf den festen Punct vor. Die Resultante paralleler Kräfte ist somit gleich ihrer Summe oder Differenz, je nachdem die Kräfte gleiche oder entgegengesetzte Lage haben; dabei theilt der Angriffspunct der Resultante die Verbindungslinie der Angriffspuncte der Componenten im ersten Falle von Innen, im zweiten Falle von Aussen im reciproken Verhältnisse der Kräfte, und heisst **Mittelpunct der parallelen Kräfte.** Sind alle auf ein System von Puncten wirkenden parallelen Kräfte gleich gross und gleich gerichtet, so heisst ihr Mittelpunct **Schwerpunct,** jede durch ihn gehende Gerade **Schweraxe.** Für die Regeln zum Auffinden der Schwerpuncte, etc. vergl. 133, 140, 141, 185, 196, 204 und 205.

Ist $\alpha = 0, 90, 180^0$, so wird nach 1 offenbar $R = P - Q$, $\sqrt{P^2 + Q^2}$, $P + Q$. Für $P = Q$ geht 1 in

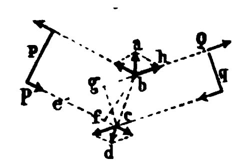
$$R = P\sqrt{2\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)} = 2\,P\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2} \qquad 2$$

über, so dass für $\alpha = 60^0$ auch $R = P = Q$ wird.

232. Die sog. Kräftenpaare. Die Resultirende zweier entgegengesetzten parallelen und gleichen Kräfte ist (231) Null, und wirkt in der Entfernung unendlich, — d. h. zwei solche Kräfte lassen sich nicht durch Eine Kraft ersetzen, und bilden somit ein elementares Kräftensystem unter dem Namen **Gegenpaar** oder **Kräftenpaar** (couple). — Die algebraische Summe der Momente der zwei Kräfte eines Gegenpaares in Beziehung auf irgend einen Punct seiner Ebene ist gleich dem Producte aus einer der gleichen Kräfte in den senkrechten Abstand der Kräfte. Dieser Abstand heisst **Breite,** das Product **Moment** des Paares. Dabei entspricht jedem Paare ein bestimmter Sinn, in dem es zu drehen sucht. — Haben zwei Kräftenpaare einer Ebene bei entgegengesetztem Sinne gleiche Momente ($P\,.\,p = Q\,.\,q$), und verlegt man die Angriffspuncte der Kräfte paarweise (s. Fig.) in die Durchschnittspuncte (b und c) ihrer Richtungen, um je die Resultirende bestimmen zu können, so werden die Resultirenden nicht nur gleich, sondern fallen (107) nach entgegengesetzter Richtung in dieselbe Gerade (a b c d), — d. h. es stehen die beiden Kräftenpaare im Gleichgewichte.

Der Beweis des letzten, wichtigen Satzes lässt sich auf folgende Weise führen: Es verhält sich

$$a\,h : b\,h = P : Q = q : p = c\,g : b\,f = e\,c : b\,e$$



also ist, da überdiess $\angle h = \angle e$, $\triangle abh \backsim \triangle bec$, — somit $\angle abh = \angle cbe$, — folglich muss ab in die Verlängerung von bc fallen. Entsprechend lässt sich zeigen, dass auch cd in der Verlängerung von bc liegt Die Gleichheit $ab = cd$ endlich ist leicht ersichtlich.

233. Zusammensetzung der Paare. Jedes Gegenpaar einer Ebene kann (232) durch jedes Gegenpaar derselben Ebene von gleichem Sinne und Momente ersetzt werden; es können somit alle Paare einer Ebene auf gleiche Breite gebracht, und dann durch algebraische Summirung der Kräfte auf Ein Paar reducirt werden. — Zwei Paare in verschiedenen Ebenen lassen sich auf gleiche Breite bringen, an die Kante versetzen, und dann mit Hülfe des Kräftenparallelogrammes (228) zu Einem Paare vereinigen.

Ein Paar der Kraft P und Breite p lässt sich nach 232 durch ein Paar der Kraft Pp und Breite 1 ersetzen, — folglich machen alle Paare einer Ebene ein Paar der Kraft ΣPp und Breite 1, oder ein Paar der Kraft $\frac{1}{a} . \Sigma Pp$ und Breite a aus, — wobei jedoch unter Σ die algebraische Summe zu verstehen ist, da offenbar Paare von entgegengesetztem Sinne in Abzug zu bringen sind. — Liegt in einer Ebene ein Paar der Kraft P und Breite p, — in einer zweiten, mit ihr den Winkel α bildenden Ebene ein Paar der Kraft Q und Breite q, so lassen sich beide als Paare der Kräfte $\frac{1}{a} Pp$ und $\frac{1}{a} Qq$ und der gemeinschaftlichen Breite a an die Kante bringen, und sodann nach 228 zu einem Paare derselben Breite mit der Kraft

$$\frac{1}{a} \sqrt{P^2 p^2 + Q^2 q^2 \pm 2 P Q p q \cos \alpha}$$

zusammenfassen, wo das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem die beiden Paare, beim Drehen des Einen um α, gleichen oder entgegengesetzten Sinn zeigen.

234. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. Wirken auf eine Reihe von Puncten der Coordinaten (A, B, C) Kräfte P, so zerlege man (229) jede nach den drei Axen in

$$X = P . \cos \alpha \qquad Y = P . \cos \beta \qquad Z = P . \cos \gamma \qquad 1$$

ersetze Z (s. Fig.) durch Z_1, Z_2 und Z_3, drehe das Paar $Z_2\ Z_3$ um 90° nach $Z_4\ Z_5$ und zerlege es (233) in die Paare $X'\ X''$ und $Y'\ Y''$, — und entsprechend verfahre man mit X und Y. Da nun die Momente der Paare

$$\begin{aligned} \varrho X' &= \varrho Z_4 \cos b = A . Z = A . P . \cos \gamma \\ \varrho Y' &= \varrho Z_4 \sin b = B . Z = B . P . \cos \gamma \end{aligned} \qquad 2$$

etc. sind, so erhält man statt den sämmtlichen Kräften P:

1) nach den drei Axen wirkend, die Kräfte

$$\Sigma P . \cos \alpha \qquad \Sigma P . \cos \beta \qquad \Sigma P . \cos \gamma \qquad 3$$

2) unter der Annahme, dass ein Drehen von x um y nach z, von y um z nach x, und von z um x nach y als positiv betrachtet

werde, — in den Ebenen X Y, Y Z und Z X die Paare

$$\begin{array}{l} \Sigma P (B . \text{Cos}\, \alpha - A . \text{Cos}\, \beta) \\ \Sigma P (C . \text{Cos}\, \beta - B . \text{Cos}\, \gamma) \\ \Sigma P (A . \text{Cos}\, \gamma - C . \text{Cos}\, \alpha) \end{array} \qquad 4$$

Für den Fall des Gleichgewichtes müssen sämmtliche 6 Ausdrücke 3 und 4 Null sein, — die drei ersten, wenn keine fortschreitende, — die drei letzten, wenn keine drehende Bewegung statt haben soll. — Um zu untersuchen, ob die Kräfte P, wenn sie nicht im Gleichgewichte stehen, durch eine einzelne an einem Puncte (𝔄, 𝔅, ℭ) wirkende Kraft R, welche mit den Axen die Winkel a, b, c bildet, ersetzt werden können, fügt man ihnen die Kraft (— R) bei, und sieht, ob nun die Ausdrücke 3 und 4 wirklich in jedem Falle Null werden. Aus den drei ersten folgt (229) durch Quadriren und Addiren

$$R^2 = [\Sigma P \,\text{Cos}\, \alpha]^2 + [\Sigma P \,\text{Cos}\, \beta]^2 + [\Sigma P \,\text{Cos}\, \gamma]^2$$

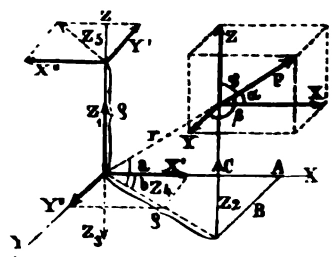
$$\text{Cos}\, a = \frac{1}{R} \Sigma P \,\text{Cos}\, \alpha, \quad \text{Cos}\, b = \frac{1}{R} \Sigma P \,\text{Cos}\, \beta, \quad \text{Cos}\, c = \frac{1}{R} \Sigma P \,\text{Cos}\, \gamma \qquad 5$$

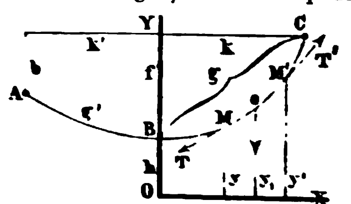
aus den drei folgenden aber, wenn man 𝔄 und 𝔅 eliminirt, die Bedingungsgleichung

$$\begin{array}{l} \Sigma P \,\text{Cos}\, \alpha . \Sigma P (C . \text{Cos}\, \beta - B . \text{Cos}\, \gamma) + \\ \Sigma P \,\text{Cos}\, \beta . \Sigma P (A . \text{Cos}\, \gamma - C . \text{Cos}\, \alpha) + \\ \Sigma P \,\text{Cos}\, \gamma . \Sigma P (B . \text{Cos}\, \alpha - A . \text{Cos}\, \beta) = 0 \end{array} \qquad 6$$

von deren Erfüllung also die Möglichkeit der Resultante abhängt.

Die im Texte gegebene Entwicklung der Formeln 1—6 dürfte mit Hülfe der beistehenden Figur keine Schwierigkeit darbieten; dafür mag als Beispiel für ihre Anwendung die in der Mechanik von **Poisson** gegebene Ableitung der Curve aufgenommen werden, welche ein in zwei Puncten A und C aufgehängter, vollkommen biegsamer, homogener und überall gleich dicker Faden ABC in Folge der Schwere annimmt, — d. h. der sog. **Kettenlinie** (Chaînette; vergl. 151): Wählen wir als Ordinatenaxe die durch den tiefsten Punct B gehende Verticale, bezeichnen durch s und s' die von B nach den Puncten M und M' führenden Bogen, und durch p das Gewicht einer Längeneinheit des Fadens,





so werden in der Ruhelage von MM' die an M und M' wegen ihres Zusammenhanges mit AM und CM' je nach der Tangente wirkenden Kräfte T und T' mit dem im Schwerpuncte 0 von MM' wirkenden Gewichte p (s'—s) im Gleichgewichte stehen. Bezeichnen daher αβ und α'β' die Winkel, welche T und T' mit den Coordinatenaxen

bilden, so hat man nach den sich auf die Ebene XY beziehenden Gleichungen 3 und 4

$$p(s'-s)\,\mathrm{Cos}\,90^0 = T.\mathrm{Cos}\,\alpha + T'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' \qquad p(s'-s)\,\mathrm{Cos}\,0^0 = T.\mathrm{Cos}\,\beta + T'\,\mathrm{Cos}\,\beta'$$

$$p(s'-s)\,[y_1\,\mathrm{Cos}\,90^0 - x_1\,\mathrm{Cos}\,0^0] = T\,(y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - x\,\mathrm{Cos}\,\beta) + T'\,(y'\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - x'\,\mathrm{Cos}\,\beta')$$

oder also

$$0 = T.\mathrm{Cos}\,\alpha + T'.\mathrm{Cos}\,\alpha' \qquad p\,(s'-s) = T.\mathrm{Cos}\,\beta + T'\,\mathrm{Cos}\,\beta' \qquad 7$$

$$p\,(s'-s)\,x_1 = T\,(x\,\mathrm{Cos}\,\beta - y\,\mathrm{Cos}\,\alpha) + T'\,(x'\,\mathrm{Cos}\,\beta' - y'\,\mathrm{Cos}\,\alpha') \qquad 8$$

Ist MM' ein Element der Kettenlinie, so können wir $s'-s = ds$, $T' = T + dT$, $x_1 = x + \frac{dx}{2}$, $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $\mathrm{Cos}\,\alpha = -\frac{dx}{ds}$, $\mathrm{Cos}\,\beta = -\frac{dy}{ds}$, $\mathrm{Cos}\,\alpha' = \frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}$, $\mathrm{Cos}\,\beta' = \frac{dy}{ds} + d.\frac{dy}{ds}$ setzen, und hiefür gehen 7 und 8, wenn die Unendlichkleinen zweiter Ordnung weggeworfen werden, in

$$d\left[T.\frac{dx}{ds}\right] = 0 \qquad d.\left[T.\frac{dy}{ds}\right] = p.ds \qquad 9$$

$$p\,x.ds = d\left[T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] = x.d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - y.d\left(T\frac{dx}{ds}\right) \qquad 10$$

über, wo 10 eine einfache Folge der beiden 9 ist, also nicht weiter in Betracht gezogen zu werden braucht. — Aus 9' folgt durch Integration, wenn c eine Constante ist,

$$T.\frac{dx}{ds} = c$$

Da aber für B nothwendig $dx = ds$, so folgt für diesen Punct $T = c$, und wenn man daher die Spannung in B durch das Gewicht einer Länge h des Fadens darstellt, so ist die Spannung in irgend einem Puncte

$$T = c.\frac{ds}{dx} \qquad \text{wo} \qquad c = p.h \qquad 11$$

d. h. gleich der Spannung im Puncte B multiplicirt mit der Secante der Neigung der Kettenlinie in jenem Puncte. Es folgt daraus zugleich, dass die Spannung in B die Minimalspannung ist. — Mit Hülfe von 11 gibt 9''

$$h.d\left[\frac{dy}{dx}\right] = ds \qquad \text{oder} \qquad s = h.\frac{dy}{dx} + \text{Const.}$$

Zählt man aber die Bogen von B aus, so verschwinden s und $dy:dx$ gleichzeitig, — also ist die Constante auch Null, und man hat daher

$$s = h.\frac{dy}{dx} \qquad 12$$

d. h. es ist die Bogendistanz des tiefsten Punctes von irgend einem Puncte der Kettenlinie, der Tangente der Neigung in diesem letztern Puncte proportional. — Setzt man in der Gleichung, durch deren Integration 12 erhalten wurde, nach 141:1

$$ds = dx\sqrt{1+q^2} \qquad \text{wo} \qquad q = \frac{dy}{dx}$$

so geht sie in

$$dx = h.\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}$$

über, und hieraus folgt durch Integration nach 65:5

$$x = h.\log\left(q + \sqrt{1+q^2}\right) \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{h}} \qquad 13$$

wo die Integrationsconstante weggelassen ist, da für B sowohl x als $dy:dx$

Null werden, also auch sie Null sein muss. Multiplicirt man 13 beidseitig mit

$$\left(\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-\frac{dy}{dx}\right)e^{-\frac{x}{h}} \quad \text{so folgt} \quad \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-\frac{dy}{dx}=e^{-\frac{x}{h}} \qquad \mathbf{14}$$

aus 13 und 14 aber durch Addition und Subtraction

$$ds=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)dx \quad \text{und} \quad dy=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right)dx \qquad \mathbf{15}$$

und hieraus durch Integration

$$s=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right) \quad \text{und} \quad y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right) \qquad \mathbf{16}$$

wo bei 16' die Integrationsconstante unbedingt Null wird, da s und x in B gleichzeitig Null werden, — bei der mit 151:4 übereinstimmenden 16'' aber nur unter der schon in der Figur vorgesehenen Bedingung, dass $BO=h$ angenommen wird. Letztere Gleichung zeigt, dass die Kettenlinie zu beiden Seiten von B symmetrisch ist. Ferner folgen aus den 16

$$y+s=h.e^{\frac{x}{h}} \qquad y-s=h.e^{-\frac{x}{h}} \qquad y^2-s^2=h^2 \qquad \mathbf{17}$$

und aus 15' und 16''

$$h.\frac{ds}{dx}=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right)=y \quad \text{also nach 11} \quad T=p.y \qquad \mathbf{18}$$

und wieder aus 16', wenn l die Länge des Fadens ist,

$$l=g+g'=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}}-e^{-\frac{k}{h}}+e^{\frac{k'}{h}}-e^{-\frac{k'}{h}}\right) \qquad \mathbf{19}$$

sowie aus 16''

$$b=(h+f)-(h+f-b)=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}}+e^{-\frac{k}{h}}-e^{\frac{k'}{h}}-e^{-\frac{k'}{h}}\right) \qquad \mathbf{20}$$

so dass, wenn $a=k+k'$ die Spannweite bezeichnet, ferner

$$n=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad \alpha=\frac{a}{2h} \quad \text{oder} \quad h=\frac{a}{2\alpha} \qquad \mathbf{21}$$

gesetzt wird, mit Hülfe von 48:1

$$n=\sqrt{\frac{(l+b)(l-b)}{a^2}}=\frac{h}{a}\sqrt{\left(e^{k:h}-e^{-k':h}\right)\left(e^{k':h}-e^{-k:h}\right)}=$$

$$=\frac{h}{a}\sqrt{e^{a:h}-2+e^{-a:h}}=\frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)=1+\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\alpha^4}{120}+\dots \qquad \mathbf{22}$$

Da sich nun nach 21 die Grösse n nie weit von der Einheit entfernen kann, so muss nach 22 die Grösse α klein sein, so dass mit genügender Genauigkeit

$$n=1+\frac{\alpha^2}{6} \quad \text{oder} \quad \alpha=\sqrt{6(n-1)} \qquad \mathbf{23}$$

Man kann also, wenn l, a und b gegeben sind, n nach 21, sodann α nach 23, und endlich h wieder nach 21 berechnen. Um auch noch k und k' zu erhalten, kann man

$$k=\frac{a}{2}+h\beta \qquad k'=\frac{a}{2}-h\beta \qquad \mathbf{24}$$

setzen, so dass nach 20 mit Hülfe von 21 und 22

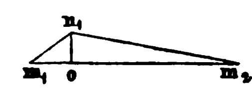
$$b=\frac{h}{2}\left(e^{\alpha+\beta}+e^{-(\alpha+\beta)}-e^{\alpha-\beta}-e^{-(\alpha-\beta)}\right)$$

$$=\frac{h}{2}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right)=\frac{an}{2}\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right) \qquad \mathbf{25}$$

woraus β mit Hülfe eines Näherungsverfahrens abgeleitet, und zur Berechnung von k und k' nach 24 verwendet werden kann. In dem speciellen Falle, wo $b = 0$, ist offenbar auch $\beta = 0$, also $k = {}^1/_2\, a = k'$. — Setzt man $dy : dx = Tg\,\alpha$, so erhält man nach 12 und 17 mit Hülfe von 98 : 7

$$s = h \,.\, Tg\,\alpha \qquad y = h \,.\, Sec\,\alpha \qquad x = h \log \frac{y + s}{h} = h \log Tg\,(45^0 + \frac{\alpha}{2}) \qquad \textbf{26}$$

Die Kettenlinie ist zur Zeit der Erfindung der Differentialrechnung vielfach behandelt worden, besonders von Johannes **Bernoulli,** dem wir (vergl. verschiedene betreffende, in seinen Opera omnia gesammelte Abhandlungen) die erste Kenntniss der Gleichung und der Haupteigenschaften verdanken, — und von **Leibnitz,** welcher bereits die in 151 angedeutete Construction mit Hülfe der Logistik lehrte. — Zum Schlusse dieses Abschnittes mögen die in einem festen Systeme von Puncten m, auf welche Kräfte P wirken, herrschenden Gleichgewichtsbedingungen noch in einer etwas andern Weise als im Texte ausgesprochen werden: Wenn Gleichgewicht bestehen soll, so müssen an jedem Puncte, z. B. m_1, die direct an ihm wirkenden Kräfte, welche in P_1 zusammengefasst sein sollen, mit den Wirkungen im Gleichgewichte stehen, welche die mit ihm verbundenen Puncte m_2, m_3, ... auf ihn ausüben, und welche durch $(m_1 m_2)$, $(m_1 m_3)$, ... bezeichnet werden mögen. Denken wir uns nun m_1 würde, z. B. im Falle einer momentanen Gleichgewichtsstörung, nach einem sehr nahen Puncte n_1 verschoben, und bezeichnen die Projection dieser Verschiebung auf P_1, die sog. **virtuelle Geschwindigkeit** von m_1, mit δp_1, — diejenige auf $(m_1 m_2)$, welche $m_1 o = m_1 m_2 - o\, m_2$ oder sehr nahe $m_1 m_2 - n_1 m_2$ ist, mit $\delta_1 (m_1 m_2)$, etc., so unterliegt diess Gleichgewicht nach 229 : 5 der Bedingung



$$o = P_1 \,.\, \delta p_1 + (m_1 m_2) \,.\, \delta_1 (m_1 m_2) + (m_1 m_3) \,.\, \delta_1 (m_1 m_3) + \cdots \qquad \textbf{27'}$$

In ähnlicher Weise wird an m_2 Gleichgewicht bestehen, wenn

$$o = P_2 \,.\, \delta p_2 + (m_2 m_1) \,.\, \delta_2 (m_2 m_1) + (m_2 m_3) \,.\, \delta_2 (m_2 m_3) + \cdots \qquad \textbf{27''}$$

u. s. f. für die andern Puncte. Da nun aber offenbar $(m_1 m_2) = (m_2 m_1)$ und $\delta_1 (m_1 m_2) + \delta_2 (m_2 m_1)$ als Summe der gegenseitigen Verschiebungen von m_1 und m_2 gleich Null sein muss, — da ebenso $(m_1 m_3) = (m_3 m_1)$ und $\delta_1 (m_1 m_3) + \delta_3 (m_3 m_1) = o$, — etc., so gibt die Summe aller Gleichungen 27 die allgemeine Gleichgewichtsgleichung

$$o = P_1 \,.\, \delta p_1 + P_2 \,.\, \delta p_2 + P_3 \,.\, \delta p_3 + \cdots \qquad \textbf{28}$$

welche nichts Anderes als der Ausdruck des sog. **Princips der virtuellen Geschwindigkeiten** ist, das bereits **Guido Ubaldi** del Monte (Pesaro 1545 — 1607; Schüler von Commandino und Gönner von Galilei; Festungs-Inspector in Toscana) laut seinem „Mechanicorum liber. Pisauris 1577 in fol. (Auch Venet. 1615)", und **Galilei** laut seinen „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e ai movimenti locali. Leida 1638 in 4. (Lat. Lugd. Bat. 1699)" in speciellen Fällen (am Hebel, Flaschenzug, etc.) erkannten, das aber erst Johannes **Bernoulli** 1717 (siehe seinen von Varignon in die zweite Auflage seiner Mechanik aufgenommenen Brief) allgemein aussprach, und sodann **Lagrange** an die Spitze seiner Mechanik (vergl. 227) stellte.

XXIV. Die reine Dynamik.

225. Vorbegriffe. Den Ort eines sich bewegenden Punctes nennt man seine **Bahn,** und die Länge desselben vom Anfangspuncte der Bewegung bis zu der, einer gewissen Zeit (t) zukommenden Lage des Punctes, den dieser Zeit entsprechenden **Weg** (s). — Den Weg, welchen ein Punct, in Folge seines Bewegungszustandes zur Zeit t, in einer Zeiteinheit zurückgelegt oder zurücklegen würde, nennt man **Geschwindigkeit** (c) zur Zeit t. — Die Geschwindigkeitszunahme in einer Zeiteinheit endlich, welche eine Kraft, bei gleichmässigem Fortwirken wie zur Zeit t, verursacht oder verursachen würde, nennt man die der Zeit t entsprechende **Beschleunigung** (g).

Der in 227 und folgenden Sätzen gegebenen Literatur mag hier noch „A. **De Presle,** Traité de mécanique rationelle. Paris 1869 in 8." beigefügt werden.

226. Die gleichförmige Bewegung. Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung $g = 0$, so heisst sie **gleichförmig,** und für sie ist offenbar

$$c = \frac{s}{t} \qquad s = c \cdot t \qquad t = \frac{s}{c}$$

Theilt man entsprechend für irgend eine Bewegung den Weg durch die Zeit, so erhält man die ihr zukommende **mittlere Geschwindigkeit.** Bewegt sich ein Punct gleichförmig in einem Kreise des Radius r, so heisst $v = c : r$ **Winkelgeschwindigkeit** desselben.

Bei gleichen Wegen verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten, — bei gleichen Zeiten dagegen wie die Wege.

227. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung. Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung g constant, so heist sie **gleichförmig beschleunigt,** und wenn für $t = 0$ auch $c = 0$ ist, so stellt offenbar $c/_2 = 1/_2 \cdot g\,t$ ihre mittlere Geschwindigkeit vor. Man hat somit

$$s = \frac{c \cdot t}{2} \qquad s = \frac{g\,t^2}{2} \qquad s = \frac{c^2}{2g} \qquad \mathbf{1}$$

$$c = g\,t \qquad c = \frac{2s}{t} \qquad c = \sqrt{2gs} \qquad \mathbf{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \qquad t = \frac{2s}{c} \qquad t = \frac{c}{g} \qquad \mathbf{3}$$

wornach sich alle betreffenden Aufgaben leicht lösen lassen.

Bezeichnet σ den nach Ablauf der Zeit t in einer Zeiteinheit beschriebenen Weg, so ist

$$\sigma = \frac{g\,(t+1)^2}{2} - \frac{g\,t^2}{2} = \frac{g}{2}\,(2t+1) \qquad \mathbf{4}$$

und setzt man daher den Weg in der ersten Zeiteinheit gleich Eins, so stellt die Reihe der ungeraden Zahlen die in den einzelnen Zeiteinheiten beschriebenen Wege dar.

228. Das Parallelogramm der Bewegungen. — Bei jeder gesetzmässigen, wenn auch ungleichförmigen Bewegung, ist der Weg s von der Zeit t abhängig, oder eine sog. Function derselben, so dass man im Allgemeinen $s = F(t)$ setzen kann. — Wirken auf einen Punct zwei Kräfte, so wird er in jedem Momente die Gegenecke des Parallelogrammes einnehmen, dessen Nebenseiten die den einzelnen Kräften entsprechenden gleichzeitigen Wege darstellen, — gerade wie wenn jede der Kräfte successive während derselben Zeit allein gewirkt hätte. — Stellen $s_1 = F_1(t)$ und $s_2 = F_2(t)$ zwei unter einem Winkel α auf einen Punct wirkende Kräfte dar, so sind (entsprechend 228) die Polarcoordinaten des Punctes zur Zeit t durch

$$\operatorname{Tg} v = \frac{s_1 . \operatorname{Sin} \alpha}{s_2 + s_1 . \operatorname{Cos} \alpha} \qquad r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \operatorname{Cos} \alpha} \qquad 1$$

gegeben. Soll der Punct einen geraden Weg beschreiben, so muss v von t unabhängig, also $F_2(t) = A . F_1(t)$ sein, woraus

$$\operatorname{Tg} v' = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{A + \operatorname{Cos} \alpha} \qquad r = F_1(t) . \sqrt{1 + 2 A \operatorname{Cos} \alpha + A^2} \qquad 2$$

folgt. Es ist somit der Weg nur für gleichartig wirkende Kräfte gerade, dann aber auch durch eine ebenso wirkende einzelne Kraft darstellbar.

Der zweite Theil dieses Satzes ist, glaube ich, zuerst von mir 1852 in der ersten Ausgabe meines Taschenbuches in solcher Weise veröffentlicht worden.

229. Allgemeine Beziehungen zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Für zunehmende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hat man immer

$$(v + \Delta v)\,\Delta t > \Delta s > v . \Delta t \qquad (g + \Delta g)\,\Delta t > \Delta v > g . \Delta t$$

für abnehmende dagegen

$$(v + \Delta v)\,\Delta t < \Delta s < v . \Delta t \qquad (g + \Delta g)\,\Delta t < \Delta v < g . \Delta t$$

so dass $\Delta s : \Delta t$ immer zwischen $v + \Delta v$ und v, und ebenso $\Delta v : \Delta t$ immer zwischen $g + \Delta g$ und g fallen muss, und somit nach der Grenzmethode

$$v = \operatorname{Lim.} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad \text{oder} \qquad s = \int v . dt \qquad 1$$

$$g = \operatorname{Lim.} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad v = \int g . dt \qquad 2$$

Hat ein Punct der Masse m die veränderlichen Coordinaten x, y, z, so sind nach 1 zur Zeit t seine Bewegungsmengen nach den Axen

$$m \frac{dx}{dt} \qquad m \frac{dy}{dt} \qquad m \frac{dz}{dt} \qquad 3$$

während nach 2

$$m \frac{d^2x}{dt^2} . dt \qquad m \frac{d^2y}{dt^2} dt \qquad m \frac{d^2z}{dt^2} dt \qquad 4$$

die Vermehrungen bezeichnen, welche dieselben in dem der Zeit t

folgenden Zeitelemente dt wirklich erhalten. Ist der Punct **frei** und wirkt auf ihn eine beschleunigende Kraft der Componenten X Y Z, so stimmen jene Vermehrungen mit

$$m . X . dt \qquad m . Y . dt \qquad m . Z . dt \qquad 5$$

überein, — ist er dagegen **nicht frei**, sondern mit andern Puncten zu einem Systeme verbunden, so wird die Einwirkung einer Kraft auf ihn möglicher Weise durch die Verbindungen modificirt werden, und es ergeben sich sodann Differenzen

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)dt \qquad m\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)dt \qquad m\left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)dt \qquad 6$$

welche aber offenbar so beschaffen sein müssen, dass sich ihre Gesammtheit für das ganze System Gleichgewicht hält, d. h. man hat (234 : 3,4)

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma mX, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma mY, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma mZ \qquad 7$$

$$\Sigma m\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = \Sigma m(xY - yX)$$

$$\Sigma m\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2} = \Sigma m(yZ - zY) \qquad 8$$

$$\Sigma m\frac{zd^2x - xd^2z}{dt^2} = \Sigma m(zX - xZ)$$

Gleichungen, welche der analytische Ausdruck des sog. **Principes von d'Alembert** sind.

Die Gleichungen 1 und 2 sind wohl unmittelbar nach Erfindung der Differentialrechnung aufgestellt worden, und finden sich jedenfalls in dieser Form spätestens schon bei **Euler** (vergl. dessen Mechanica in 227) aufgeschrieben. **D'Alembert** scheint sein Princip zuerst 1743 in seiner Dynamik (vergl. 227) ausgesprochen zu haben.

240. Das Princip der Erhaltung des Schwerpunctes. Als Resultat weiterer Entwicklung ergibt sich unter Anderm, dass sich der Schwerpunct eines Systemes genau so bewegt, wie wenn alle Massen in ihm vereinigt wären, und alle Kräfte direct an ihm wirken würden, — und, wie ein Punct ohne Wirkung einer äussern Ursache in seiner Bewegung beharrt, so kann auch die Bewegung des Schwerpunctes eines Systemes durch blosse Einwirkung seiner Theile auf einander nicht verändert werden, sondern es bewegt sich derselbe mit constanter Geschwindigkeit in einer Geraden. Letzteres Gesetz ist unter dem Namen des Principes der Erhaltung des Schwerpunctes bekannt geworden.

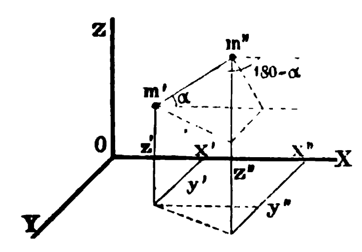
Bezeichnen x y z die Coordinaten des Schwerpunctes eines Systemes von Puncten der Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2, \ldots$ und der Massen $m_1\, m_2 \ldots$, so hat man (231, 196, 133)

$$x = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \qquad y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} \qquad z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} \qquad 1$$

woraus sich durch zweimalige Differentiation nach t und Benutzung von 239 : 7 die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\Sigma m X}{\Sigma m} \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\Sigma m Y}{\Sigma m} \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{\Sigma m Z}{\Sigma m} \qquad 2$$

ergeben, welche der analytische Ausdruck des oben ausgesprochenen ersten Gesetzes sind. — Fassen wir vorerst nur Wirkungen in's Auge, welche die einen Theile des Systemes auf die andern ausüben, und bezeichnen durch P die Kraft, mit welcher ein Element von m'' ein Element von m' anzieht, so sind die Componenten der von der ganzen Masse m'' auf ein Element von m' ausgeübten Wirkung



$$X' = m'' P . \text{Cos}\, \alpha = m'' P \frac{x'' - x'}{r}$$

$$Y' = m'' P \frac{y'' - y'}{r}$$

$$Z' = m'' P \frac{z'' - z'}{r}$$

In diesem Falle wirkt aber auch nach dem bekannten Grundgesetze von Wirkung und Gegenwirkung ein Element von m' mit derselben Kraft auf ein Element von m'', so dass die Wirkung der ganzen Masse m' die Componenten

$$X'' = m' P \text{Cos}\,(180 - \alpha) = - m' P \frac{x'' - x'}{r} \qquad Y'' = - m' P \frac{y'' - y'}{r}$$

$$Z'' = - m' P \frac{z'' - z'}{r}$$

hat. Hieraus folgt aber sofort

$$m' X' + m'' X'' = m' Y' + m'' Y'' = m' Z' + m'' Z'' = 0$$

und je ähnliche drei Gleichungen würde man für die gegenseitigen Wirkungen von m' und m''', m'' und m''', etc., finden, so dass

$$\Sigma m X = \Sigma m Y = \Sigma m Z = 0 \quad \text{oder nach 2} \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d^2 z}{d t^2} = 0$$

Hieraus folgen aber durch Integration

$$\frac{d x}{d t} = a' \qquad \frac{d y}{d t} = a'' \qquad \frac{d z}{d t} = a''' \qquad 3$$

und durch nochmalige Integration

$$x = a' t + b' \qquad y = a'' t + b'' \qquad z = a''' t + b''' \qquad 4$$

oder durch paarweise Elimination von t

$$x = \frac{a'}{a'''} z + \frac{b' a''' - a' b'''}{a'''} \qquad y = \frac{a''}{a'''} z + \frac{b'' a''' - a'' b'''}{a'''} \qquad 5$$

welches (194) die Gleichungen einer Geraden im Raume sind. Es bewegt sich also unter der gemachten Voraussetzung der Schwerpunct in einer Geraden, und zwar ist seine Geschwindigkeit nach 3

$$\frac{d s}{d t} = \sqrt{\left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d t}\right)^2} = \sqrt{a'^2 + a''^2 + a'''^2} \qquad 6$$

d. h. constant. Es besteht also auch das zweite der oben angeführten Gesetze.

241. Das Princip der Erhaltung der Flächen. Wenn ferner die verschiedenen Puncte eines Systemes nur ihrer gegenseitigen Wirkung oder Kräften unterworfen sind, welche nach dem Anfangspuncte der Coordinaten wirken, so ergibt sich das merkwürdige

Gesetz: Projicirt man die von den Radien Vectoren der einzelnen Puncte während einem Zeitelemente beschriebenen Flächen auf irgend eine der Coordinatenebenen, und multiplicirt jede Projection mit der Masse des beschreibenden Punctes, so ist die Summe dieser Producte immer dem Zeitelemente proportional. Dieses Gesetz, das offenbar auf jede durch den Anfangspunct gelegte Ebene ausgedehnt werden darf, da jede solche Ebene eine Coordinatenebene sein kann, nennt man Princip der Erhaltung der Flächen.

Multiplicirt man die drei Gleichungen 239:8 mit dt, und integrirt nach t, so erhält man, wenn c' c'' c''' beliebige Constanten sind,

$$\Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c' + \Sigma \int m (xY - yX)\,dt$$
$$\Sigma m \frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = c'' + \Sigma \int m (yZ - zY)\,dt \qquad 1$$
$$\Sigma m \frac{z\,dx - x\,dz}{dt} = c''' + \Sigma \int m (zX - xZ)\,dt$$

Nun ergibt sich einerseits für die zwischen m' und m'' thätige Kraft P mit Hülfe der 240 gebrauchten Werthe von X und Y

$$m'(x'Y' - y'X') + m''(x''Y'' - y''X'') = 0$$

und ähnliche Gleichungen lassen sich auch für die gegenseitigen Wirkungen von m' und m''', etc., aufstellen. Bezeichnet anderseits F' eine Kraft, welche m' nach dem um f' entfernten Anfangspuncte der Coordinaten zu führen strebt, so sind offenbar die Componenten nach den Axen

$$X' = -F'\frac{x'}{f'} \qquad Y' = -F'\frac{y'}{f'} \qquad Z' = -F'\frac{z'}{f'}$$

also

$$x'Y' - y'X' = y'Z' - z'Y' = z'X' - x'Z' = 0$$

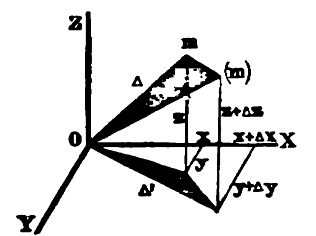
und ähnliche Gleichungen würden sich auch für die übrigen Puncte aufstellen lassen, — so dass für diese beiden Arten von Wirkungen und Kräften

$$\Sigma m (xY - yX) = \Sigma m (yZ - zY) = \Sigma m (zX - xZ) = 0$$

und es gehen daher die 1 in diesem Falle in

$$\Sigma m (xdy - ydx) = c'dt, \quad \Sigma m (ydz - zdy) = c''dt, \quad \Sigma m (zdx - xdz) = c'''dt \qquad 2$$

über. Stellt aber (m) die Lage vor, welche m nach der Zeit dt einnimmt, so ist die Projection der vom Radius Vector während dieser Zeit beschriebenen Fläche Δ auf XY



$$\Delta' = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$$

und entsprechend sind

$$\Delta'' = \frac{y\,dz - z\,dy}{2} \qquad \Delta''' = \frac{z\,dx - x\,dz}{2}$$

die Projectionen auf YZ und XZ. Für diese Werthe gehen aber die 2 in

$$\Sigma\, 2m \cdot \Delta' = c' \cdot dt \qquad \Sigma\, 2m \cdot \Delta'' = c'' \cdot dt \qquad \Sigma\, 2m \cdot \Delta''' = c''' \cdot dt \qquad 3$$

über, welche offenbar der analytische Ausdruck des im Texte ausgesprochenen Gesetzes sind.

242. Die unveränderliche Ebene. Wenn man eine Fläche oder ein System von Flächen auf die drei Coordinatenebenen projicirt,

und dann die erhaltenen Projectionen auf irgend eine andere Ebene überträgt, so ist die Summe der drei neuen Projectionen genau gleich der Projection, welche man durch unmittelbares Projiciren auf diese Ebene erhalten hätte. Ferner findet man, dass die Quadratsumme der Projectionen einer Fläche oder eines Systemes von Flächen auf drei zu einander senkrechte Ebenen einen von der Lage dieser Ebenen unabhängigen Werth hat; dagegen nimmt die einzelne Projection für eine bestimmte Ebene einen Maximumswerth an, und zwar sind die Winkel dieser letzteren Ebene mit den Coordinatenebenen für die 241 zu Grunde liegenden Voraussetzungen und Flächen von der Zeit unabhängig, so dass sie Laplace mit Recht als eine **unveränderliche** Ebene in die Mechanik eingeführt hat.

Bildet eine ebene Figur der Fläche A mit den Coordinatenebenen XY, XZ, YZ und einer Ebene I der Reihe nach die Winkel a', b', c', w, und bezeichnen α', β', γ' die Winkel von I mit denselben Coordinatenebenen, so ist (195:5)

$$\operatorname{Cos} w = \operatorname{Cos} a' . \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} b' . \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} c' . \operatorname{Cos} \gamma' \qquad 1$$

Bezeichnet ferner B' die Projection von A auf I, und sind A' A'' A''' die Projectionen von A auf die Coordinatenebenen, so hat man (165)

$$B' = A . \operatorname{Cos} w \qquad A' = A . \operatorname{Cos} a' \qquad A'' = A . \operatorname{Cos} b' \qquad A''' = A . \operatorname{Cos} c'$$

und daher, wenn 1 mit A multiplicirt wird,

$$B' = A' . \operatorname{Cos} \alpha' + A'' . \operatorname{Cos} \beta' + A''' . \operatorname{Cos} \gamma' \qquad 2$$

d. h. den ersten der oben ausgesprochenen Sätze, der offenbar auch noch in dem allgemeinern Falle gilt, wo A nicht eine einzelne Fläche, sondern ein System von Flächen bezeichnet, — sogar wenn diese Flächen in verschiedenen Ebenen liegen. — Hat man ferner noch zwei Ebenen II und III, welche mit den coordinirten Ebenen die Winkel $\alpha'' \beta'' \gamma''$ und $\alpha''' \beta''' \gamma'''$ bilden, so erhält man für sie entsprechend 2

$$B'' = A' . \operatorname{Cos} \alpha'' + A'' . \operatorname{Cos} \beta'' + A''' . \operatorname{Cos} \gamma'' \qquad 3$$
$$B''' = A' . \operatorname{Cos} \alpha''' + A'' . \operatorname{Cos} \beta''' + A''' . \operatorname{Cos} \gamma''' \qquad 4$$

Stehen aber I, II, III zu einander senkrecht, so bestehen zwischen den Cosinus der 9 Winkel $\alpha \beta \gamma$ die 192:6, 7 entsprechenden Relationen, und mit ihrer Hälfe findet man

$$B' . \operatorname{Cos} \alpha' + B'' . \operatorname{Cos} \alpha'' + B''' . \operatorname{Cos} \alpha''' = A'$$
$$B' . \operatorname{Cos} \beta' + B'' . \operatorname{Cos} \beta'' + B''' . \operatorname{Cos} \beta''' = A'' \qquad 5$$
$$B' . \operatorname{Cos} \gamma' + B'' . \operatorname{Cos} \gamma'' + B''' . \operatorname{Cos} \gamma''' = A'''$$

und sodann

$$A'^2 + A''^2 + A'''^2 = B'^2 + B''^2 + B'''^2 \qquad 6$$

d. h. den zweiten der oben ausgesprochenen Sätze. — Aus 6 folgt

$$B' = \sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2 - B''^2 - B'''^2} \qquad 7$$

und es wird somit B' am grössten, wenn B'' und B''' Null sind, d. h. nach 7 und 5, wenn

$$\operatorname{Cos} \alpha' = \frac{A'}{B'}, \quad \operatorname{Cos} \beta' = \frac{A''}{B'}, \quad \operatorname{Cos} \gamma' = \frac{A'''}{B'} \quad \text{wo } B' = \sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2} \qquad 8$$

Kennt man daher die Projectionen von A auf drei beliebige Coordinaten-

ebenen, so kann man leicht das Maximum der Projection und die Lage der Maximums-Projectionsebene ermitteln. — Die eben gefundenen Gesetze kann man offenbar ohne weiteres auf die durch 241 : 3 gegebenen Summen der Projectionen von 2 m-fachen Flächen anwenden, d. h.

$$A' = c' . dt \qquad A'' = c'' dt \qquad A''' = c''' . dt$$

setzen, und hiefür gibt 8, wenn

$$c'^2 + c''^2 + c'''^2 = C^2 \tag{9}$$

gesetzt wird,

$$B' = C . dt \qquad \text{Cos}\,\alpha = \frac{c'}{C} \qquad \text{Cos}\,\beta = \frac{c''}{C} \qquad \text{Cos}\,\gamma = \frac{c'''}{C} \tag{10}$$

so dass in den Werthen für die drei Cosinus die Grösse dt wegfällt, also die Maximumprojectionsebene wirklich, wie diess im Texte ausgesprochen wurde, von der Zeit unabhängig oder constant ist. Da ferner aus 241 : 2 hervorgeht, dass, wenn man für irgend eine Zeit die Coordinaten x, y, z sämmtlicher Puncte des Systemes, und ihre Geschwindigkeiten dx : dt, dy : dt und dz:dt nach den drei Coordinatenaxen kennt, die Grössen c' c'' c''' berechnet werden können, so kann man auch die entsprechende unveränderliche Ebene wirklich auffinden, und so hat **Laplace** (s. Mécan. cél. III 163) dieselbe für unser Sonnensystem unter der Annahme, dass für dasselbe die gemachten Voraussetzungen bestehen, wirklich bestimmt, und gefunden, dass für sie in Beziehung auf Ekliptik und Frühlingspunct des Jahres 1750 die Länge des aufsteigenden Knotens 102° 57' 30'' und die Neigung 1° 35' 31'' betrage. Vergl 355.

243. Die Hauptaxen. Versteht man (264) unter dem Trägheitsmomente eines Körpers in Beziehung auf eine Axe die Summe der Producte jedes Elementes desselben in das Quadrat seines Abstandes von dieser Axe, so gibt es für jeden Körper drei zu einander senkrecht stehende Axen, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, dass Einer von ihnen das grösste und einer Andern das kleinste Trägheitsmoment zugehört. Man hat diese von Euler zuerst einlässlich behandelten, aber schon von Segner aufgefundenen Axen **Hauptaxen** genannt, und sie fallen bei einem homogenen Ellipsoide mit den geometrischen Hauptaxen (197) zusammen.

Setzt man

$$M' = \int (xY - yX)\, dm \qquad M'' = \int (yZ - zY)\, dm \qquad M''' = \int (zX - xZ)\, dm \tag{1}$$

so geben die Gleichungen 241 : 1, wenn man die Puncte m durch die Elemente dm eines Körpers m ersetzt, Σ in $\int$ übergehen lässt, und das auf die Zeit bezügliche Integral durch einen Index von dem auf den Körper bezüglichen unterscheidet,

$$\int' M' dt = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\, dm \qquad \int' M'' dt = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{dt}\, dm$$

$$\int' M''' dt = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{dt}\, dm \tag{2}$$

Führt man nun Axen X' Y' Z' ein, welche mit dem Körper unveränderlich verbunden sind, so werden die Coordinaten x' y' z' des Elementes dm von der Zeit unabhängig, und dagegen die 9 Grössen a b c, durch welche sie (192 : 4, 5) mit x y z zusammenhängen, mit der Zeit veränderlich sein. Die

nach dieser Annahme aus 192 : 4 für x, y, dx : dt und dy : t folgenden Werthe in 2 substituirend, erhält man

$$\int' M' dt = \int \begin{bmatrix} \frac{a_1 db_1 - b_1 da_1}{dt} x'^2 + \frac{a_1 db_2 - b_1 da_2 + a_2 db_1 - b_2 da_1}{dt} x'y' + \\ \frac{a_2 db_2 - b_2 da_2}{dt} y'^2 + \frac{a_2 db_3 - b_2 da_3 + a_3 db_2 - b_3 da_2}{dt} y'z' + \\ \frac{a_3 db_3 - b_3 da_3}{dt} z'^2 + \frac{a_1 db_3 - b_1 da_3 + a_3 db_1 - b_3 da_1}{dt} z'x' \end{bmatrix} . dm$$

oder durch Substitution der in 192 : 8 gegebenen Werthe von $a_1\, a_2\, a_3\; b_1\, b_2\, b_3$

$$\int M' dt = \int \begin{bmatrix} [c_3(a_2 da_1 + b_2 db_1 + c_2 dc_1) - c_2(a_3 da_1 + b_3 db_1 + c_3 dc_1)] x'^2 + \\ [c_1(a_3 da_2 + b_3 db_2 + c_3 dc_2) - c_3(a_1 da_2 + b_1 db_2 + c_1 dc_2)] y'^2 + \\ [c_2(a_1 da_3 + b_1 db_3 + c_1 dc_3) - c_1(a_2 da_3 + b_2 db_3 + c_2 dc_3)] z'^2 + \\ \begin{bmatrix} c_3(a_2 da_2 + b_2 db_2 + c_2 dc_2) - c_3(a_1 da_1 + b_1 db_1 + c_1 dc_2) + \\ c_1(a_3 da_1 + b_3 db_1 + c_3 dc_1) - c_2(a_3 da_2 + b_3 db_2 + c_3 dc_2) \end{bmatrix} x'y' + \\ \begin{bmatrix} c_1(a_3 da_3 + b_3 db_3 + c_3 dc_3) - c_1(a_2 da_2 + b_2 db_2 + c_2 dc_2) + \\ c_2(a_1 da_2 + b_1 db_2 + c_1 dc_2) - c_3(a_1 da_3 + b_1 db_3 + c_1 dc_3) \end{bmatrix} y'z' + \\ \begin{bmatrix} c_2(a_1 da_1 + b_1 db_1 + c_1 dc_1) - c_2(a_3 da_3 + b_3 db_3 + c_3 dc_3) + \\ c_3(a_2 da_3 + b_2 db_3 + c_2 dc_3) - c_1(a_2 da_1 + b_2 db_1 + c_2 dc_1) \end{bmatrix} z'x' \end{bmatrix} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Differenzirt man aber die drei letzten Gleichungen 192 : 7 nach t, so erhält man, wenn p q r drei Hülfsgrössen sind,

$$\begin{aligned} a_1 \frac{da_3}{dt} + b_1 \frac{db_3}{dt} + c_1 \frac{dc_3}{dt} &= -a_3 \frac{da_1}{dt} - b_3 \frac{db_1}{dt} - c_3 \frac{dc_1}{dt} = p \\ a_2 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{dc_1}{dt} &= -a_1 \frac{da_2}{dt} - b_1 \frac{db_2}{dt} - c_1 \frac{dc_2}{dt} = q \\ a_3 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{db_2}{dt} + c_3 \frac{dc_2}{dt} &= -a_2 \frac{da_3}{dt} - b_2 \frac{db_3}{dt} - c_2 \frac{dc_3}{dt} = r \end{aligned} \quad 3$$

und durch Differentiation der drei letzten Gleichungen 192 : 6 nach t

$$a_1 \frac{da_1}{dt} + b_1 \frac{db_1}{dt} + c_1 \frac{dc_1}{dt} = a_2 \frac{da_2}{dt} + b_2 \frac{db_2}{dt} + c_2 \frac{dc_2}{dt} = a_3 \frac{da_3}{dt} + b_3 \frac{db_3}{dt} + c_3 \frac{dc_3}{dt} = 0 \quad 4$$

also ist, wenn man noch zur Abkürzung die Hülfsgrössen

$$A = \int (y'^2 + z'^2)\, dm \qquad B = \int (z'^2 + x'^2)\, dm \qquad C = \int (x'^2 + y'^2)\, dm \quad 5$$

$$F = \int y' z'\, dm \qquad G = \int z' x'\, dm \qquad H = \int x' y'\, dm \quad 6$$

$$P = Ar - Gq - Hp \qquad Q = Bp - Hr - Fq \qquad R = Cq - Fp - Gr \quad 7$$

einführt

$$\begin{aligned} \int' M' dt &= \int \begin{bmatrix} [r(y'^2 + z'^2) - p x' y' - q z' x']\, c_1 + \\ [p(x'^2 + z'^2) - q y' z' - r x' y']\, c_2 + \\ [q(x'^2 + y'^2) - r z' x' - p y' z']\, c_3 \end{bmatrix} dm \\ &= c_1 P + c_2 Q + c_3 R \end{aligned} \quad 8$$

und analog geben die zwei übrigen Gleichungen 2

$$\int' M'' dt = a_1 P + a_2 Q + a_3 R \qquad \int' M''' dt = b_1 P + b_2 Q + b_3 R \quad 9$$

Die Differentiation von 8 und 9 nach t ergibt

$$\begin{aligned} M' &= c_1 \frac{dP}{dt} + P \frac{dc_1}{dt} + c_2 \frac{dQ}{dt} + Q \frac{dc_2}{dt} + c_3 \frac{dR}{dt} + R \frac{dc_3}{dt} \\ M'' &= a_1 \frac{dP}{dt} + P \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{dQ}{dt} + Q \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{dR}{dt} + R \frac{da_3}{dt} \\ M''' &= b_1 \frac{dP}{dt} + P \frac{db_1}{dt} + b_2 \frac{dQ}{dt} + Q \frac{db_2}{dt} + b_3 \frac{dR}{dt} + R \frac{db_3}{dt} \end{aligned}$$

und hieraus folgen mit Hülfe von 192:6, 7 und gegenwärtigen 3, 4

$$M' c_1 + M'' a_1 + M''' b_1 = \frac{dP}{dt} - qQ + pR \qquad 10$$

$$M' c_2 + M'' a_2 + M''' b_2 = \frac{dQ}{dt} - rR + qP \qquad 11$$

$$M' c_3 + M'' a_3 + M''' b_3 = \frac{dR}{dt} - pP + rQ \qquad 12$$

Um diese letztern Gleichungen noch weiter zu vereinfachen, wollen wir uns erinnern, dass die in den a b c involvirten drei Grössen $\varphi\ \psi\ \theta$ immer noch willkürlich sind, dass wir also irgend drei Bedingungsgleichungen wie z. B.

$$F = 0 \qquad G = 0 \qquad H = 0 \qquad 13$$

aufstellen können, — jedoch in diesem Falle gezeigt werden muss, dass man diesen drei Gleichungen wirklich immer durch reelle Werthe von $\varphi\ \psi\ \theta$ genügen kann. Um letztern Nachweis zu leisten, erhalten wir aus 6 durch Substitution nach 192:4, 7

$$F = \int (a_2 x + b_2 y + c_2 z)(a_3 x + b_3 y + c_3 z)\, dm$$
$$= \int \begin{bmatrix} b_2 b_3 (y^2 - x^2) - c_2 c_3 (x^2 - z^2) + (a_2 b_3 + a_3 b_2)\, x y \\ + (b_2 c_3 + b_3 c_2)\, y z + (a_2 c_3 + a_3 c_2)\, z x \end{bmatrix} dm$$

oder, wenn wir

$$\int (x^2 - z^2)\, dm = A \qquad \int (y^2 - x^2)\, dm = B \qquad 14$$

$$\int x y\, dm = D \qquad \int y z\, dm = E \qquad \int z x\, dm = F \qquad 15$$

setzen, aus 192:5 substituiren, und nach φ ordnen,

$$F = b_2 b_3 B - c_2 c_3 A + (a_2 b_3 + a_3 b_2) D + (b_2 c_3 + b_3 c_2) E + (a_2 c_3 + a_3 c_2) F$$
$$= \begin{bmatrix} \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Sin}\theta . B + \operatorname{Cos} 2\psi \operatorname{Sin}\theta . D + \\ \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\theta . E + \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\theta . F \end{bmatrix} \operatorname{Sin}\varphi +$$
$$+ \begin{bmatrix} \operatorname{Cos}^2\psi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . B + \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . A - \\ \operatorname{Sin} 2\psi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . D + \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos} 2\theta . E - \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos} 2\theta . F \end{bmatrix} \operatorname{Cos}\varphi \qquad 16$$

Analog findet man

$$G = \begin{bmatrix} - \operatorname{Cos}^2\psi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . B - \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . A + \\ \operatorname{Sin} 2\psi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta . D - \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos} 2\theta . E + \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos} 2\theta . F \end{bmatrix} \operatorname{Sin}\varphi +$$
$$+ \begin{bmatrix} \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Sin}\theta . B + \operatorname{Cos} 2\psi \operatorname{Sin}\theta . D + \\ \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\theta . E + \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\theta . F \end{bmatrix} \operatorname{Cos}\varphi \qquad 17$$

$$H = \begin{bmatrix} (\operatorname{Sin}^2\psi - \operatorname{Cos}^2\psi \operatorname{Cos}^2\theta) B + \operatorname{Sin}^2\theta . A + \operatorname{Sin} 2\psi (1 + \operatorname{Cos}^2\theta) D + \\ \operatorname{Sin} 2\theta (\operatorname{Cos}\psi . E - \operatorname{Sin}\psi . F) \end{bmatrix} \frac{\operatorname{Sin} 2\varphi}{2} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\theta . B + \operatorname{Cos}\theta . \operatorname{Cos} 2\psi . D - \\ \operatorname{Sin}\theta (\operatorname{Sin}\psi . E + \operatorname{Cos}\psi . F) \end{bmatrix} \operatorname{Cos} 2\varphi \qquad 18$$

Setzt man somit

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [(\operatorname{Sin}^2\psi - \operatorname{Cos}^2\psi \operatorname{Cos}^2\theta) B + \operatorname{Sin}^2\theta . A + \operatorname{Sin} 2\psi (1 + \operatorname{Cos}^2\theta) D + \\ + \operatorname{Sin} 2\theta (\operatorname{Cos}\psi . E - \operatorname{Sin}\psi . F)] \end{bmatrix}$$

$$L = \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\theta . B + \operatorname{Cos}\theta . \operatorname{Cos} 2\psi . D - \operatorname{Sin}\theta (\operatorname{Sin}\psi . E + \operatorname{Cos}\psi . F) \qquad 19$$

$$M = \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi . \operatorname{Sin}\theta . B + \operatorname{Sin}\theta . \operatorname{Cos} 2\psi . D + \operatorname{Cos}\theta (\operatorname{Sin}\psi . E + \operatorname{Cos}\psi . F)$$

$$N = \frac{1}{2} [\operatorname{Sin} 2\theta (\operatorname{Cos}^2\psi . B + A - \operatorname{Sin} 2\psi . D) + 2 \operatorname{Cos} 2\theta (\operatorname{Cos}\psi . E - \operatorname{Sin}\psi . F)]$$

so hat man statt 13 die Möglichkeit der Gleichungen

$$K . \operatorname{Sin} 2\varphi + L . \operatorname{Cos} 2\varphi = M \operatorname{Sin}\varphi + N . \operatorname{Cos}\varphi = M \operatorname{Cos}\varphi - N \operatorname{Sin}\varphi = 0 \qquad 20$$

nachzuweisen. Quadrirt und addirt man aber die zwei letzten Gleichungen, so ergibt sich

$$M^2 + N^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad M = 0 \qquad N = 0 \qquad 21$$

und aus diesen beiden letztern Gleichungen erhält man mit Hülfe von 19, wenn

$$\mathrm{Tg}\,\psi = u \qquad \mathrm{Cos}\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \qquad \mathrm{Sin}\,\psi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \tag{22}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tg}\,\theta &= -\frac{E\,\mathrm{Sin}\,\psi + F\,\mathrm{Cos}\,\psi}{B\,\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi + D\,\mathrm{Cos}\,2\psi} = -\frac{E u + F}{B u + D(1-u^2)}\sqrt{1+u^2} \\ \mathrm{Tg}\,2\theta &= -2\,\frac{E\,\mathrm{Cos}\,\psi - F.\,\mathrm{Sin}\,\psi}{A + B\,\mathrm{Cos}^2\psi - D\,\mathrm{Sin}\,2\psi} = -2\,\frac{E - uF}{A(1+u^2) + B - 2Du}\sqrt{1+u^2} \end{aligned} \tag{23}$$

Setzt man diese Werthe in die goniometrische Formel

$$\mathrm{Tg}\,2\theta = \frac{2\,\mathrm{Tg}\,\theta}{1 - \mathrm{Tg}^2\theta} \tag{24}$$

ein, so erhält man

$$\frac{E - uF}{A(1+u^2) + B - 2Du} = \frac{(Eu + F)[Bu + D(1-u^2)]}{[Bu + D(1-u^2)]^2 - (1+u^2)[Eu+F]^2}$$

oder, wenn man gehörig reducirt, wobei sich namentlich die ganze Gleichung durch $(1+u^2)$ dividiren lässt, — und dann ordnet,

$$\begin{aligned} 0 = {} & u^3[ADE - F(D^2 - E^2)] + \\ & + u^2[DF(A+2B) - E(AB + D^2 + E^2 - 2F^2)] + \\ & + u\;[F(D^2 - B^2 - 2E^2 + F^2 - AB) - DE(A-B)] + \\ & + \;[E(D^2 - F^2) - DF(A+B)] \end{aligned} \tag{25}$$

Eine Gleichung dritten Grades hat aber immer eine reelle Wurzel, also ist nach 22 auch ψ, nach 23 ebenso θ, und endlich nach der noch unbenutzten 20′ auch φ reell, und es dürfen somit die Gleichungen 13 wirklich aufgestellt werden. Die Gleichung 25 muss sogar nothwendig nicht nur **eine**, sondern **drei** reelle Wurzeln haben, welche sich auf die drei Axen beziehen; denn jede dieser Letztern kann eben so gut als die Andere als Axe der X angesehen werden. Die Axen, welche durch 13 bestimmt werden, sind aber die im Texte erwähnten Hauptaxen; denn nach der dort gegebenen Definition stellen die durch 5 eingeführten Grössen offenbar die sog. **Trägheitsmomente** des Körpers in Beziehung auf die Axen X′Y′Z′ dar. — Bezeichnet man das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Axe der Z mit $\mathfrak{C}$, so ist entsprechend, mit Hülfe von 5 und 192 : 4—7

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \int (x^2 + y^2)\,dm = \int [(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z')^2 + (b_1 x' + b_2 y' + b_3 z')^2]\,dm \\ &= \int \begin{bmatrix} (1-c_1{}^2)x'^2 + (1-c_2{}^2)y'^2 + (1-c_3{}^2)z'^2 - 2c_1c_2x'y' - \\ -2c_1c_3x'z' - 2c_2c_3y'z' \end{bmatrix} dm \\ &= \mathrm{Sin}^2\theta\,\mathrm{Sin}^2\varphi\,.\,A + \mathrm{Sin}^2\theta\,\mathrm{Cos}^2\varphi\,.\,B + \mathrm{Cos}^2\theta\,.\,C + \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,2\theta\,.\,F - \\ &\quad - \mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,2\theta\,.\,G + \mathrm{Sin}\,2\varphi\,.\,\mathrm{Sin}^2\theta\,.\,H \end{aligned} \tag{26}$$

Sind aber die Axen X′Y′Z′ Hauptaxen, so bestehen die Gleichungen 13, und man hat mit Hülfe von 192 : 5

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= A\,.\,\mathrm{Sin}^2\theta\,.\,\mathrm{Sin}^2\varphi + B\,.\,\mathrm{Sin}^2\theta\,.\,\mathrm{Cos}^2\varphi + C\,.\,\mathrm{Cos}^2\theta = \\ &= A\,.\,\mathrm{Cos}^2(Z,X') + B\,.\,\mathrm{Cos}^2(Z,Y') + C\,.\,\mathrm{Cos}^2(Z,Z') \end{aligned} \tag{27}$$

d. h. wenn man jedes der einer Hauptaxe entsprechenden Trägheitsmomente mit dem Quadrate vom Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen irgend eine Axe mit dieser Hauptaxe bildet, so stellt die Summe dieser Producte das jener Axe entsprechende Trägheitsmoment dar. Ist aber $A > B > C$, so ist nach 27

$$\mathfrak{C} < A(\operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Cos}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\theta) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C} < A$$
$$\mathfrak{C} > C(\operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Sin}^2\theta \operatorname{Cos}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\theta) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{C} > C$$

d. h. es besteht wirklich die im Texte ausgesprochene Grundeigenschaft der Hauptaxen. — Bezeichnet ϱ die Dichte eines homogenen Körpers, so entspricht dem Puncte $x\,y\,z$ desselben, und somit der Distanz $\sqrt{x^2+y^2}$ von der Axe der Z offenbar das Massenelement $\varrho\,dx\,dy\,dz$, und es ist daher das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf Z

$$\mathfrak{C} = \varrho \int\int\int (x^2+y^2)\,dx\,.\,dy\,.\,dz \qquad 28$$

Ist z. B. der Körper ein Ellipsoid der Axen 2a, 2b, 2c, und fallen die Coordinatenaxen mit diesen Axen zusammen, so besteht (198) die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad 29$$

Wenn wir daher in 28 zuerst nach z integriren, und in dem so hervorgehenden unbestimmten Integrale

$$\mathfrak{C} = \varrho \int\int (x^2+y^2)\,dx\,.\,dy\,(z+\text{Const.})$$

für z nach 29 die Grenzwerthe

$$z = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

einsetzen, so erhalten wir

$$\mathfrak{C} = 2\varrho c \int\int (x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,.\,dx\,.\,dy \qquad 30$$

Setzt man aber zur Abkürzung

$$b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=r^2$$

so ist nach 67 : 14, wenn erst nach y integrirt wird,

$$2\varrho c x^2 dx \int \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \frac{2\varrho c x^2 dx}{b}\int \sqrt{r^2-y^2}\,dy =$$
$$= \frac{2\varrho c x^2 dx}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{r^2-y^2}+\frac{r^2}{2}\operatorname{Arc\,Sin}\frac{y}{r}+\text{Const.}\right]$$

und dabei ist, weil dem in XY liegenden Schnitte unsers Körpers die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{oder} \qquad y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pm r$$

entspricht, y zwischen den Grenzen $+r$ und $-r$ zu nehmen, so dass nun

$$2\varrho c x^2 dx \int \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{\varrho c x^2 dx}{b} r^2\pi = \frac{\varrho b c \pi}{a^2}(a^2x^2-x^4)\,dx$$

und somit

$$2\varrho c \int\int x^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \frac{\varrho b c \pi}{a^2}\int (a^2x^2-x^4)\,dx =$$
$$= \frac{\varrho b c \pi}{a^2}\left(a^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\text{Const.}\right)$$

oder, da x offenbar von $-a$ bis $+a$ auszudehnen ist,

$$2\varrho c \int\int x^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,.\,dy = \frac{4\varrho b c a^3\pi}{15}$$

und entsprechend

$$2\varrho c \int\int y^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,.\,dy = \frac{4\varrho a c b^3\pi}{15}$$

folglich nach 30

$$\mathfrak{C} = \frac{4\varrho\, a\, b\, c\, (a^2 + b^2)\pi}{15} = \frac{a^2 + b^2}{5} . M , \quad \text{wo} \quad M = \frac{4}{3} a\, b\, c\, \pi\, \varrho \qquad 31$$

nach 205:4 die Masse des Ellipsoides darstellt. Entsprechend sind die Trägheitsmomente in Beziehung auf die Axen der X und Y

$$\mathfrak{A} = \frac{b^2 + c^2}{5} . M \qquad \mathfrak{B} = \frac{a^2 + c^2}{5} . M \qquad 32$$

so dass sich

$$a > b > c \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} > \mathfrak{B} > \mathfrak{A}$$

entsprechen. Da ferner die drei Integrale

$$\int x\, y\, d\, m \qquad \int x\, z\, d\, m \qquad \int y\, z\, d\, m$$

für ein Ellipsoid, dessen Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, nothwendig gleich Null sind, weil sich zu jedem der in ihnen begriffenen Elemente ein zweites gleich grosses, aber dem Zeichen nach entgegengesetztes Element findet, so sind nach 6 und 13 die drei Axen zugleich die Hauptaxen. Ist das Ellipsoid durch Rotation einer Ellipse um die Axe c entstanden, d. h. ist $a = b$, so ist auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Sind aber für irgend einen Körper die Trägheitsmomente in Beziehung auf zwei Hauptaxen gleich, z. B. $A = B$, so hat man nach 27

$$\mathfrak{C} = A . \operatorname{Sin}^2 \theta + C . \operatorname{Cos}^2 \theta \qquad 33$$

Es ist also in diesem Falle das Trägheitsmoment für jede Axe der Z, welche mit Z' denselben Winkel θ bildet, gleich gross, also z. B. für alle Axen gleich A, für welche $\theta = 90^\circ$ ist, oder die in der Ebene X'Y' liegen, — also muss auch jedes Paar von zwei zu einander senkrechten Geraden der Ebene X'Y' mit Z' zusammen ein System von Hauptaxen bilden, da ihnen sonst nach dem oben entwickelten Gesetze ein grösseres oder kleineres Trägheitsmoment als A zukommen müsste, je nachdem $A < C$ oder $A > C$; so z. B. fallen also beim Rotationsellipsoide jede zwei zu einander senkrechte Durchmesser des Equators mit einem Systeme von Hauptaxen zusammen. Für $A = B = C$, so z. B. für eine aus dem Anfangspuncte beschriebene Kugel, wird nach 27 oder 33

$$\mathfrak{C} = A \qquad 34$$

d. h. es wird jeder durch den Anfangspunct gehenden Axe ein gleich grosses Trägheitsmoment entsprechen, und jedes System von drei zu einander senkrechten solchen Axen ein System von Hauptaxen sein.

244. Die augenblickliche Rotationsaxe. Alle in einem gegebenen Zeitmomente ruhenden Puncte eines rotirenden Körpers liegen in einer durch den Durchschnittspunct der Hauptaxen gehenden Geraden, der sog. Axe instantané de rotation. Wirken auf den Körper keine äussern Kräfte, und dreht er sich zu einer gewissen Zeit sehr nahe um diejenige seiner Hauptaxen, der das grösste oder kleinste Trägheitsmoment entspricht, so macht die augenblickliche Rotationsaxe im Laufe der Zeit nur kleine und periodisch wiederkehrende Schwankungen um die ursprüngliche Lage und die benachbarte Hauptaxe, ja es bleibt Letztere, wenn sie es einmal war, beständig Rotationsaxe; entspricht dagegen der benachbarten Hauptaxe das mittlere Trägheitsmoment, so kann die geringste Störung die Rota-

tionsverhältnisse total verändern. Es ist also in dem erst betrachteten Falle die Stabilität gesichert, während im zweiten Falle ein labiler Zustand vorhanden ist.

Die durch 243 : 3 definirten, zuerst durch Euler in solcher Weise eingeführten Grössen p q r besitzen mehrere merkwürdige Eigenschaften, wie aus folgender Entwicklung hervorgehen wird: Die Differentialquotienten $dx : dt$, $dy : dt$ und $dz : dt$, d. h. die Geschwindigkeiten des Elementes dm zur Zeit t nach den drei Axen, sind offenbar für alle Puncte des Körpers, welche während dem Zeitelemente dt ruhen, Null, und wenn wir daher nach 192 : 4

$$x' . da_1 + y' . da_2 + z' . da_3 = x' . db_1 + y' . db_2 + z' . db_3 = \\ = x' . dc_1 + y' . dc_2 + z' . dc_3 = 0 \qquad 1$$

setzen, und aus diesen Gleichungen x' y' z' ausrechnen, so erhalten wir die Coordinaten dieser ruhenden Puncte. Multipliciren wir die drei Gleichungen 1 der Reihe nach entweder mit $a_2\ b_3\ c_3$ oder mit $a_2\ b_2\ c_2$, und addiren die Producte, so erhalten wir mit Hülfe von 243 : 3, 4

$$y' = \frac{p}{r} . x' \qquad z' = \frac{q}{r} . x' \qquad 2$$

d. h. einerseits den Beweis für die Existenz der im Texte erwähnten augenblicklichen Rotationsaxe, und anderseits dafür, dass p q r jeweilen die Lage dieser Axe bestimmen, und zwar so, dass nach 194 die Formeln

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{r}{\varrho} \qquad \text{Cos}\,\beta = \frac{p}{\varrho} \qquad \text{Cos}\,\gamma = \frac{q}{\varrho} \qquad \text{wo} \qquad \varrho = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \qquad 3$$

zur Berechnung ihrer Winkel mit den Coordinatenaxen X' Y' Z' dienen. — Die so eben zur Abkürzung eingeführte Grösse ϱ bezeichnet die in jedem Momente für alle Puncte des Körpers gleich grosse, dem Quotienten der absoluten Geschwindigkeit v irgend eines Punctes durch seinen Abstand d von der augenblicklichen Rotationsaxe gleiche Winkelgeschwindigkeit: denn wählt man zu dieser Bestimmung denjenigen Punct der Axe Z', der den Abstand 1 vom Anfangspuncte hat, so ist für ihn $d = \text{Sin}\,\gamma$ und $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 1$, also nach 192 : 4 auch $x = a_3$, $y = b_3$, $z = c_3$, folglich mit Hülfe von 3 und 243 : 3, 4; 192 : 6, 7 einerseits

$$\frac{v}{d} = \frac{1}{d}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\text{Sin}\,\gamma . dt}\sqrt{da_3{}^2 + db_3{}^2 + dc_3{}^2}$$

und anderseits

$$\varrho^2 . \text{Sin}^2\gamma . dt^2 = \varrho^2 (1 - \text{Cos}^2\gamma)\,dt^2 = (p^2 + r^2)\,dt^2 = \\ = (a_1\,da_3 + b_1\,db_3 + c_1\,dc_3)^2 + (a_2\,da_3 + b_2\,db_3 + c_2\,dc_3)^2 + \\ + (a_3\,da_3 + b_3\,db_3 + c_3\,dc_3)^2 = \\ = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)\,da_3{}^2 + 2\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\,da_3\,db_3 + \\ + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2)\,db_3{}^2 + 2\,(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\,da_3\,dc_3 + \\ + (c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2)\,dc_3{}^2 + 2\,(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)\,db_3\,dc_3 = \\ = da_3{}^2 + db_3{}^2 + dc_3{}^2$$

also wirklich

$$\frac{v}{d} = \frac{\varrho . \text{Sin}\,\gamma . dt}{\text{Sin}\,\gamma . dt} = \varrho \qquad 4$$

In Folge 243 : 15 geben die 243 : 7 in

$$P = A . r \qquad Q = B . p \qquad R = C . q \qquad 5$$

über, und hiefür nehmen hinwieder 243 : 10—12 die einfachere Gestalt

$$A \cdot \frac{dr}{dt} + (C - B)\, pq = M' c_1 + M'' a_1 + M''' b_1$$

$$B \cdot \frac{dp}{dt} + (A - C)\, qr = M' c_2 + M'' a_2 + M''' b_2 \qquad 6$$

$$C \cdot \frac{dq}{dt} + (B - A)\, pr = M' c_3 + M'' a_3 + M''' b_3$$

an. In diesen Gleichungen bezeichnen die durch 243 : 1 eingeführten Grössen $M'\ M''\ M'''$ nach 234 und 239 offenbar die den Axen Z X Y entsprechenden Summen der Drehungsmomente aller auf die Elemente des Körpers wirkenden Kräfte. Da aber (vergl. 233) die Paare oder Drehmomente wie einzelne Kräfte behandelt werden können, so hat man (192), wenn $N'\ N''\ N'''$ die entsprechenden Summen für die neuen Axen $Z'\ X'\ Y'$ bezeichnen,

$$N' = c_3 M' + a_3 M'' + b_3 M''' \qquad N'' = c_1 M' + a_1 M'' + b_1 M''' \qquad 7$$
$$N''' = c_2 M' + a_2 M'' + b_2 M'''$$

und es gehen somit die 11 in

$$N' \cdot dt = C \cdot dq + (B - A)\, pr \cdot dt$$
$$N'' \cdot dt = A \cdot dr + (C - B)\, qp \cdot dt \qquad 8$$
$$N''' \cdot dt = B \cdot dp + (A - C)\, rq \cdot dt$$

über. Substituirt man endlich in den durch 243 : 3 gegebenen positiven Werthen von p, q, r aus 192 : 5 für die Grössen a b c und ihre Differentialien die Werthe, so erhält man nach einer einfachen Reduction

$$p \cdot dt = -\operatorname{Cos}\varphi \cdot \operatorname{Sin}\theta \cdot d\psi - \operatorname{Sin}\varphi \cdot d\theta$$
$$q \cdot dt = \operatorname{Cos}\theta \cdot d\psi - d\varphi \qquad 9$$
$$r \cdot dt = \operatorname{Sin}\varphi \cdot \operatorname{Sin}\theta \cdot d\psi - \operatorname{Cos}\varphi \cdot d\theta$$

Diese unter 8 und 9 enthaltenen 6 Differentialgleichungen geben, wenn sie sich integriren lassen, die 6 Grössen p, q, r, φ, ψ, θ als Functionen der Zeit, und damit die Lage von m für jede gegebene Zeit, — erlauben aber auch unmittelbar einige interessante Schlüsse zu ziehen: Wirken nämlich auf einen Körper entweder gar keine äussern oder doch nur solche Kräfte, welche durch den neuen Anfangspunct gehen, so sind entsprechend 141 sämmtliche Momente N gleich Null, und es bestehen somit statt 8 die Gleichungen

$$dq + \frac{B - A}{C}\, pr \cdot dt = dr + \frac{C - B}{A}\, qp \cdot dt = dp + \frac{A - C}{B}\, rq \cdot dt = 0 \qquad 10$$

Dreht sich nun der Körper zu einer gewissen Zeit sehr nahe um eine seiner Hauptaxen, z. B. um Z', so sind α und β sehr nahe gleich 90°, also Cos α und Cos β sehr klein, also auch nach 3 die Grössen p und r so klein, dass ihre Producte und zweiten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. In diesem Falle reducirt sich 10' auf $dq = 0$, so dass q eine constante Grösse, — und, da zugleich nach 3 auch $\varrho = q$ wird, so ist also in diesem Falle die Winkelgeschwindigkeit ebenfalls constant. Den zwei letzten Gleichungen 10 aber kann man in diesem Falle durch

$$p = M \cdot \operatorname{Sin}(nt + m) \qquad r = M' \cdot \operatorname{Cos}(nt + m) \qquad 11$$

genügen, wo M, M', n, m Constante sind; denn sie gehen hiefür in

$$M' \cdot n = -\frac{C - B}{A} \cdot \varrho \cdot M \qquad M \cdot n = \frac{C - A}{B} \cdot \varrho \cdot M' \qquad 12$$

über, woraus

$$M' = M \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}} \qquad n = \varrho \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{A \cdot B}} \qquad 13$$

folgen, so dass die Constanten M' und n immer leicht berechnet werden können, während die M und m zunächst arbiträr bleiben. Jedoch sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden: Ist C das grösste oder kleinste Trägheitsmoment, so werden M' und n beständig reell, und es sind daher p und r, da sie laut Voraussetzung zur Zeit $t = 0$, für welche nach 11

$$p = M \cdot \operatorname{Sin} m \qquad r = M' \cdot \operatorname{Cos} m \qquad 14$$

folgen, klein waren, also auch M und M' klein sein müssen, nach 11 beständig klein, und überdiess periodisch; ja wenn ursprünglich p und r Null waren, so müssen nach 14 auch $M = M' = 0$ sein, und es bleiben daher nach 11 für alle Zeiten p und r Null. Wenn dagegen C zwischen A und B liegt, so wird n imaginär, und hiefür geben Sinus und Cosinus von $(nt + m)$ in Exponentialgrössen über, die nicht mehr periodisch sind, sondern mit der Zeit ohne Ende wachsen können. Hieraus gehen aber offenbar die im Texte ausgesprochenen Gesetze hervor.

Die Physik.

Die Beobachtung, der Prüfstein aller Theorieen, die Bewährung aller Vermuthungen, die Vernichterin aller Täuschungen, ist zugleich auch die reichste Quelle unerwarteter Aufschlüsse und lang gesuchter Belehrungen. (Horner.)

XXV. Physikalische Vorbegriffe.

245. Allgemeine Eigenschaften der Materie. Jedes Materielle **muss** zu jeder Zeit einen bestimmten Raum einnehmen, d. h. ausgedehnt und undurchdringlich sein; ausserdem **scheinen** Beweglichkeit, Theilbarkeit, Trägheit oder Beharrungsvermögen, wechselseitige Anziehung, Porosität und Ausdehnbarkeit allgemeine Eigenschaften der Materie zu sein. Wirkung und Gegenwirkung sind gleich. Die Mittheilung der Bewegung erfordert Zeit.

Für viele die Physik betreffende Werke und Zeitschriften auf 4 verweisend, mögen hier noch folgende Titel gegeben werden: „Jaques **Rohault** (Amiens 1620 — Paris 1675; Professor der Mathematik in Paris), Traité de physique. Paris 1671, 2 Vol. in 12. (Viele spätere Auflagen, — Uebersetzungen in's Lateinische, z. B. von Clarke, — etc.), — Wilhelm Jakob **s'Gravesande** (Herzogenbusch 1688 — Leyden 1742; Professor der Mathematik und Astronomie zu Leyden), Physices elementa mathematica, experimentis confirmata. Lugd. Batav. 1720—1721, 2 Vol. in 4. (3. A. 1742; franz. durch Joncourt, Leyde 1746, 2 Vol. in 4.), — Jean-Théophile **Desaguliers** (La Rochelle 1683 — London 1744; franz. Emigrant; erst Professor der Physik zu Oxford, dann Pfarrer und zuletzt Caplan des Prinzen von Wales), A Course of Experimental Philosophy. London 1725, 2 Vol. in 4. (Viele spätere Auflagen; franz. durch Pezenas, Paris 1751), — Pieter van **Musschenbroek** (Leyden 1692 — Leyden 1761; Professor der Mathematik und Physik zu Duisburg, Utrecht und Leyden), Elementa physices. Lugd. Batav. 1729 in 4. (Viele spätere Auflagen; franz. durch Massuet, Leyde 1739, 2 Vol. in 4.; deutsch durch Gottsched, Leipzig 1747 in 8.), — Jean-Antoine **Nollet** (Pimpré bei Noyon 1700 — Paris 1770; Abbé, Professor der Physik und Mitglied der Academie in Paris), Leçons de physique expérimentale. Paris 1743—1750, 6 Vol. in 8. (8. éd. 1780; deutsch Erfurt 1749—1764), — **Segner**, Einleitung in die Naturlehre. Göttingen 1746 in 8. (3. A. 1770), — **Euler**, Lettres à

une princesse d'Allemagne sur quelques sujets de physique et de philosophie. Pétersbourg 1768—1772, 3 Vol. in 8. (noch verschiedene andere franz. Ausg., z. B. von Condorcet, Paris 1778, — von Labey, Paris 1812; auch mehrere deutsche, z. B. von Kries, Leipzig 1792, — von Joh. Müller, Stuttgart 1848), — François-Charles **Achard** von Genf (Berlin 1753 — Kunern 1821; Director der physikalischen Klasse der Berliner-Academie, und Erfinder der Runkelrüben-zucker-Fabrication), Vorlesungen über Experimentalphysik. Berlin 1791—1792, 4 Bde. in 8., — Ernst Gottfried **Fischer** (Hoheneiche bei Saalfeld 1754 — Berlin 1831; Professor der Mathematik und Physik in Berlin), Lehrbuch der mechanischen Naturlehre. Berlin 1805 in 8. (4. A. von August 1837; franz. durch Mad. Biot-Brisson und annotirt durch Biot, Paris 1806 in 8. und später), — **Young**, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London 1807, 2 Vol. in 4., — **Biot**, Traité de physique expérimentale et mathématique. Paris 1816, 4 Vol. in 8., und: Précis élémentaire de physique expérimentale. Paris 1818—1821, 2 Vol. in 8. (Deutsch mit Zusätzen von Fechner, Leipzig 1828—1829, 5 Bde. in 8, — und im Anschlusse: Fechner, Repertorium der Physik, Leipzig 1832, 3 Bde. in 8), — **Baumgartner**, Naturlehre. Wien 1823 in 8. (8. A. 1845; Supplementband 1831), — Claude-Servais-Mathias **Pouillet** (Cusance 1790 — Paris 1868; Professor der Physik und Mitglied der Academie in Paris), Eléments de physique expérimentale et de météorologie. Paris 1827, 2 Vol. in 8. (7 éd. 1856; deutsche Bearbeitung von Joh. Müller, Braunschweig 1847 und später), — Georg Wilhelm **Muncke** (Hillingsfeld 1772 — Grosskmehlen in Sachsen 1847; Professor der Physik in Marburg und Heidelberg), Handbuch der Naturlehre. Heidelberg 1829—1830, 2 Bde. in 8., — François **Marcet** (London 1803; Professor der Physik in Genf), Cours de physique expérimentale. Genève 1831 in 8. (4 éd. 1850), — Christ. **Bernoulli**, Elementarhandbuch der industriellen Physik, Mechanik und Hydraulik. Tübingen 1835, 2 Bde. in 8., — Wilhelm **Eisenlohr** (Pforzheim 1799; Professor der Physik zu Karlsruhe), Lehrbuch der Physik. Mannheim 1836 in 8. (9. Aufl. Stuttgart 1864), — Jakob **Heussi** (Mollis im Kanton Glarus 1803; Lehrer zu Berlin und Parchim in Mecklenburg), Leitfaden der Physik. Berlin 1836 in 8. (9. A. Leipzig 1868), — **Lamé**, Cours de physique. Paris 1837, 3 Vol. in 8. (2 éd. 1840), — **Mossotti**, Lezioni elementari di fisica matematica. Firenze 1843—1845, 2 Vol. in 8., — **Ettingshausen**, Anfangsgründe der Physik. Wien 1844 in 8. (2. A. 1845), — Ferdinand **Hessler** (Regensburg 1803 — Wien 1865; Professor der Physik zu Graz und Wien), Lehrbuch der technischen Physik. Wien 1847, 2 Bde. in 8. (3. A. von Pisco 1866), — Bernardino **Zambra** (1813? — Treviso 1859; Professor der Physik zu Padua), I principi e gli elementi nella fisica. Milano 1851—1856, 2 Vol. in 8., — Conrad **Fliedner** (Bruchköbel bei Hanau 1809; Lehrer der Mathematik und Physik zu Hanau), Aufgaben aus der Physik. Braunschweig 1851 in 8., — August Hugo **Emsmann** (Eckartsberga in Sachsen 1810; Oberlehrer zu Frankfurt a. O. und Stettin), Physikalische Aufgaben. Leipzig 1852 in 8., — G. **Karsten**, Allgemeine Encyclopädie der Physik. Lief. 1—20, Leipzig 1856—1869 in 8., — August **Kunzek** (Königsberg in österr. Schlesien 1795; Professor der Physik in Lemberg und Wien), Studien aus der höhern Physik. Wien 1856 in 8., — Emil **Kahl** (Dresden 1827; Lehrer der Physik und Chemie in Dresden), Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Leipzig 1857, 2 Th. in 8., — Jules-Célestin **Jamin** (Termes im Dép. Ardennes 1818; Professor der Physik zu Paris), Cours de physique.

Paris 1858—1868, 3 Vol. in 8., — Albert **Mousson** (Solothurn 1805; Professor der Physik am schweizerischen Polytechnikum), Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. Zürich 1858—1868, 3 Bde. in 8., — Bernhard **Studer** (Bern 1794; Professor der Physik und physikalischen Geographie in Bern), Einleitung in das Studium der Physik und Elemente der Mechanik. Bern 1859 in 8., — Rudolf Heinrich **Hofmeister** (Zürich 1814; Professor der Physik zu Zürich), Leitfaden der Physik. Zürich 1859 in 8. (2. A. 1870), — Adolf **Wüllner** (Düsseldorf 1835; Professor der Physik in Bonn und Aachen), Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig 1862, 2 Bde. in 8. (2. A. 1865), — Victor von **Lang**, Professor der Physik in Wien: Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig 1867—1868 in 8., — etc.“

246. Anziehung und Gewicht. Die wechselseitige Anziehung der Materie ist nach Newton (406) ihrer Menge oder der sog. **Masse** direct, dem Quadrate des Abstandes verkehrt proportionirt. Die Anziehung der Erde heisst **Schwere**, ihre Richtung **vertical**, die dazu senkrechte Richtung **horizontal.** Die Resultante der auf einen Körper wirkenden Schwerkräfte nennt man sein **absolutes Gewicht**, — das absolute Gewicht der Volumeneinheit **specifisches Gewicht** oder **Eigengewicht**, — das Verhältniss des specifischen Gewichtes eines Körpers zu dem des reinen Wassers **Dichte** desselben. Als Gewichtseinheit dient das Gewicht eines Kubikcentimeters reinen Wassers, das sog. **Gramm**, so dass das Gewicht der Volumeneinheit (des Kubikmeters) eine Million Gramme oder 10 Schweizer-Doppel-Centner, eine sog. **Last**, beträgt.

Für einige andere Gewichtseinheiten und ihr Verhältniss zu dem als wissenschaftliche Gewichtseinheit jetzt fast ausschliesslich gebräuchten Gramme vergleiche Taf. I.

247. Die Ausdehnbarkeit. Die Ausdehnbarkeit zeigt sich vorzüglich bei Zunahme der Wärme und Abnahme des Druckes. Durch die Ausdehnung einer Flüssigkeit (Weingeist, Quecksilber) in einem Gefässe mit engem, calibrirtem, und oben zugeschlossenem Halse, einem sog. **Thermometer**, wird umgekehrt die Wärme gemessen; die Fundamentalpuncte der Scale sind seit Deluc der **Schmelzpunct** des Eises (bei Réaumur und Celsius mit 0, bei Fahrenheit mit 32 bezeichnet) und der **Siedepunct** des Wassers am Meere (80^0 bei R., 100 bei C., 212 bei F.). Der Barometerstand (273) am Meere ist zu 760^{mm} angenommen; beträgt er $760 \pm d$, so ist die Siedehitze $(100 \pm t)^0$ C., wo nach Arago und Dulong

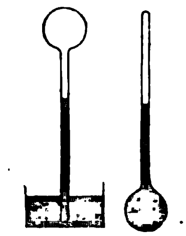
$$t = 0{,}037818 \,.\, d + 0{,}000018563 \,.\, d^2 \qquad 1$$

Bezeichnet t die Temperatur, τ die entsprechende Ablesung an einer sog. Echelle arbitraire, a den Werth eines Theiles der Letztern und b die dem Schmelzpuncte entsprechende Ablesung, so ist

$$t = a(\tau - b) = A\tau + B \qquad 2$$

Rutherford's **Max. und Min. Thermometer** besteht aus zwei horizontal, aber entgegengesetzt liegenden Thermometern, deren einer Quecksilber und eine vor ihm liegende Stahlnadel, der andere Weingeist und ein in ihm liegendes Glascylinderchen enthält. Statt ihm wendet man in neuerer Zeit häufig ein sog. **Metallthermometer** an, das aus zwei zusammengelötheten Metallstreifen (z. B. Stahl und Messing) besteht, die so zu einer Spirale aufgewunden sind, dass das sich stärker ausdehnende Metall (Messing) nach innen zu stehen kömmt, also die Spirale sich bei Erwärmung öffnet; das innere Ende der Spirale ist festgemacht, — das äussere steht entweder, wenn nur Extreme angegeben werden sollen, zwischen zwei Zeigern, oder ist mit einem, z. B. alle 5^m, auslösenden Registrirapparate in Verbindung. — Vergl. Taf. XI. und XII.

Aus der trefflichen Schrift „Fritz **Burckhardt** (Sissach bei Basel 1830; Professor der Mathematik und Physik in Basel), Die Erfindung des Thermometers und seine Gestaltung im 17. Jahrhundert. Basel 1867 in 4." geht, entsprechend dem in 3 angedeuteten, hervor, dass die schon den Alten, namentlich dem im 3. Jahrh. v. Chr. lebenden Mathematiker **Hero** von Alexandrien (vergl. 277) bekannte Ausdehnung der Körper durch die Wärme, allerdings bereits **Galilei**, wie dessen Correspondenz mit seinem Freunde Francesco **Sagredo** in Venedig des deutlichsten zeigt, um 1593 veranlasste, aus einer



mit Luft gefüllten Kugel, deren Ansatzröhre nach vorläufiger Erwärmung der erstern in ein Gefäss mit Wasser getaucht wurde, eine Art Thermoskop zu erstellen, welches später Santorio **Sanctorius** (Capo d'Istria 1561 — Venedig 1636; Professor der Medicin zu Padua) zu medicinischen Zwecken benutzte, und welches man früher unrichtiger Weise meist Cornelis **Drebbel** (Alkmaar 1572 — London 1634; früher Erzieher der Söhne Kaiser Ferdinand II., später am Hofe König James II.) zuschrieb, — dass aber erst **Ferdinand** II. von Toscana um 1640 ein wirkliches, der Beschreibung im Texte und der zweiten der obigen Figuren entsprechendes Thermometer construirte, bei welchem sich Wärmeunterschiede durch die Ausdehnung einer Flüssigkeit (Weingeist) messen liessen, und an dessen sonst noch willkürlicher, etwas unter die grösste Winterkälte und über die grösste Sommerwärme reichender Scale, wenigstens der in schmelzendem Eise eintretende Stand als Anhaltspunct angegeben wurde. **Dalencé** schlug sodann in seiner Schrift „Traittez des Baromètres, Thermomètres et Notiomètres ou Hygromètres. Amsterdam 1688 in 8." entweder den Schmelzpunct des Butters oder den Stand in einem tiefen Keller (Le Tempéré) als zweiten Normalpunct vor, — **Halley** empfahl fast ziemlich gleichzeitig in seiner Abhandlung „An Account of several Experiments made to examine the Nature of the Expansion and Contraction of Fluids by Heat and Cold, in orther to ascertain the Divisions of the Thermometer, and to make that Instrument, in all places, whithout adjusting by a Standard (Phil. Trans. Nr. 197)" den Siedepunct als obern Fundamentalpunct, und machte auf das Quecksilber als thermom. Flüssigkeit aufmerksam, — Gabriel Daniel **Fahrenheit** (Danzig 1686 — ? 1740; Glasbläser in Holland und

England, aber auch Mitglied der Roy. Society) begann etwa 1709 Weingeistthermometer und etwa 1714 Quecksilberthermometer zu machen, bei deren Scale die Grade 0, 32 und 212 der grössten Kälte in dem strengen Winter von 1709, dem Thau- und Siedepuncte entsprachen, und die namentlich in England allgemeinen Eingang fanden, — René-Antoine Ferchault de **Réaumur** (La Rochelle 1683 — Bermondière in Maine 1757; Mitglied der Pariser-Academie; vergl. sein „Eloge" par Fouchy in Mém. de Par. 1757) gab in zwei Abhandlungen „Règles pour construire des thermomètres dont les degrés sont comparables (Mém. de Par. 1730—1731)", schlug nämlich ein, nachmals besonders in Deutschland sehr verbreitetes Weingeist-Thermometer vor, dessen Fundamentalpuncte der Gefrier- und der Siede-Punct waren, und deren Distanz er, entsprechend der von ihm auf 80 ‰ des Volumens geschätzten Ausdehnung des Weingeist's, in 80 Grade theilte, — Jacques-Barthélemi **Micheli** du Crest (Genf 1690 — Zofingen 1766; erst Hauptmann in franz. Diensten, dann lange Staatsgefangener auf Aarburg; vergl. Bd. 1 meiner Biographieen), empfahl in seiner „Description de la méthode d'un thermomètre universel. Paris 1741 in 8.", welcher er noch mehrere ähnliche Schriften folgen liess, ein, sodann wirklich in der Schweiz während einem halben Jahrhundert fast ausschliesslich gebrauchtes Weingeistthermometer, das von seinem, mit dem Tempéré übereinstimmenden „Terme universel" bis zum Siedepuncte 100 Grade hatte, — Anders **Celsius** (Upsala 1701 — Upsala 1744; Professor der Astronomie zu Upsala; vergl. seine „Vita" in Act. Ups. 1744—1750) construirte 1742, und zwar muthmasslich auf Veranlassung von Carl v. **Linné** (Råshult 1707 — Upsala 1778; Professor der Mineralogie zu Stockholm, dann der Medicin und Botanik zu Upsala; vergl. sein „Eloge" durch Condorcet in Mém. de Par. 1778, und „Stöver, Leben des Carl von Linne. Hamburg 1792, 2 Bde. in 8.)", ein seither in Schweden und vielfach in Frankreich gebrauchtes Quecksilberthermometer, dessen Scale ursprünglich beim Siedepuncte 0, beim Gefrierpuncte 100 Grade hatte, während jetzt nach dem Vorschlage von Märten **Strömer** (Orebro 1707 — Upsala 1770; Professor der Astronomie zu Upsala) die beiden Fundamentalpuncte gerade umgekehrt bezeichnet werden, — Jean-André **Deluc** (Genf 1727 — Windsor 1817; Vorleser der Königin von England, sowie Prof. honor. der Philosophie und Geologie zu Göttingen; vergl. Bd. 4 meiner Biographieen), der Verfasser der classischen „Recherches sur les modifications de l'atmosphère. Genève 1772, 2 Vol. in 4. (Nouv. éd., Paris 1784, 4 Vol. in 8.; deutsch, Leipzig 1776—1778, 2 Bde. in 8.)", wies die Vorzüge der Quecksilber-Thermometer nach, welche von da an für alle wissenschaftlichen Arbeiten ausschliesslich verwendet wurden, und schuf ein Normalthermometer, das, weil er entsprechend Réaumur den Thau- und Siedepunct mit 0 und 80 bezeichnete, fälschlich den Namen des Réaumur'schen behalten hat, — **Van Swinden** endlich gab in seiner „Dissertation sur la comparaison des thermomètres. Leide 1792 in 8." die Mittel an die Hand, alle Ablesungen an ältern Instrumenten (ausser den oben erwähnten hätten wir noch die Thermometer der Lahire, Newton, Delisle, Sulzer, etc. namhaft machen können) möglichst sicher auf Deluc'sche Grade reduciren zu können. — Die Formel 1 verdankt man den beiden Freunden Pierre-Louis **Dulong** (Rouen 1785 — Paris 1838; Professor der Physik und Mitglied der Academie in Paris; vergl. Bd. 3 von Arago Oeuvres) und Dominique-François-Jean **Arago** (Estagel bei Perpignan 1786 — Paris 1853; Professor der Mathematik, Director der Sternwarte und Secretär der Academie in Paris, auch 1848 Mit-

glied der provisorischen Regierung; vergl. Bd. 1 und 16 seiner von Barral herausgegebenen „Oeuvres complètes. Paris 1854—1862, 17 Vol. in 8.", auch deutsch von Hankel, Leipzig 1854—1860; ferner „Jos. Bertrand, Arago et sa vie scientifique. Paris 1865 in 8."). — Setzt man den mit willkürlicher oder wenigstens unbekannter Scale versehenen Thermometer neben ein Normalthermometer in ein Gefäss mit warmem oder kaltem Wasser, so erhält man correspondirende Ablesungen $\tau_1\ t_1$ oder $\tau_2\ t_2$, und kann mit Hülfe von diesen nach den aus 2 folgenden Formeln

$$A = \frac{t_1 - t_2}{\tau_1 - \tau_2} \qquad B = \frac{\tau_1 t_2 - \tau_2 t_1}{\tau_1 - \tau_2} \qquad 3$$

die Constanten A und B berechnen. — Schon James **Six** (? — Canterbury? 1793; Mitglied der Roy. Society) beschrieb in seinem „Account of an improved Thermometer (Ph. Trans. 1782; neue Ausgabe unter dem Titel: The construction and use of a thermometer for shewing the extremes of temperature in the atmosphere during the observers absence. London 1794 in 8.)" ein Max. und Min. Thermometer, von dem das im Texte und von Daniel **Rutherford** (Edinburgh 1749 — Edinburgh 1819; Professor der Botanik zu Edinburgh) selbst in „A Description of an improved Thermometer (Trans. Edinb. 1794)" Beschriebene eine Vervollkommnung ist. — Metallthermometer in Form von Taschenuhren wurden schon durch Urban **Jürgensen** (Kopenhagen 1776 — Kopenhagen 1830; Uhrmacher in Kopenhagen), Abraham-Louis **Breguet** (Neuchatel 1747 — Paris 1823; Uhrmacher und Mitglied der Academie in Paris), und Andere construirt, — ja auch die im Texte angedeutete Anwendung von Metallspiralen zu eigentlichen Registrirthermometern ist nicht mehr neu, vergl. die über Meteorographen bestehende Literatur von „Joao Hyazinthe de **Magelhaens** (Lissabon 1722 — Islington bei London 1790; Urenkel des Weltumseglers; erst Augustiner-Mönch zu Lissabon, dann in England zum Protestantismus übergetreten), Mémoire sur le baromètre nouveau (Journal de physique, Mai 1782)" bis auf „Heinrich **Wild** (Zürich 1833; erst Professor der Physik in Bern, dann Director des physikalischen Centralobservatoriums und Mitglied der Academie in Petersburg), Die selbstregistrirenden meteorologischen Instrumente der Sternwarte in Bern. München 1866 in 8. (Abdruck aus Bd. 2 von Carl's Repertorium)", — wohl aber das hier in $^1/_3$ der natürlichen Grösse abgebildete und schon im Texte beschriebene, durch die Schrauben a und b immer wieder regulirbare, von Friedrich **Hermann** (Bern



1830; Mechaniker in Bern) erstellte Spiral-Thermometer mit Doppelzeiger, das sich für Beobachtung der Extreme als ganz gut erwiesen hat, vergl. die von mir und Adolf **Hirsch** (Halberstadt 1830; Professor der Astronomie und Director der Sternwarte in Neuenburg) in den Jahrgängen 1867 und 1868 der unter meiner Direction herausgegebenen „Schweizerischen meteorologischen Beobachtungen" gegebenen Berichte. — Die zu Greenwich, Toronto, Washington, etc., gebrauchten photographischen Registrirapparate, wurden von [illegible] **Brooke** (London 1804, Wundarzt in London) erfunden, und in zwei [illegible] on [illegible] the automatic registrations of magnetometers and other

meteorological Instruments by Photography (Phil. Trans. 1846, 1849)" beschrieben. — Für Gewichts- und Luft-Thermometer, Pyrometer, etc., vergl. 301.

248. Aggregationszustand, Cohäsion und Adhäsion. Man nennt einen Körper **fest, liquid** (tropfbar-flüssig) oder **expansibel** (elastisch-flüssig), je nachdem für ihn Grösse und Form, oder nur Grösse, oder keines von beiden bestimmt ist. Bei Zunahme der Wärme und Abnahme des Druckes kann ein Körper aus dem festen Aggregationszustande bis in den expansibeln übergeführt werden. — Die festen Körper theilen sich nach dem Widerstande gegen eine Gestaltänderung in **harte** (Diamant) und **weiche** (Talk), **dehnbare** (Zinn, Platin) und **spröde** (Glastropfen), — nach dem Bestreben, die frühere Gestalt wieder anzunehmen, in **elastische** (Stahl, Elfenbein) und **unelastische** (feuchter Thon), — nach dem Bestreben, ihre kleinsten Theile zu einem symmetrischen Ganzen zu ordnen, in **krystallinische** (Candiszucker) und **amorphe** (Gerstenzucker). Die Kraft, welche die Theilchen eines Körpers in ihrer gegenseitigen Lage erhält, heisst **Cohäsion**, — die zwischen den Theilen zweier sich berührenden Körper sich zeigende Anziehung dagegen **Adhäsion.**

Friedrich **Mohs** (Gernrode am Harz 1773 — Agordo im Tyrol 1839; Professor der Mineralogie in Grats, Freiberg und Wien) setzte die Härte des

Talkes	gleich	1	Orthoklases	gleich	6
Gypses	-	2	Quarzes	-	7
Kalkspathes	-	3	Topases	-	8
Flussspathes	-	4	Korundes	-	9
Apatites	-	5	Diamantes	-	10

und nach dieser Scale werden noch jetzt die Härten meistens angegeben.

249. Festigkeit. Der auf der Cohäsion beruhende Widerstand, den ein Körper gegen äussere Kräfte leistet, welche ihn auszudehnen, zu zerdrücken, abzubrechen oder abzudrehen streben, heisst **Zug-** (absolute), **Druck-** (rückwirkende), **Biegungs-** (relative) oder **Drehungs-** (Torsions-) **Festigkeit.** Sind die äussern Kräfte nicht gross genug, um eine Trennung der Theilchen zu bewirken, so wird doch die Gestalt des Körpers etwas verändert; sie stellt sich aber, wenn die Kräfte aufhören zu wirken, innerhalb der sog. **Elasticitätsgrenzen** wieder her; letztere werden durch das Verhältniss der grösten Längenänderung zur Länge gegeben, — die entsprechende Belastung heist **Tragmodul.** Innerhalb der Elasticitätsgrenzen sind bei gleichem Querschnitte und gleicher Länge die Längenänderungen eines Prisma's den in der Richtung seiner Axe wirkenden Kräften proportional, und bei der Druck-, Zug-, ja sogar (wenn die Ausdehnungen oder Zusammenpressungen der einzelnen Fasern betrachtet werden) bei der Biegungsfestigkeit dieselben. **Elasticitäts-**

modul nennt man dasjenige Gewicht, welches ein Prisma des Querschnittes 1 um seine eigene Länge ausdehnen oder zusammenpressen würde; er ist natürlich nur innerhalb der Elasticitätsgrenze zu gebrauchen. **Festigkeitsmodul** endlich nennt man diejenige Kraft, welche für den Querschnitt 1 die wirkliche Trennung der Theilchen bewirkt; er ist in der Regel für Zug und Druck verschieden, und bei letzterem nur gültig, wenn die Länge höchstens das 10—12fache der kleinsten Dimension des Querschnittes beträgt, da bei grösserer Länge der Körper seitwärts ausgebogen wird. Vergl. Taf. X.

Vergleiche z. B. „**Lamé**, Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris 1852 in 8., — Arthur-Jules **Morin** (Paris 1795; früher Professor der Mechanik zu Metz, jetzt General der Artillerie, Director des Conservatoire des arts et métiers und Mitglied der Academie zu Paris), Résistance des matériaux. Paris 1853 in 8. (2. A. 1857), — A. **Clebsch**, Professor der Mathematik in Carlsruhe und Giessen: Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862 in 8., — Franz **Grashof**, Professor der Mechanik in Carlsruhe: Die Festigkeitslehre. Berlin 1866 in 8., — E. **Winkler**, Professor der Eisenbahn- und Brückenbaukunde in Wien: Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit. Erster Band. Prag 1868 in 8., — Theodor **Wand**, Consistorial-Assessor in Speyer: Ueber die Elasticität der festen Körper und die optischen Erscheinungen. Analytische Abhandlung. München 1868 in 8., — August **Beer** (Trier 1825 — Bonn 1863; Professor der Mathematik zu Bonn), Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. Leipzig 1869 in 8., — Heinrich **Schneebeli** (Ottenbach 1849; Assistent der Physik am eidg. Polytechnikum), Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. Zürich 1870 in 8. (Auch Viertelj. d. nat. Ges. Bd. 14), — etc"

250. Die chemische Verwandtschaft. Viele Körper sind durch die Thätigkeit der sog. **chemischen Anziehung** oder **Verwandtschaft** aus der Verbindung anderer Körper, sog. **Elemente**, zu einem gleichartigen Ganzen hervorgegangen, und gehen hinwieder unter einander Verbindungen ein. Alle diese Verbindungen geschehen nach bestimmten Gewichtsverhältnissen, den sog. **Mischungsgewichten** (Equivalenten) oder ihren Vielfachen, und zwar gibt die Summe der Mischungsgewichte der Bestandtheile das Mischungsgewicht der Verbindung. — Die einfachsten Verbindungen der Elemente theilt man nach ihren Eigenschaften in **Säuren**, von denen die im Wasser löslichen sauer schmecken, und blaue Pflanzenfarben (z. B. Lackmus) röthen, — und **Basen**, von denen die im Wasser löslichen laugenhaft schmecken und gelbe Pflanzenfarben (z B. Curcuma) bräunen; ihre Vereinigungsproducte heissen **Salze**. — Als Beispiele leicht auszuführender chemischer Operationen mögen folgende dienen: Durch Erhitzen von chlorsaurem Kali wird Sauerstoff (Lebens- und Feuerluft) abgeschieden. Begiesst man Zinkstücke mit Wasser, dem etwas Schwefelsäure beigesetzt ist, so erhält man

das brennbare Wasserstoffgas und Zinkvitriol. Verbrennt man Phosphor unter einer Glasglocke, so restirt Stickstoff. Uebergiesst man Kreide mit verdünnter Salzsäure, so wird Kohlensäure ausgeschieden; tröpfelt man in die Restanz Schwefelsäure, so fällt Gyps nieder. Bei gelindem Erwärmen von Braunstein mit etwas Salzsäure entwickelt sich das grünliche, erstickende Chlor. Kupfervitriollösung gibt mit Salmiak einen blauen Niederschlag. Ein Gemenge von Sauerstoff mit doppeltem Volumen Wasserstoff verpufft, und wenn man (wie beim sog. Knallgasgebläse) einer Wasserstoffgasflamme so viel Sauerstoff zuführt, als zur vollständigen Verbrennung nöthig ist, so entsteht eine intensive Hitze. Etc. Vergl. Taf. VIII.

Schon die alten Egypter scheinen Soda, Salmiak, Alaun, etc. gekannt, ja Glas, Seife, eine Art Bier, etc. fabricirt zu haben, — während dagegen die Griechen und Römer auf diesem Gebiete so zu sagen keine Fortschritte machten, obschon wenigstens Erstere von dieser neuen Wissenschaft gehört, und ihr nach ihrem Vaterlande den Namen Χημία oder **Chemie** beigelegt haben sollen. Um so grössern Aufschwung nahm später die Chemie bei den Arabern, besonders durch den 765 zu Sevilla verstorbenen Abu-Mussah-Djafar-al-Sofi oder **Geber.** Sie wurde sodann auf den spanischen Hochschulen förmlich gelehrt, verbreitete sich bald über das ganze Abendland, und fand in **Albertus magnus** (Lauingen 1205 — Cöln 1280; Dominikaner und später Bischof von Regensburg), Ramon Lull oder Raymundus **Lullius** (Palma auf Mayorka 1235? — Tunis 1315?; Minorit und Missionär), **Basilius Valentinus** (13.. — 14..; Benedictiner, nach grossen Reisen um 1413 in einem Kloster zu Erfurt lebend) und Andern eifrige Anhänger. Allerdings befasste sich diese älteste Chemie, die sog. **Alchymie,** fast nur mit der müssigen Aufgabe, den sog. Stein der Weisen oder überhaupt ein Mittel zu finden, um unedle Metalle in Gold zu verwandeln; aber sie fand beiläufig auch die Prozesse der Destillation und Sublimation, — stellte Pottasche, Schwefelsäure, Königswasser, Weingeist, etc. her, und gab überhaupt den Spätern manche werthvollen Thatsachen und praktischen Kenntnisse an die Hand. — Eine neue Aera brach für die Chemie mit dem früher verlästerten, ja erst seit wenigen Decennien richtig gewürdigten Arzte Theophrastus **Paracelsus** (Einsiedeln 1493 — Salzburg 1541; vergl. „Marx, Würdigung des Theophrastus von Hohenheim, Göttingen 1842 in 4." und Bd. 3 meiner Biographieen) an, der mit vielen betreffenden alten Traditionen aufräumte, und die Chemie zuerst zur Darstellung von Arzneimitteln zu benutzen lehrte. Ihm folgten der den Gebrauch chemischer Präparate als Arzneimittel befördernde Johannes **Agricola** (Pfalz? — Leipzig 1643; Arzt in Leipzig), — der, namentlich durch das von ihm in der Schrift „Tractatus de natura salium. Amstel. 1658" beschriebene und jetzt noch seinen Namen tragende Salz bekannte Joh. Rudolf **Glauber** (Karlstadt in Franken 1603? — Amsterdam 1668; als technischer Chemiker in Oesterreich, am Rheine und in Holland lebend), — und dann vor Allem die beiden Aerzte Joh. Joachim **Becher** (Speyer 1635 — London 1682; Professor der Medizin in Mainz) und Georg Ernst **Stahl** (Anspach 1660 — Berlin 1734; Professor der Medicin zu Halle), welche zur Erklärung der Verbrennungserscheinungen einen hypothetischen Stoff, das sog. **Phlogiston,** in die Chemie einführten, und in allen Ver-

änderungen und Unterschieden der Körper zunächst eine **Veränderung** und Verschiedenheit ihres Gehaltes an diesem Stoffe zu erkennen glaubten, so z. B. das Verkalken der Metalle sich durch einen Verlust, das Reduciren der Oxide dagegen sich durch eine Wiederaufnahme von Phlogiston erklärten. — Als dann freilich die Waage ernstlich in die Chemie eingeführt, und damit z. B. erkannt wurde, dass das Verkalken der Metalle nicht von einem Gewichtsverluste, sondern im Gegentheil von einer Gewichtsvermehrung begleitet ist, verlor die phlogistische Theorie nach und nach ihren Halt, und mit den Arbeiten des ausgezeichneten **Lavoisier** (s. 4), des als Freidenker verfolgten Joseph **Priestley** (Fieldhead in Yorkshire 1733 — Northumberland in Pennsylvanien 1804; abwechselnd Prediger und Schullehrer; vergl. Cuvier Eloges I), des trefflichen Karl Wilhelm **Scheele** (Stralsund 1742 — Köping in Westerås-Län 1784; Apotheker in Köping und Mitglied der Stockholmer-Academie; vergl. sein „Eloge" durch Vicq d'Azyr in Mém. de la Soc. de médec. 1784—1785, und „Eisenach, Karl Wilhelm Scheele, sein Leben und sein Einfluss auf die Ausbildung der Chemie. Gotha 1850 in 4."), etc., mit der Entdeckung des Sauerstoffs und Stickstoffs in der Luft, der Zersetzung des Wassers in Sauerstoff und Wasserstoff, der Aufstellung der Lehre von der chemischen Verwandtschaft und den Equivalenten, etc., begann die neuere Chemie, welche seither durch Louis-Joseph **Gay-Lussac** (St-Léonard 1778 — Paris 1850; Professor der Chemie und Physik, sowie Mitglied der Academie in Paris; vergl. Arago Oeuvres III), — Sir Humphry **Davy** (Penzance in Cornwallis 1778 — Genf 1829; Professor der Chemie in London; vergl. „Life by J. A. Paris. London 1831 in 4." und Cuvier Eloges III), — Jöns Jacob **Berzelius** (Väfversunda Sörgård 1779 — Stockholm 1848; Professor der Pharmacie und Secretär der Academie in Stockholm; vergl. „Gedächtnissrede" von H. Rose in Berl. Abh. 1851), — Jean-Baptiste **Dumas** (Alais 1800; Professor der Chemie und Mitglied der Academie in Paris), — **Faradey** (s. 4), — Justus **Liebig** (Darmstadt 1803; Professor der Chemie zu Giessen und München), — Friedrich **Wöhler** (Eschersheim bei Frankfurt a. M. 1800; Professor der Chemie zu Göttingen), — Thomas **Graham** (Glasgow 1805 — London 1869; Professor der Chemie und Director der k. Münze in London), — Robert Wilhelm **Bunsen** (Göttingen 1811; Professor der Chemie zu Marburg, Breslau und Heidelberg), — etc. bereits so grosse Fortschritte gemacht, und sich längst als selbstständige Wissenschaft von ihrer Frau Mutter Physica abgelöst hat. — Von Einzelnheiten noch nachträglich anführend, dass 1798 der englische Civilingenieur William **Murdoch** (Bellow Mill 1754 — Soho 1839; Assistent in der Maschinenfabrik von Boulton und Watt) den ersten gelungenen Versuch machte, Steinkohlengas im Grossen zur Beleuchtung zu verwenden, — dass Thomas **Drummond** (Edinburgh 1797 — Dublin? 1840; Ingenieur-Capitän) das nach ihm benannte, und von ihm in der Abhandlung „On the means of facilitating the observation of distant stations in geodetical operations (Phil. Trans. 1826)" beschriebene Licht ursprünglich erhielt, indem er mit einem Strome Sauerstoff eine Weingeistflamme gegen Kalkerde blies, während man jetzt ein Knallgasgebläse auf Kreide wirken lässt, — dass 1839 Christian Friedrich **Schönbein** (Metzingen bei Urach 1799 — Baden-Baden 1868; Professor der Chemie in Basel; vergl. seine „Würdigung" durch Ed. Hagenbach im Basl. Progr. 1868) das Ozon entdeckte, vergl. seine Abhandlung „Ueber den bei Elektrolysation des Wassers und dem Ausströmen der gemeinen Elektricität aus Spitzen bemerkbaren Geruch (Münchn. Denkschr. III)", 1845

aber die Schiessbaumwolle und das Collodium, — etc., muss im Uebrigen für weitern Detail auf Specialschriften verwiesen werden, so z. B. auf „**Becher**, Physicæ subterraneæ libri II. Francof. 1669 in 4. (Suppl. 1675; neue Ausg. Lipsiæ 1738), — **Stahl**, Zymotechnia fundamentalis, seu fermentationis theoria generalis. Halæ 1697 in 8., — Jean-Jaques **Manget** (Genf 1652 — Genf 1742; Arzt in Genf), Bibliotheca chymica curiosa. Genevæ 1702, 2 Vol. in fol., — Herrmann **Boerhaave** (Voorhout bei Leyden 1668 — Leyden 1738; Professor der Medicin, Botanik und Chemie zu Leyden), Elementa Chemiæ. Lugd. Batav. 1732, 2 Vol. in 4, — Johannes **Gessner** (Zürich 1709 — Zürich 1790; Professor der Mathematik und Physik zu Zürich, und Stifter der naturforschenden Gesellschaft daselbst; vergl. Bd. 1 meiner Biographieen), De principiis corporum. Tig. 1743—1745 in 4., — Johan Gottskalk **Wallerius** (Nerike 1709 — Upsala 1785; Professor der Chemie und Mineralogie zu Upsala), Chemia physica. Upsala 1760, 2 Vol. in 8. (Auch 1765; schwedisch 1759—1768, 3 Bde.; deutsch von Mangold, Gotha 1761), — Louis-Bernard **Guyton de Morveau** (Dijon 1737 — Paris 1816; Professor der Chemie und Mitglied der Academie in Paris), Défense de la volatilité du phlogistique. Dijon 1773 in 8., — **Priestley**, Experiments and observations on different kinds of air. London 1774—1777, 3 Vol. in 8. (Deutsch von Ludewig, Wien 1778), — **Scheele**, Chemische Abhandlung von der Luft und dem Feuer. Upsala 1777 in 8. (2. A. von Leonhardi, Leipzig 1782 in 8.; englisch von Forster 1780; französisch von Dieterich, Paris 1781), — **Fourcroy**, Leçons d'histoire naturelle et de chimie. Paris 1781, 2 Vol. in 8. (Neue Ausg. von 1789, 4 Vol., — 1791, 5 Vol., — 1801 unter dem Titel: Système de connaissances chimiques, 11 Vol. in 8. oder 6 in 4.), — **Lavoisier**, Traité élémentaire de chimie. Paris 1789, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1793; deutsch von Hermbstädt wiederholt, z. B. Berlin 1803), — Christoph **Girtanner** (St.Gallen 1760 — Göttingen 1800; Dr. Med., meist auf Reisen; vergl. Bd. 4 meiner Biographieen), Neue chemische Nomenclatur für die teutsche Sprache. Göttingen 1791 in 8., und: Anfangsgründe der antiphlogistischen Chemie. Göttingen 1792 in 8. (2. A. 1795), — Jeremias Benjamin **Richter** (Hirschberg in Schlesien 1762 — Berlin 1807; Bergbaubeamter in Breslau und Berlin), Anfangsgründe der Stöchyometrie oder Messkunst chymischer Elemente. Breslau 1792—1794, 3 Bde. in 8., — Johann Friedrich **Gmelin** (Tübingen 1748 — Göttingen 1804; Professor der Medicin und Chemie zu Tübingen und Göttingen, — Enkel, Sohn, Neffe und Vater verdienter Chemiker, von denen diess Geschlecht schon bis jetzt mindestens neun aufzuweisen hat), Geschichte der Chemie seit dem Wiederaufleben der Wissenschaften. Göttingen 1797—1799, 3 Bde. in 8., — Claude-Louis **Berthollet** (Talloire bei Annecy 1748 — Arcueil bei Paris 1822; Professor der Chemie und Mitglied der Academie in Paris), Essai de statique chimique. Paris 1803, 2 Vol. in 8., — **Berzelius**, Lärbok i Kemien. Stockholm 1808—1818, 3 Vol. in 8. (2. A. 1817—1830 in 6 Bdn.; verschiedene deutsche Ausg. von Blöde, Wöhler und Berzelius selbst, Dresden 1820 und später; franz. von Jourdan und Esslinger, Paris 1829—1833, 8 Bde.), — John **Dalton** (Eaglesfield in Cumberland 1766 — Manchester 1844; Sohn eines Wollenwebers; Lehrer der Mathematik und Physik in Manchester), A new system of chemical philosophy. Manchester 1808—1827, 2 Vol. in 8., — Louis-Jacques **Thénard** (Louptière 1777 — Paris 1857; Professor der Chemie und Mitglied der Academie in Paris), Traité de chimie élémentaire. Paris 1813—1816, 4 Vol. in 8. (6 éd. 1833—1836, 5 Vol.; deutsch von Fechner,

Leipzig 1825—1830, 7 Bde.), — Leopold **Gmelin** (Göttingen 1788 — Heidelberg 1853; Sohn von Joh. Friedrich; Professor der Medicin und Chemie zu Heidelberg), Handbuch der theoretischen Chemie. Frankfurt 1817—1819, 2 Bde. in 8. (4. A. Heidelberg 1843—1855, 6 Bde.), — **Dumas**, Traité de chimie appliquée aux arts. Paris 1828—1846, 8 Vol. in 8., Atl. in 4. (Deutsch von Buchner, Nürnberg 1844—1849), — Eilhard **Mitscherlich** (Neuende in Oldenburg 1794 — Schöneberg bei Berlin 1863; Professor der Chemie in Berlin; vergl. „Gedächtnissrede von G. Rose. Berlin 1864"), Lehrbuch der Chemie. Berlin 1829—1830, 2 Bde. in 8. (4. A. 1844—1847; franz. von Valérius, Bruxelles 1835—1837, 3 Vol. in 8.), — Heinrich **Rose** (Berlin 1795 — Berlin 1864; Schüler von Berzelius; Professor der Chemie zu Berlin), Handbuch der analytischen Chemie. Berlin 1829 in 8. (5. A. Braunschweig 1851, 2 Bde.; franz. Paris 1859—1861), — **Schubarth**, Elemente der technischen Chemie. Berlin 1831, 2 Bde. in 8. (4. A. 1851, 4 Bde. in 8.), — **Liebig**, **Poggendorf** und **Wöhler**, Handwörterbuch der reinen und angewandten Chemie. Braunschweig 1837—1856, 6 Bde. in 8. (2. A. in 9 Bdn. durch Fehling und Kolbe 1856 u. f.), — Karl Jakob **Löwig** (Kreuznach 1803; Professor der Chemie in Zürich und Breslau), Chemie der organischen Verbindungen. Zürich 1839—1840, 2 Bde. in 8. (2. A. Braunschweig 1847), — **Graham**, Elements of Chemistry. London 1841 in 8. (2. ed. 1850—1858, 2 Vol.; deutsche Bearbeitungen von Otto, Kolbe, etc., Braunschweig 1855 u. f.), — Ferdinand **Hoefer** (Döschnitz in Schwarzburg-Rudolstadt 1811; Arzt in Paris), Histoire de la chimie. Paris 1842, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1866—1869), — Hermann **Kopp** (Hanau 1817; Professor der Physik und Chemie zu Giessen), Geschichte der Chemie. Braunschweig 1843—1847, 4 Bde. in 8., und: Beiträge zur Geschichte der Chemie. Zwei Stücke. Braunschweig 1869 in 8., — Karl Friedrich **Gerhardt** (Strassburg 1816 — Strassburg 1856; Professor der Chemie zu Montpellier und Strassburg), Précis de chimie organique. Paris 1844—1845, 2 Vol. in 8. (Deutsche Bearbeitung von R. Wagner, Leipzig 1854—1858, 4 Bde. in 8.), — Julius Adolf **Stöckhardt** (Röhrsdorf bei Meissen 1809; Professor der Chemie in Chemnitz und Tharand), Die Schule der Chemie. Braunschweig 1846 in 8. (15. A. 1868; fast in alle Sprachen übersetzt), — Henri-Victor **Regnault** (Aachen 1810; Professor der Chemie und Physik in Paris, Mitglied der Academie und Director der Porzellanfabrik zu Sèvres), Cours élémentaire de chimie. Paris 1847—1849, 2 Vol. in 8. (4 éd. 1853, 4 Vol.; deutsche Bearbeitung von Strecker, Braunschweig 1851 und später), — Pompejus **Bolley** (Zindelberg 1812; Professor der Chemie zu Aarau und am schweiz. Polytechnikum), Handbuch der technisch-chemischen Untersuchungen. Leipzig 1853 in 8. (3. A. 1865; franz. durch Gautier, Paris 1869), — **Zuchold**, Bibliotheca chemica. Verzeichniss der 1840—1858 erschienenen Schriften. Göttingen 1869 in 8., — Heinrich **Limpricht** (Eutin 1827; Professor der Chemie zu Göttingen), Lehrbuch der organischen Chemie. Braunschweig 1862 in 8., — August Wilhelm **Hoffmann** (Giessen 1818; Professor der Chemie in Bonn, London und Berlin), Einleitung in die moderne Chemie. Braunschweig 1866 in 8., — Michel-Eugène **Chevreul** (Angers 1786; Professor der Physik und Chemie, sowie Mitglied der Academie in Paris), Histoire des connaissances chimiques. Vol. 1. Paris 1866 in 8., — Theodor **Gerding** (Winsen bei Celle 1820; Lehrer der Naturwissenschaften in Jena und Altena in Westphalen), Geschichte der Chemie. Leipzig 1867 in 8., — Karl Adolf **Würtz** (Strassburg 1817; Professor der Chemie in Paris), Dictionnaire de chimie pure

et appliquée. Disc. prél. et Fasc. 1. Paris 1868 in 8., — A. **Daxhelet**, Professor der Chemie zu Seraing: Cours de chimie inorganique d'après la théorie typique de M. Gerhardt. Paris 1869, 2 Vol. in 8., — etc."

XXVI. Geostatik und Geodynamik.

251. Die Beschleunigung der Schwere. Wegen der ungemeinen Grösse der Erde dürfen die auf die verschiedenen Puncte eines Körpers wirkenden Schwerkräfte als parallel und gleich, und die Beschleunigung der Schwere für jeden Ort der Erde als constant angesehen werden. Die Letztere ist, wenn φ die geographische Breite bezeichnet, nach Borda

$$g = 9^m,80557\,(1 - 0{,}002588 \operatorname{Cos} 2\varphi)$$

so dass z. B. für

φ	g	log g	1 : 2 g	$\sqrt{2g}$
45°	9^m,80557	0,99147	0,050991	4,42845
46	626	50	88	60
47	733	55	82	84

Für diese g gelten, abgesehen vom Luftwiderstande, die 237 gefundenen Gesetze als Gesetze des freien Falles. Vergl. 375.

Die durch **Aristoteles** und seine Schüler verbreitete Meinung, dass ein Körper um so schneller falle, je grösser sein Gewicht sei, wurde erst durch **Galilei** widerlegt, indem er Körper von ungleichem Gewichte durch grosse Höhen fallen liess, und so ad oculos demonstrirte, dass sie gegentheils fast gleichzeitig den Boden erreichen. — Der frühern Ansicht, dass die Fallgeschwindigkeit dem bereits durchlaufenen Wege proportional sei, substituirte **Galilei** die Hypothese, dass sie im Verhältnisse zu der Fallzeit zunehme, — leitete daraus die übrigen Fallgesetze ab, — erwies ihre Richtigkeit durch Versuche mit einer Messingkugel, welche er in einer mit Pergament belegten, 12 Ellen langen, geneigten Rinne (also auf einer schiefen Ebene, vergl. 254) fallen liess, — trug sie theilweise schon in Pisa, vollständig in Padua öffentlich vor, — publicirte sie aber erst etwa 40 Jahre später in den 1638 erschienenen, 234 erwähnten „Discorsi". Für die seither von George **Atwood** (1745? — London 1807; Fellow des Trinity College in Cambridge) zur Demonstration der Fallgesetze erfundene und nach ihm benannte **Fallmaschine**, welche auf der Ueberlegung beruht, dass man die Beschleunigung des fallenden Körpers durch ein Gegengewicht vermindern kann, ohne die Gesetze, nach welchen Geschwindigkeit und Weg von der Zeit abhängen, zu verändern, vergl. des Erfinders Abhandlung von 1784: „On the rectilinear motion and rotation of bodies", — für die diesen ganzen Abschnitt beschlagende Literatur 227.

252. Stabiles und labiles Gleichgewicht. Wenn der Schwerpunct eines Körpers in verticaler Richtung unter einem Aufhängepuncte

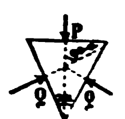
oder über einem Unterstützungspuncte liegt, so ist der Körper in Beziehung auf die Schwerkräfte im Gleichgewichte. Dieses Gleichgewicht heisst **stabil** oder **labil**, je nachdem der Körper, wenn er aus seiner Gleichgewichtslage entfernt worden ist, wieder in dieselbe Lage zurückkehrt oder nicht. Die Stabilität ist bei gleichem Gewichte um so grösser, je tiefer und je weiter entfernt von der Drehkante der Schwerpunct liegt.

Das einfachste Beispiel für labiles und stabiles Gleichgewicht bietet ein auf die Spitze oder Basis gestellter Kegel dar.

253. Der Keil. Bezeichnet P die auf den Rücken eines sog. Keiles des Winkels 2α wirkende Kraft, Q den senkrecht zu jeder der Seiten wirkenden Widerstand, so ist (228) für das Gleichgewicht

$$P = 2\,Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Ist somit α klein, so kann auch mit kleiner Kraft ein grosser Widerstand überwunden werden.



Der Keil bildet mit Schraube (254), Hebel (259), Wellrad (261) und Rolle (262) die fünf einfachen Maschinen, welche **Pappus** im achten Buche seiner Sammlungen aufzählt. Ist bei ihm $\alpha = 30°$, so ist $P = Q$; für $\alpha < 30°$ wird auch $P < Q$, so z. B. für $\alpha = 19°, 14°, 10°, 7°$, etc., $P = \frac{2}{3}Q$, $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{3}Q$, $\frac{1}{4}Q$, etc.

254. Die schiefe Ebene. Liegt ein Körper des Gewichtes P auf einer gegen die Horizontale unter dem Winkel α schiefen Ebene, so kann er (228) mit einer der schiefen Ebene parallelen Kraft $P \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha$, **oder,** wie bei der durch Aufwinden einer schiefen Ebene auf einen Zylinder entstehenden **Schraube,** mit einer nach horizontaler Richtung wirkenden Kraft $P \,.\, \mathrm{Tg}\,\alpha$ gehalten werden, — wo nicht, so fällt er mit der Beschleunigung $g \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha$ längs der schiefen Ebene. — Fällt aber ein Körper über eine schiefe Ebene der Länge a und Neigung α (s. Fig. 1), so erhält er (237) die Geschwindigkeit $\sqrt{2\,a\,g\,\mathrm{Sin}\,\alpha}$; geht er sodann auf eine schiefe Ebene der Länge b und Neigung β über, so nimmt er die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\,a\,g\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\;\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta) \qquad 1$$

auf dieselbe mit, — eine Geschwindigkeit, welche er auf der neuen Ebene selbst, beim Zurücklegen des Weges

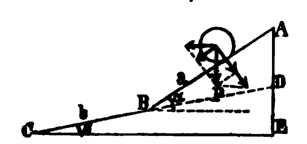
$$s = \frac{v^2}{2\,g\,\mathrm{Sin}\,\beta} = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}^2\,(\alpha - \beta)}{\mathrm{Sin}\,\beta} \qquad 2$$

erhalten hätte. Er langt also am Ende dieser Ebene mit der Geschwindigkeit

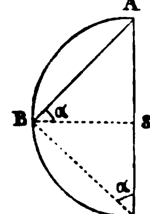
$$c = \sqrt{2\,g\,\mathrm{Sin}\,\beta\left(\frac{a\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}^2\,(\alpha - \beta)}{\mathrm{Sin}\,\beta} + b\right)} < \sqrt{2\,g\,(a\,\mathrm{Sin}\,\alpha + b\,\mathrm{Sin}\,\beta)} \qquad 3$$

an, d. h. mit einer kleinern Geschwindigkeit als beim Falle durch dieselbe Höhe AE. Diese Differenz erlischt für $\alpha = \beta$, d. h. auf geraden oder krummen (nicht aber auf gebrochenen) Bahnen wird die gleiche Geschwindigkeit erhalten wie beim freien Falle durch dieselbe Höhe.

Die in den Formeln $P \cdot \text{Sin}\,\alpha$ und $P \cdot \text{Tg}\,\alpha$ enthaltenen Grundgesetze der schiefen Ebene, welche sich auch in der Form: „Kraft zu Last wie Höhe zu Länge, oder wie Höhe zur Basis der schiefen Ebene“ geben lassen, scheint zuerst **Stevin** in seiner Schrift „De Beghinselen der Weegkonst s. Statica. Leyden 1586 in 4.“ ausgesprochen zu haben.



— Um über die schiefe Ebene AB mit der für sie erhaltenen Beschleunigung $g \cdot \text{Sin}\,\alpha$ zu fallen, braucht der Körper nach 237 : 3 die Zeit

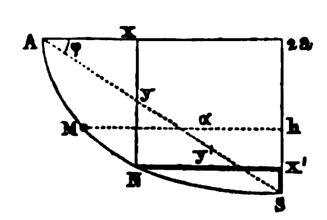


$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g \cdot \text{Sin}\,\alpha}}$$

und in derselben Zeit fällt er nach 237 : 1 frei durch die Strecke

$$s = \frac{g t^2}{2} = \frac{AB}{\text{Sin}\,\alpha} \qquad \text{so dass} \qquad AB = s\,\text{Sin}\,\alpha$$

Construirt man daher über s einen Halbkreis, so wird jede von A ausgehende Sehne AB desselben in der gleichen Zeit durchlaufen, in welcher ein Körper frei durch AC fällt. — Rollt ein Körper von M aus auf einer beliebigen Curve nach S herunter, so hat er nach den im Texte entwickelten Gesetzen bei Ankunft im Puncte N genau dieselbe Geschwindigkeit v, wie wenn er durch $h - x'$ frei gefallen wäre, d. h. es ist nach 237 : 2



$$v = \sqrt{2g\,(h - x')}$$

während nach 239 : 1, wenn der Weg von S aus gezählt wird, also bei Zunahme der Zeit abnimmt, überdiess

$$v = -\frac{ds}{dt}$$

so dass durch Gleichsetzung

$$\sqrt{2g\,(h - x')} = -\frac{ds}{dt} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{2g} \cdot dt = -\frac{ds}{\sqrt{h - x'}} \qquad 4$$

folgt. In dem speciellen Falle, wo die Curve eine gemeine Cycloide des Scheitels S ist, hat man aber, wenn s den Bogen NS bezeichnet, nach 154 : 5, 1

$$s^2 = (4a - AN)^2 = \left(4a - 8a\,\text{Sin}^2 \frac{v}{4}\right)^2 = 16\,a^2\,\text{Cos}^2 \frac{v}{2} =$$
$$= 8\,a^2\,(1 + \text{Cos}\,v) = 8a\,(2a - y) = 8\,a\,x' \qquad 5$$

also

$$2s \cdot ds = 8a \cdot dx' \qquad \text{oder} \qquad ds = \sqrt{2a} \cdot \frac{dx'}{\sqrt{x'}}$$

und daher nach 4 mit Hülfe von 65 : 9

$$\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot dt = -\frac{dx'}{\sqrt{h x' - x'^2}} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t = -\,\text{Arc Sin}\,\frac{2x' - h}{h} + \text{Const.}$$

folglich, wenn x' von h bis 0 genommen wird, die Zeit des Falles von M nach S

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot [-\operatorname{Arc\,Sin}(-1) + \operatorname{Arc\,Sin} 1] = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \qquad 6$$

Es ist also für die Cycloide t von h unabhängig, oder es braucht, wie es schon **Hugens** nachwies und (s. 255) benutzte, ein Körper, um auf der Cycloide nach dem tiefsten Puncte zu fallen, gleich viel Zeit, in welchem Puncte er auch aufgelegt werden mag, — eine Eigenschaft, welche der Cycloide den Namen **Tautochrone** verschafft hat, dem man in neuerer Zeit auch oft den Namen **Isochrone** substituirt, welchen ursprünglich **Leibnitz** der Neil-schen Parabel (s. 149) beilegte, da auf dieser ein Körper in gleichen Zeiten gleich tief fällt. — Man kann auch, wie diess 1696 Johannes **Bernoulli** (vergl. seine Opera I 187 u. f., II 254 u. f., etc.; auch Jac. Bern. Op. II 768 u. f.) machte, die Frage stellen, wie muss die Curve MS beschaffen sein, damit ein Körper in der kürzesten Zeit von M nach S fällt, — oder welches ist die sog. **Brachystochrone?** Es ist diess offenbar diejenige, für welche die aus 4 folgende Gleichung

$$t = \int_0^h X u \,.\, dx' \quad \text{wo} \quad u = \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}} \quad \text{und} \quad X = \frac{1}{\sqrt{2g(h - x')}}$$

für t einen Minimumswerth ergibt, so dass, — wenn

$$t' = \int_0^h X u' \,.\, dx'$$

gesetzt wird, wo u' den Werth bezeichnet, welchen u annimmt, wenn y' für eine andere Verbindung von M und S in $y' + i \,.\, \delta y'$ übergeht, — beständig

$$t' - t = \int_0^h X (u' - u) \,.\, dx'$$

einen positiven Werth erhält: es ist dabei i als eine unendlich kleine constante Grösse zu denken, $\delta y'$ aber als eine willkürliche Function von x', welche bloss an die Bedingung geknüpft ist, sowohl für $x' = 0$, als für $x' = h$ zu verschwinden. Denkt man sich nun $u' - u$ in eine nach den Potenzen von i fortschreitende Reihe entwickelt, und ist das erste Glied dieser Reihe $i \,.\, \delta u$, so ist das erste, das Vorzeichen bestimmende Glied von $t' - t$ offenbar

$$i \,.\, \int_0^h X \,.\, \delta u \,.\, dx'$$

und es muss daher dieses Integrale verschwinden, da sonst $t' - t$ mit i das Zeichen wechseln müsste, also nicht immer positiv würde. Nun ist offenbar

$$i \,.\, \delta u = \frac{\tfrac{1}{2} \,.\, 2 dy' \,.\, i d\delta y'}{dx'^2 \,.\, u} \qquad \text{oder} \qquad \delta u = \frac{1}{u} \cdot \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{d\delta y'}{dx'}$$

also hat man mit Hülfe von 64 : 3

$$0 = \int_0^h \frac{X}{u} \cdot \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{d\delta y'}{dx'} dx'$$

$$= \left[_0^h \frac{X}{u} \cdot \frac{dy'}{dx'} \,.\, \delta y' \right] - \int_0^h \frac{d\left[\frac{X}{u} \cdot \frac{dy'}{dx'}\right]}{dx'} \,.\, \delta y' \,.\, dx'$$

Nun ist das erste Glied Null, da $\delta y'$ an beiden Grenzen verschwindet, und das zweite kann, da $\delta y'$ eine willkürliche Function von x' ist, nur Null werden, wenn

$$\frac{d\left[\frac{X}{u} \cdot \frac{dy'}{dx'}\right]}{dx'} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{X}{u} \cdot \frac{dy'}{dx'} = C$$

ist, wo C eine Constante bezeichnet; also muss

$$\frac{dy'}{dx'} = C.\sqrt{2g(h-x')}\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}} \quad \text{oder} \quad dy' = \frac{C(h-x')\sqrt{2g}.dx'}{\sqrt{(h-x')-2gC^2(h-x')^2}}$$

oder, wenn man $y' = \alpha - x$ und $x' = h - y$ setzt, d. h. den Anfangspunct nach M verlegt, und sich auf eine horizontale Axe bezieht,

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2\beta y - y^2}} \quad \text{wo} \quad \beta = \frac{1}{4gC^2} \qquad 7$$

Da nun diese Gleichung 7 der Brachystochrone genau mit der Gleichung 154 : 4 der gemeinen Cycloiden übereinstimmt, so ist somit der Beweis geleistet, dass die Brachystochrone eine Cycloide ist, deren Anfangspunct in M liegt, und für welche β den Radius des erzeugenden Kreises darstellt; die Grösse C kann aus der Gleichung 154 : 2, wenn man in derselben $x = \alpha$, $y = h$ und $a = b = \beta$ setzt, durch Näherung leicht bestimmt werden. — Anhangsweise mag noch bemerkt werden, dass ein Körper, um durch AS zu fallen, nach 237 : 3 die Zeit

$$T = \sqrt{\frac{2.AS}{g.\sin\varphi}} = \sqrt{\frac{a(\pi^2+4)}{g}} > \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \qquad 8$$

braucht, also im Vergleiche mit 6 wirklich mehr Zeit, als beim Falle durch die Cycloide AMS; es lässt sich so, ohne des Beweises für die Identität der Brachystochrone mit einer Cycloide zu bedürfen, einfach nachweisen, dass wenigstens die Gerade nicht als Brachystochrone auftritt, sondern sich in diesem Falle das alte Sprichwort „En guote Chrumb ist nüd umb" glänzend bewährt.

255. Das mathematische Pendel. Gibt man einer starren Geraden l, die am einen Ende befestigt ist, am andern Ende einen schweren Punct trägt (einem sog. mathematischen Pendel), eine kleine Elongation α aus der verticalen Ruhelage (s. Fig. 1), so fällt sie wieder gegen diese zurück, und der Punct erlangt (254) nach Rückkehr zur Elongation β die Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{gl(\alpha^2-\beta^2)}\,\sin 1'' \qquad \text{also für } \beta = 0 \qquad v = \alpha\sqrt{gl}\,\sin 1'' \qquad 1$$

als Maximalgeschwindigkeit, und mit dieser geht das Pendel über die Ruhelage hinaus, bis es, nachdem es eine entgegengesetzte Elongation α erhalten, durch die Gegenwirkung der Schwere wieder seine Geschwindigkeit verloren, eine **einfache Schwingung** oder **Oscillation** vollendet hat, um sofort wieder zurückzuschwingen. — Denkt man sich über dem, für eine kleine Elongation zu einer Geraden werdenden Schwingungsbogen einen Halbkreis construirt, und lässt, im Augenblicke, wo eine Schwingung beginnt, einen Punct mit der constanten Geschwindigkeit v von A aus sich im Halbkreise bewegen, so findet man, dass er in dem vertical unter C liegenden Puncte D parallel zum Schwingungsbogen die Geschwindigkeits-Componente $v.\cos\gamma = c$ hat, also nothwendig zur Vollendung seiner $\alpha.1.\sin 1''.\pi$ langen Bahn die Schwingungszeit

t des Pendels braucht. Es ist also diese

$$t = \frac{\alpha \,.\, l \,.\, \mathrm{Sin}\, 1'' \,.\, \pi}{v} = \pi \,.\, \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 2$$

und somit von dem kleinen Schwingungsbogen unabhängig. Aus 2 folgen

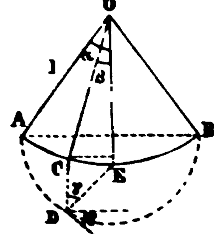
$$l = \frac{g\,t^2}{\pi^2} \qquad g = \frac{l\,\pi^2}{t^2} \qquad dt = \frac{\pi^2}{2\,g\,t}\,dl = \frac{t}{2\,.\,l}\,dl \qquad 3$$

und somit speciell für $t = 1^s$ oder für das sog. **Secundenpendel**

$$L = \frac{g}{\pi^2} \qquad g = L \,.\, \pi^2 \qquad dt = \frac{\pi^2}{2\,g}\,dL = \frac{1}{2\,L}\,dL \qquad 4$$

Für $g = 9^m{,}80557$ wird z. B. $L = 0^m{,}99351$, und, wenn $dT = 86400 \,.\, dt$ die sich in einem vollen Tage anhäufende Differenz der Schwingungszeit bezeichnet, und dL in Millimetern ausgedrückt ist, $dT = 43^s{,}482 \,.\, dL$, so dass also noch eine Veränderung der Pendellänge von nur $0{,}01^{mm}$ einen merklichen Einfluss hat.

Der zuerst von **Galilei** etwa 1583 an einer Hängelampe im Dome zu Pisa beobachtete Isochronismus kleiner Pendelschwingungen lässt sich auf die im Texte angedeutete Art leicht elementar nachweisen, da aus der Figur nach 237 : 2



$$c = \sqrt{2\,g\,l\,(\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\alpha)} = \sqrt{4\,g\,l\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder also für kleine Elongationen nahe

$$c = \sqrt{g\,l\,(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)} \,.\, \mathrm{Sin}\, 1''$$

d. h. 1 folgt, — und ebenso nahe

$$v\,\mathrm{Cos}\,\gamma = v\,\frac{CD}{DE} = v\,\frac{\sqrt{AC\,.\,CB}}{AE} = \frac{v\,\sqrt{l\,(\alpha-\beta)\,\mathrm{Sin}\,1''\,.\,l\,(\alpha+\beta)\,\mathrm{Sin}\,1''}}{l\,.\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,1''} = c$$

Will man dagegen die Elongation α nicht von vorneherein als klein annehmen, so hat man nach 254 : 4

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2\,g\,(h - x')}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \,.\, \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}x}\;\sqrt{2\,a\,x - x^2}} \qquad 5$$

wo theils nach Figur, theils zur Abkürzung

$$h = l\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha) = l \,.\, 2\,a \qquad \text{oder} \qquad a = \mathrm{Sin}^2\,\frac{\alpha}{2}$$

$$x' = l\,(1 - \mathrm{Cos}\,\beta) = l \,.\, x \qquad ds = l \,.\, d\beta = \frac{l \,.\, dx}{\sqrt{2\,x - x^2}} \qquad 6$$

Bezeichnet somit t die Zeit einer einfachen Schwingung, oder die doppelte Zeit, welche das Pendel braucht, um aus der Elongation α in die Ruhelage zurückzukehren, so hat man nach 5, da den Grenzwerthen α und o für β nach 6 die Grenzwerthe 2 a und o für x entsprechen

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \,.\, \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}x}\;\sqrt{2\,a\,x - x^2}} \qquad 7$$

Nun hat man nach dem Binomischen Lehrsatze

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}x^3 + \dots$$

also ist nach 7

$$t = \sqrt{\frac{1}{g}}\left[A_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot A_1 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot A_3 + \dots\right] \qquad 8$$

wo mit Hülfe von 67 : 8 und 65 : 9

$$A_n = \int_0^{2a}\frac{x^n . dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int_0^{2a}\frac{x^{n-\frac{1}{2}} . dx}{\sqrt{2a-x}} =$$

$$= \left[\frac{x^{n-\frac{1}{2}} . \sqrt{2a-x}}{-n}\right]_0^{2a} + \frac{(2n-1)a}{n}\int_0^{2a}\frac{x^{n-\frac{3}{2}} . dx}{\sqrt{2a-x}} =$$

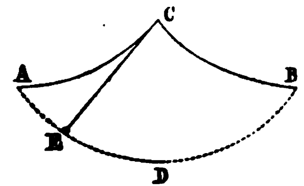
$$= \frac{(2n-1)a}{n}\cdot A_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)}\cdot a^2 . A_{n-2} = \dots$$

$$= \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}(2a)^n . \int_0^{2a}\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}(2a)^n . \pi \qquad 9$$

so dass also nach 6 und 8 schliesslich

$$t = \pi\sqrt{\frac{1}{g}}\cdot\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . Sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . Sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . Sin^6\frac{\alpha}{2} + \dots\right] \qquad 10$$

folgt, woraus für ein kleines α sofort 2 als erste Näherung hervorgeht. Für grössere Elongationen nimmt dagegen nach 10 die Schwungzeit mit der Elongation merklich zu, und diess veranlasste schon **Hugens**, den Vorschlag zu machen, in gewissen Fällen dem Kreispendel ein **Cycloidalpendel** zu substituiren, d. h. das Pendel C E durch Aufhängen desselben zwischen zwei Halb-Cycloiden C A und C B (nach 154) zu swingen, selbst eine ebensolche Cycloide A D B zu beschreiben, oder (nach 254) isochron zu bleiben. — Bezeichnet L die Länge eines Secundenpendels, und sind t_1, t_2 die Schwungzeiten zweier Pendel der Längen l_1, l_2, so hat man nach 4 und 8



$$L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{1}{t^2} \qquad l_1 = L . t_1^2 \qquad l_2 = L . t_2^2 \qquad 11$$

und daher auch

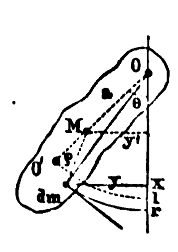
$$l_1 - l_2 = L(t_1 + t_2)(t_1 - t_2) \qquad 12$$

Man kann daher die Länge des Secundenpendels zur Noth nach 11 bestimmen, wenn man eine kleine Kugel an einem Coconfaden von bekannter Länge schwingen lässt, — etwas besser nach 12, da man alsdann nur die Differenz der Längen zu messen braucht, — freilich noch besser mit einem Reversionspendel (vergl. 256). Kann man für einen Ort die Länge des Secundenpendels (nach 256, 375) berechnen, so gibt 12 umgekehrt Anleitung, die Länge $l_1 - l_2$ eines Etalon's annähernd zu bestimmen, vergl. „Francis **Place** (Dietendorf bei Gotha 1833; Lehrer der Naturwissenschaften zu Oschatz in Sachsen), Ueber die Prüfung der Glasmikrometer. Berlin 1860 in 8."

256. Das physische Pendel. Ein Pendel, bei dem starre Linie und schwerer Punct durch einen Stab mit oder ohne Linse ersetzt

sind, d. h. ein physisches Pendel, stellt eine Verbindung von unzählig vielen mathematischen Pendeln verschiedener Länge **dar**, von denen die meisten **gezwungen**, und nur wenige, die durch die sog. **Schwingungspuncte** bestimmten, **frei** eine mittlere Schwungzeit inne halten. Vertauscht man den Aufhängepunct mit demjenigen Schwingungspuncte, der mit ihm und dem Schwerpuncte in einer Geraden liegt, so wird dadurch, wie schon Hugens zeigte, die Schwungzeit des Pendels nicht verändert, und man kann daher durch Versuch die Länge des einem physischen Pendel entsprechenden mathematischen Pendels bestimmen, indem man zwei vertauschbare Aufhängepuncte aufsucht, und ihre Distanz misst.

Bezeichnet w die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit aller Theile eines um die durch O gehende Axe Z schwingenden Körpers zur Zeit t, und r den Abstand des Elementes dm von dieser Axe, so stellt r . w die wirkliche Geschwindigkeit dieses Elementes zur Zeit t dar, und



$$\frac{dx}{dt} = rw \cdot \frac{y}{r} = yw$$

$$\frac{dy}{dt} = -rw \cdot \frac{x}{r} = -xw$$

sind ihre Componenten nach den Axen der X und Y, so dass

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = r^2 \cdot w$$

oder durch Differentiation nach t

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = r^2 \cdot \frac{dw}{dt}$$

Man hat daher, da dw : dt für alle Elemente des Körpers gleich gross ist, nach 239 : 8 für die Drehung um die Axe der Z

$$\frac{dw}{dt} \cdot \int r^2 dm = \int (yX - xY)\, dm \qquad 1$$

Ist der Körper (dessen Masse und Schwerpunct mit M bezeichnet werden mag, während a die Distanz des Letztern von der Axe Z messen soll, y′ seine Distanz von der Ebene XZ zur Zeit t, und θ den Winkel der Ebenen MZ und XZ) nur der Schwere unterworfen, so ist $Y = o$, $X = g$, und da überdiess (entsprechend 133 : 1) $\int y \cdot dm = My'$, so geht 1 in

$$\frac{dw}{dt} \cdot \int r^2 dm = gM \cdot y' = gM \cdot a\, \mathrm{Sin}\, \theta \qquad 2$$

über. Bezeichnet ϱ die Distanz von dm zu einer durch den Schwerpunct parallel Z gelegten Axe, so ist (entsprechend 133 : 2)

$$\int r^2 \cdot dm = \int \varrho^2 \cdot dm + a^2 M = (a^2 + k^2) M \qquad 3$$

wo die für den Körper für ein und alle Male bestimmbare Grösse $\int \varrho^2 \cdot dm$ (nach 264 sein Trägheitsmoment in Beziehung auf eine bestimmte, durch den Schwerpunct gelegte Axe) der Symmetrie wegen gleich $k^2 \cdot M$ gesetzt worden ist. Da überdiess offenbar $w = -d\theta : dt$, so geht somit 2 in

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}(a^2 + k^2) M = gM \cdot a\, \mathrm{Sin}\, \theta \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ag\, \mathrm{Sin}\, \theta}{a^2 + k^2}$$

über, so dass, wenn noch mit $2 \cdot d\theta$ multiplicirt und integrirt wird,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2ag \cdot \mathrm{Cos}\, \theta}{a^2 + k^2} + \mathrm{Const.}$$

also für den Anfang der Bewegung, wo die Geschwindigkeit Null ist, und die Elongation des Schwerpunctes α sein mag,

$$0 = \frac{2ag \cdot Cos\,\alpha}{a^2 + k^2} + Const.$$

also endlich

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2ag(Cos\,\theta - Cos\,\alpha)}{a^2 + k^2} \qquad 4$$

Für ein mathematisches Pendel der Länge l geht 4 in

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gl(Cos\,\theta - Cos\,\alpha)}{l^2} \qquad 5$$

über, und es wird daher Letzteres mit dem Körper oder dem physischen Pendel gleich schwingen, wenn

$$\frac{a}{a^2 + k^2} = \frac{l}{l^2} \qquad \text{oder wenn} \qquad l = a + \frac{k^2}{a} \qquad 6$$

ist. Alle Puncte des Körpers, welche in der Ebene MZ in der zu Z im Abstande l gezogenen Parallelen Z', der sog. **Schwingungsaxe**, liegen, werden somit **frei** schwingen, — so auch der in der Verlängerung von a liegende Punct O', der speciell **Schwingungspunct** genannt wird. Lässt man den Körper um Z' statt um Z schwingen, so wird ihm wieder ein mathematisches Pendel der Länge l' entsprechen, und zwar wird nach 6

$$l' = (l - a) + \frac{k^2}{(l - a)} = l - a + k^2 : (k^2 : a) = l$$

so dass die beiden Axen Z und Z' reciprok sind, oder der bereits im Texte nach **Hugens** ausgesprochene Satz besteht, von dem das unabhängig von einander durch **Bohnenberger** in seiner „Astronomie. Tübingen 1811 in 8. (Pag. 448)“ und Henry **Kater** (Bristol 1777 — London 1835; Capitän in der brittischen Armee, und viele Jahre unter Lambton mit Messungen in Indien beschäftigt) in seiner Abhandlung „Experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in latitude of London (Phil. Trans. 1818)“ vorgeschlagene **Reversionspendel** eine unmittelbare Anwendung ist. Auch der in den letzten Jahren von den Söhnen **Repsold** ausgeführte Pendelapparat, für dessen specielle Beschreibung und Theorie auf die Musterarbeit „Emile **Plantamour** (Genf 1815; Professor der Astronomie und Director der Sternwarte in Genf), Expériences faites à Genève avec le pendule à réversion. Genève 1866 in 4.“ verwiesen werden kann, ist ein (circa $^3/_4{}^s$ schlagendes) Reversionspendel, welchem aber mehrere Hülfsapparate, namentlich eine Art Kathetometer (vergl. 273) zum Messen der Schneidendistanz, und eine ingenieuse Vorrichtung zur Bestimmung des Schwerpunctes beigegeben sind. — Für wirkliche Messungen des Secundenpendels vergl. 375.

257. Die Uhren. Die von den Alten zur Abtheilung der Zeit verwendeten **Sand-** und **Wasseruhren,** welche beide auf dem Principe beruhten, dass eine gegebene Menge Sand oder Wasser (unter Voraussetzung constanten Niveau's) immer dieselbe Zeit braucht, um aus einem obern Gefässe durch eine gegebene Oeffnung in ein unteres abzufliessen, wurden etwa vom 14. Jahrhundert hinweg nach und nach durch **Gewicht-** und **Federuhren** verdrängt, bei welchen die, durch die constant wirkende Kraft erzeugte, und durch ein sog. Echappement annähernd gleichförmig erhaltene Bewegung mittelst

einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit entsprechende **Schaar der** Wurflinien Ausgesprochenen. Ist umgekehrt der Wurfwinkel constant, so ergibt sich, da aus 6 und 7

$$CD = \frac{\mathrm{Sin}^2\alpha}{\mathrm{Sin}\,2\alpha} \cdot AC = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tg}\,\alpha \cdot AC \quad \text{und} \quad CI = -\,\mathrm{Ctg}\,2\alpha \cdot AC \qquad 10$$

folgen, dass sowohl die Scheitel als die Brennpuncte aller zugehörigen Wurflinien je in einer durch A gehenden Geraden liegen. — Vergleiche für diese merkwürdigen Eigenschaften der Wurflinien im leeren Raume meine „Beiträge zur Ballistik (Bern. Mitth. 1846)" und „Georg **Sidler** (Zug 1831; Professor der Mathematik in Bern), Ueber die Wurflinie im leeren Raume. Bern 1865 in 4°, — für die Wurflinien überhaupt aber „**Poisson**, Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à leur figure et leur rotation, et à l'influence du mouvement diurne de la terre. Paris 1839 in 4."

259. Der Hebel. Wirken nach entgegengesetztem Sinne (s. Fig.) zwei Kräfte auf zwei Puncte, welche mit einem in der Ebene der Kräfte liegenden **Stützpuncte** starr verbunden sind, so heisst das System **Hebel**, und steht (231) im Gleichgewichte, wenn die Momente (Pp und Qq) in Beziehung auf den Stützpunct gleich sind. Die Entfernungen (p und q) des Stützpunctes von den Kräften nennt man **Hebelarme**, und den Hebel, je nachdem ihr Winkel (α) gleich 180°, kleiner als 180° oder 0 ist, **doppelarmig, Winkelhebel** oder **einarmig.** Wirkt auf einen der Endpuncte des Hebels statt einer Kraft ein zweiter Hebel, etc., so erhält man den **zusammengesetzten Hebel,** an dem Gleichgewicht ist, wenn sich Kraft zu Last wie das Product der Lasthebelarme zum Producte der Krafthebelarme verhält. — Ist der Hebel materiell, so ist das Moment des im Schwerpuncte wirkenden Gewichtes dem Momente der in gleichem Sinne wirkenden Kraft beizufügen.

Das Hebelgesetz wurde zuerst von **Archimedes** ausgesprochen, und im ersten seiner zwei Bücher „De planorum aequilibrio" (vergl. 2) als Grundprincip an die Spitze der eigentlich erst von ihm zu einer Wissenschaft erhobenen Mechanik gestellt und erwiesen, — eine Ehrenstelle, welche ihm bis auf **Varignon** (vergl. 225) blieb. Bekanntlich soll das Auffinden dieses Gesetzes Archimedes zu dem Ausrufe veranlasst haben: „Gebt mir einen festen Punct ausserhalb, und ich will die Erde aus ihren Angeln heben."



260. Die Waage. Bezeichnen p und q die den vertical wirkenden Kräften P und Q bei horizontaler Lage entsprechenden Arme eines doppelarmigen Hebels (s. Fig. 1), und G das in dem um d unter dem Stützpuncte liegenden Schwerpuncte wirkende Gewicht des Hebels, so ist (259) der Hebel bei einem **Ausschlage** φ im Gleichgewichte, wenn

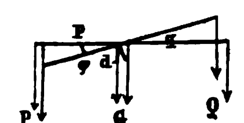
$$Pp\,\mathrm{Cos}\,\varphi = Qq\,\mathrm{Cos}\,\varphi \pm Gd\,\mathrm{Sin}\,\varphi \quad \text{oder} \quad \mathrm{Tg}\,\varphi = \pm\frac{Pp - Qq}{Gd} \qquad 1$$

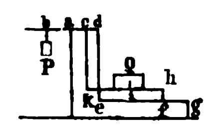
Verändert man, wie es bei der sog. **physikalischen Waage** geschieht, P, — oder, wie es bei der sog. **Schnellwaage** geschieht, p, bis $\varphi = 0$ wird, so ist $Pp = Qq$, so dass auf diese Weise eine unbekannte Last Q durch ein bekanntes Gewicht P ausgedrückt oder **abgewogen** werden kann, sobald man das Verhältniss der Arme, welches bei der physikalischen Waage gewöhnlich 1 ist, kennt; kennt man es nicht, so kann man zunächst Q mit einem fein zertheilten Körper, der sog. **Tara**, und dann diese mit Gewichten P abwägen, wo dann immer $Q = P$ ist. Die Waage heisst um so **empfindlicher**, je grösser φ für denselben kleinen Gewichtsüberschuss der einen Seite wird. — Eine sog. **Brückenwaage** ist (259, 231 und Fig. 2) im Gleichgewichte, wenn

$$P . ba = Q \frac{ih}{kh} ac + Q . \frac{ki}{kh} . \frac{fg}{ge} . ad = \frac{ge . ac . ih + ki . fg . ad}{kh . ge} Q$$ 2

vorausgesetzt, die unbelastete Waage sei für sich im Gleichgewicht. Ist sie so construirt, dass $ge : fg = ad : ac$, so wird $P . ba = Q . ac$, und eine Verschiebung von Q auf der Brücke bleibt ohne Einfluss. Für $ac : ba = 1 : 10$ oder $= 1 : 100$ heisst die Waage **Decimal-** oder **Centesimalwaage.**

Für den Constructionsdetail einer genauen Waage muss auf die speciellen physikalischen Werke (vergl. 245) und namentlich auf Carl's Repertorium verwiesen werden. Die Theorie der physikalischen Waage scheint **Euler** in seiner „Disquisitio de bilancibus (Comm. Petrop. X 1747)“ zuerst gegeben zu haben; der im Texte gegebenen Entwicklung mag beigefügt werden, dass sie namentlich darauf beruht, dass Stützpunct und Aufhängepunct der Schalen in derselben Geraden liegen, — da nur in diesem Falle der Ausschlag von der Belastung unabhängig ist. Je grösser die Tragkraft, desto grösser wird auch G sein müssen, desto kleiner also die Empfindlichkeit; doch rechnet man, dass auf 1 Kilogramm Belastung eine gute Waage mindestens noch 1 Milligramm anzeigen soll. — Ausser der physikalischen Waage, — der Schnellwaage oder römischen Waage, — und der Brückenwaage oder Wagenwaage, gibt es auch noch Zeigerwaagen, Federwaagen, Senkwaagen (vergl. 269), etc., auf welche hier aber nicht näher eingetreten werden kann.





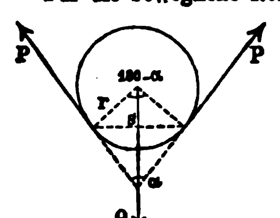
261. Das Wellrad. Durch Umdrehung eines doppelarmigen Hebels um eine durch seinen Stützpunct gehende, zu ihm senkrechte Axe, erhält man ein Wellrad, und es ist somit an diesem (259) Gleichgewicht, wenn sich Kraft zu Last wie der Radius der Welle zum Radius des Rades verhält. Sollen entsprechend dem zusammengesetzten Hebel zwei Wellräder in Verbindung gebracht werden, so versieht man die Welle des ersten und das Rad des zweiten Wellrades mit entsprechenden Erhöhungen (Zähnen) und Vertiefungen.

Ein Wellrad heisst **Haspel** oder **Winde,** je nachdem die Axe horizontal oder vertical ist, — ein gezahntes Rad **Stirnrad, Kammrad** oder **Kegelrad,** je nachdem die Zähne Verlängerungen der Radien sind, oder zu denselben senkrecht oder schief stehen.

Das Wellrad ist (vergl. 258) eine der fünf einfachen Maschinen der Alten; Kurbel, Tretrad, Pferdegöpel, etc. sind nichts Anderes als specielle Formen desselben.

262. Die Rollen und Flaschenzüge. Eine kreisrunde, an ihrem Umfange mit einer Rinne zur Aufnahme eines Seiles versehene Scheibe heisst **feste Rolle,** wenn sie bloss um ihr Centrum, — **bewegliche Rolle,** wenn auch ihr Centrum beweglich ist. Die feste Rolle, bei welcher Kraft und Last an dem umgeschlagenen Seile wirken, ist ein gleicharmiger Hebel und dient daher nur, um die Richtung einer Kraft abzuändern. Die bewegliche Rolle hängt dagegen in einem Seile, an dessen Enden Kräfte wirken, während die Last an ihrem Centrum angebracht wird, — ist daher (228) im Gleichgewichte, wenn sich jede Kraft zur Last verhält, wie der Radius zur Berührungssehne, also im günstigsten Falle wie 1:2. Aus Verbindung von festen und beweglichen Rollen gehen die sog. **Flaschenzüge** hervor, bei denen sich Kraft zu Last wie die Einheit zur Anzahl sämmtlicher Rollen verhält.

Für die bewegliche Rolle hat man offenbar nach 228:2



$$Q = P \cdot \sqrt{1 + 1 + 2 \operatorname{Cos} \alpha} = 2 P \cdot \operatorname{Cos} \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 P \cdot \frac{s/_2}{r} = P \cdot \frac{s}{r}$$

oder

$$P : Q = r : s$$

Dabei kann die eine Kraft durch einen Widerstand ersetzt werden, indem man das eine Ende des Seiles befestigt. — Den gemeinen Flaschenzug soll schon der zu Kaiser Augustus Zeiten lebende berühmte Baumeister **Vitruv** in seiner Architectur als etwas allgemein Bekanntes erwähnen; auch **Pappus** bildet denselben im 8. Buche seiner Sammlungen ab. — Beim sog. **Potenzen-Flaschenzug,** wo um jede bewegliche Rolle ein eigenes Seil geschlagen ist, dessen eines Ende aufgehängt, das andere am Mittelpunct der folgenden Rolle befestigt wird, verhält sich $P : Q = 1 : 2^n$, wo n die Anzahl der beweglichen Rollen bezeichnet.

263. Die Centralbewegung. Wird ein sich bewegender Punct je nach Verlauf einer Zeit t gegen ein Centrum angezogen, so haben die von seiner, je für die Zwischenzeit t resultirenden Bahn mit dem Centrum bestimmten Dreiecke nach 107 gleiche Fläche, oder es gilt, da für ein unendlich abnehmendes t die gebrochene Bahn zur Curve wird, das Gesetz: Bei jeder Centralbewegung werden

in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschrieben. Die **Centralbewegung im Kreise** ist somit nothwendig eine gleichförmige Bewegung, und erfordert, da ein im Kreise sich bewegender Punct in Folge der Trägheit ein constantes, **Centrifugalkraft** genanntes Bestreben f hat, sich vom Mittelpuncte zu entfernen, eine ebenso grosse constante Anziehung nach dem Mittelpuncte. Bezeichnet a die Geschwindigkeit im Kreise des Radius r und t die Umlaufszeit, so ist $2r\pi = at$, während $s = a\tau$ der mit seiner Sehne zu verwechselnde, in einem Zeittheilchen τ zurückgelegte Bogen ist. Zerlegen wir (238) s nach Tangente und Radius, so muss (237) die Letzterm entsprechende Componente $c = \frac{1}{2} f \tau^2$ sein, während geometrisch (124, 93) $c : s = s : 2r$ ist, und man hat daher

$$f = \frac{a^2}{r} = 4\pi^2 \frac{r}{t^2} \qquad \mathbf{1}$$

worauf die durch die sog. Centrifugalmaschine dargestellten Erscheinungen beruhen. Analog ist für einen zweiten, in der Zeit T einen Kreis des Radius R durchlaufenden Punct

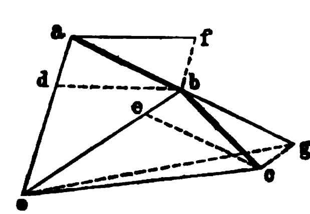
$$F = 4\pi^2 \frac{R}{T^2} \qquad \text{so dass} \qquad f : F = \frac{r}{R} : \frac{t^2}{T^2}$$

und, wenn überdiess

$$t^2 : T^2 = r^3 : R^3 \qquad \text{speciell} \qquad f : F = R^2 : r^2 \qquad \mathbf{2}$$

Vergleiche 406.

Der erste Satz des Textes geht aus der beistehenden Figur, in der af eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet, ad und be irgend welche Anziehungen nach dem Centrum sind, und ab = bg ist, ohne weiteres hervor. Der zweite Satz ist im Texte ausführlich bewiesen, und es ist höchstens in Beziehung auf die erwähnten Versuche beizufügen, dass der durch die Centrifugalkraft bewirkte Gesammteffect eines Körpers natürlich mit seiner Masse m zunimmt, oder nach 1, wenn k entsprechend 264 die lebendige Kraft bezeichnet, durch $ma^2 : r = k : r$ dargestellt wird. — Historisch ist zu bemerken, dass Giovanni Baptista **Benedetti** oder Benedictis (Venedig 1530 — Turin 1590; Philosoph und Mathematiker des Herzogs von Savoyen) zuerst erkannt haben soll, dass im Kreise geschwungene Körper, sich selbst überlassen, nach der Tangente fortgehen, wofür auf sein „Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber. Taurini 1585 in fol." verwiesen wird. Die Hauptgesetze der Centralbewegung im Kreise wurden zuerst von **Hugens**, der sie schon um 1666 gefunden haben soll, in seinem „Horologium oscillatorium" von 1673 (vergl. 257) ausgesprochen, dann von **Newton** in seinen Principien. — Ueber die Bewegung um Hauptaxen oder sog. freie Axen vergleiche 243 und 244, auch 419, — und für experimentelle Darlegung der betreffenden Gesetze z. B. „Franz **Heinen** (Düsseldorf 1807; Director der Realschule zu Düsseldorf), Ueber einige Rotationsapparate, insbesondere den Fessel'schen. Braunschweig 1857 in 8."



264. Einige Definitionen. Das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers nennt man **Menge der Bewegung,** — dasjenige aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit **lebendige Kraft,** — dasjenige aus Kraft und Weg **mechanische Arbeit,** — die Summe der Producte aus den Elementen eines Körpers in die Quadrate ihrer Distanzen von einer Axe oder Ebene (vergl. 133 und 243) endlich **Trägheitsmoment.** Als Einheit für die mechanische Arbeit braucht man den **Kilogrammeter,** d. h. die nöthige Kraft, um in 1^s ein Kilogramm um 1^m zu heben, und rechnet 75 derselben auf eine **Pferdekraft.**

Bezeichnen m Masse, P Kraft, t Zeit, s Weg, v Geschwindigkeit, b Bewegungsmenge, k lebendige Kraft und a Arbeit, so ist nach Definition

$$b = m \cdot v \qquad k = m \cdot v^2 \qquad a = P \cdot s \qquad 1$$

und da überdiess nach 237 für $g = P : m$

$$v = \frac{P}{m} \cdot t \qquad s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{m} \cdot t^2 = \frac{v\,t}{2} \qquad 2$$

so folgt

$$a = P \cdot s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{m} \cdot t^2 = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} k \qquad 3$$

Für die Geschichte des lebhaften und langjährigen Streites, der sich bei Einführung des Begriffes der lebendigen Kraft durch **Leibnitz** erhob, kann z. B. auf Montucla III 629—643 verwiesen werden.

265. Die Lehre vom Stosse. Folgt einer Kugel der Masse m und Geschwindigkeit c, eine andere Kugel der Masse M und der Geschwindigkeit $C > c$, so entsteht ein **Stoss.** Ist dieser Stoss **gerade,** d. h. geht er durch die beiden Mittelpuncte, und bezeichnen V und v die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, so ist der Geschwindigkeitsverlust der Hinterkugel

$$C - V = (1 + k) \cdot \frac{m\,(C - c)}{M + m} \qquad 1$$

und der Geschwindigkeitsgewinn der Vorderkugel

$$v - c = (1 + k)\, \frac{M\,(C - c)}{M + m} \qquad 2$$

wo k eine mit der Elasticität der Kugeln von 0 bis 1 zunehmende Grösse bezeichnet. Der bei dem Stosse entstehende Verlust an mechanischer Arbeit ist

$$L = m\,\frac{c^2 - v^2}{2} + M\,\frac{C^2 - V^2}{2} = (1 - k^2)\,\frac{(C - c)^2}{2} \cdot \frac{M \cdot m}{M + m} \qquad 3$$

zu setzen.

Beim geraden Stosse unelastischer Kugeln stellt offenbar

$$x = \frac{M\,C + m\,c}{M + m}$$

die gemeinschaftliche Geschwindigkeit vor, mit welcher die beiden Kugeln nach dem Stosse vorwärts gehen, so dass

$$C - x = \frac{m(C - c)}{M + m} \quad \text{und} \quad x - c = \frac{M(C - c)}{M + m}$$

Geschwindigkeitsverlust der Hinterkugel und Geschwindigkeitsgewinn der Vorderkugel bezeichnen. Sind die beiden Kugeln vollkommen elastisch, so wird durch den Rückschlag noch einmal derselbe Verlust und Gewinn, also im Ganzen der doppelte entstehen, — während für nicht vollkommen elastische Kugeln der Factor nur, wie in den Formeln 1 und 2 des Textes, $(1 + k)$ sein wird, wo k je nach dem Maasse der Elasticität zwischen 0 und 1 liegt. — Da nach 264:3 die Arbeit der beiden Kugeln vor und nach dem Stosse

$$\frac{M C^2 + m c^2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{M V^2 + m v^2}{2}$$

beträgt, so ist der Verlust an Arbeit

$$L = M \cdot \frac{C^2 - V^2}{2} + m \frac{c^2 - v^2}{2} = \frac{M}{2}(C - V)[2C - (C - V)] - \frac{m}{2}(v - c)[(v - c) + 2c]$$

$$= \frac{M m (C - c)(1 + k)}{2(M + m)^2}[2(C - c)(M + m) - (1 + k)(C - c)(M + m)] \, .$$

woraus sofort die 3 des Textes folgt.

266. Reibung und Widerstand des Mittels. Die Bewegungsgesetze werden durch den Widerstand des Mittels und die Reibung modificirt. Ersterer wächst mit der Dichte des Mittels und dem Quadrate der Geschwindigkeit, hängt aber auch sehr von der Gestalt des Körpers ab. Letztere ist bei gleitender Bewegung von der Grösse der Berührungsfläche unabhängig, dagegen dem Drucke D proportional, so dass der Widerstand gegen das Verschieben $W = f . D$ ist, wo f den sog. **Reibungscoefficienten** bezeichnet. Wirkt somit eine Kraft P, unter dem Winkel α mit der Normale auf die Reibungsfläche, so ist Gleichgewicht, wenn (229)

$$f . P . \mathrm{Cos}\,\alpha = P . \mathrm{Sin}\,\alpha \quad \text{oder} \quad f = \mathrm{Tg}\,\alpha$$

Dieser von der Grösse der Kraft unabhängige, durch Zufügen einer zweiten Kraft immer herstellbare Winkel heisst **Reibungswinkel,** — für einen auf einer schiefen Ebene der Neigung α liegenden Körper **Abrutschungswinkel** oder beim Erdbau **natürliche Böschung.** Durch Anwendung von Schmiermitteln (Seife, Schweinefett, Oel, etc.), oder auch durch Verwandlung der gleitenden in eine rollende Bewegung mit Hülfe von Walzen oder Frictionsrollen, kann die Reibung sehr vermindert werden.

Zuweilen wird auch die Reibung absichtlich vermehrt, wie z. B. bei Rädern mit Hülfe des Radschuhes oder der Spannkette, — bei Eisenbahnen von grosser Steigung durch Verwendung sehr schwerer Locomotiven, — etc.

XXVII. Hydrostatik und Hydraulik.

267. Hydrostatisches Grundgesetz. In jeder Flüssigkeit pflanzt sich die Wirkung einer Kraft nach allen Seiten fort, und die Drucke auf verschiedene Theile der Wandung eines vollständig gefüllten

und begrenzten Gefässes verhalten sich wie ihre Flächen, also bei kreisförmigen Theilen wie die Quadrate der Radien, — ein Gesetz, auf dem z. B. die Bramah'sche Presse beruht. Wird an einer Stelle der Druck aufgehoben, so zeigt sich, wie z. B. bei Segner's Wasserrad, der Gegendruck.

Das Wasserrad wurde von **Segner** in seinem „Programma quo theoriam machinæ cujusdam hydraulicæ præmittit. Gottingæ 1750 in 4." beschrieben, — die Presse von Joseph **Bramah** (Stainsborough in Yorkshire 1749 — Pimliko bei London 1814; erst Schreiner, dann Mechanikus und Ingenieur in London) in seiner Abhandlung „Description and account of a new press (Nicholson's Journal I, 1797)". — Von speciellen Schriften über Hydraulik mögen folgende angeführt werden: „Dan. **Bernoulli**, Hydrodynamica. Argentorati 1738 in 4., — **Euler**, De statu æquilibrii ac motus fluidorum. Sect. 1—4. (Comm. Petrop. 1769—1772; deutsch von Brandes, Leipzig 1806 in 8.), — **Bossut**, Hydrodynamique. Paris 1771, 2 Vol. in 8. (Deutsch von Langsdorf, Frankfurt 1792), — Karl Christian von **Langsdorf** (Nauheim 1757 — Heidelberg 1834; erst Landrichter zu Mühlheim, nachher Salineninspector zu Gernbronn, dann successive Professor der Maschinenlehre und Mathematik zu Erlangen, Wilna und Heidelberg), Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794 in 4. (Forts. 1796), — **Eytelwein**, Hydrostatik. Berlin 1826 in 8., — Jean-François **d'Aubuisson** de Voisins (Toulouse 1769 — Toulouse 1841; Minen-Ingenieur und Mitglied der Academie in Toulouse), Traité d'hydraulique. Paris 1834 in 8., — **Morin**, Hydraulique. Paris 1846 in 8., — **Scheffler**, Hydrostatik und Hydraulik. Braunschweig 1848, 2 Bde. in 8., — Joseph-Aimé **Lesbros** (Vynes in Hautes-Alpes 1790; franz. Genie-Officier), Hydraulique expérimentale. Paris 1850 in 4. (Erhielt den Monthyon-Preis), — Heinrich Gustav **Magnus** (Berlin 1802 — Berlin 1870; Professor der Physik und Mitglied der Academie zu Berlin), Hydraulische Untersuchungen. Leipzig 1855 in 8, — **Weisbach**, Die Experimentalhydraulik. Freiberg 1855 in 8., — Christian Moritz **Rühlmann** (Dresden 1811; Professor der Maschinenlehre in Hannover), Hydromechanik. Leipzig 1858 in 8., — Lejeune **Dirichlet**, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (Hergestellt von Dedekind). Göttingen 1860 in 4., — etc."

268. Weitere hydrostatische Gesetze. Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist in Folge der Schwere und der leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen horizontal. Der Druck auf ein Theilchen im Innern der Flüssigkeit (folglich auch der Gegendruck nach oben) und auf den Boden eines Gefässes ist gleich dem Gewichte des auf ihm ruhenden Flüssigkeitscylinders, und hängt nicht von Form und Inhalt des Gefässes ab; der Druck auf eine Stelle einer Seitenwand ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche dieselbe zur Grundfläche, und die Distanz ihres Schwerpunctes vom Niveau der Flüssigkeit zur Höhe hat. — In communicirenden Gefässen, z. B. in den beiden Schenkeln der sog. Kanalwaage, steht dieselbe Flüssigkeit gleich hoch, während sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten umgekehrt wie ihre Dichten

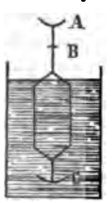
verhalten; ist es nicht möglich, so zeigt sich, wie bei dem sog. hydrostatischen Blasebalge, bei den Springbrunnen, etc., ein entsprechender Druck.

Den ersten Satz des Textes spricht schon **Archimedes** im ersten seiner zwei Bücher „De iis quæ in humido vehuntur" in der strengern Form „Die Oberfläche jeder ruhenden Flüssigkeit ist sphärisch, und das Centrum dieser sphärischen Oberfläche fällt mit dem Centrum der Erde zusammen" aus. — Die noch jetzt zuweilen (vergl. 212) zu einem untergeordneten Nivellement benutzte Kanalwaage scheint schon den Alten bekannt gewesen zu sein; so spricht z. B. der jüngere **Theon** (um 370; Mathematiker und Astronom in Alexandrien; Vater der Hypatia) in seinem Commentar zu Ptolemäus von einer Wasserwaage, die kaum etwas Anderes als eine Kanalwaage gewesen sein kann.

269. Bestimmung der Dichte. Das Gewicht der von einem Körper verdrängten Flüssigkeit ist gleich seinem Gewichtsverluste in derselben, und man erhält somit (246) die Dichte eines Körpers, wenn man sein absolutes Gewicht durch seinen Gewichtsverlust in reinem Wasser theilt; es ist diess das Princip der sog. **hydrostatischen Waage.** — Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als dasjenige der von ihm verdrängten Flüssigkeit, so steigt er in derselben, bis sich beide Gewichte ausgeglichen haben, — er **schwimmt**; will man seine Dichte bestimmen, so verbindet man ihn mit einem so dichten Körper von bekanntem Gewichtsverluste, dass noch ihre Verbindung untersinkt. — Je dichter eine Flüssigkeit ist, um so weniger tief sinkt ein Körper von gegebenem Gewichte in derselben ein, und um so mehr muss ein Körper belastet werden, um bis zu einer bestimmten Marke einzusinken. Hierauf beruhen z. B. der sog. **Scalenaräometer** von Beck, wo 0^0 und 30^0 den Dichten 1 und 0,850 entsprechen, — und der sog. **Gewichtsaräometer** oder die **Senkwaage** von Nicholson, bei der, wenn a, c, b die Gewichte bezeichnen, welche (s. Fig.) auf A zu legen sind, um ein Einsinken bis zur Marke B zu bewirken, je nachdem ein zu untersuchender Körper bei A, oder C, oder gar nicht aufgelegt wird, die Dichte des Körpers nach der Formel $d = (b - a) : (c - a)$ berechnet werden kann. [IX].

Bekanntlich erfand **Archimedes**, als er einst im Bade darüber nachdachte, wie er die Silbermenge bestimmen könnte, welche ein Goldschmied betrügerischer Weise für die goldene Krone des Königs Hieron verwendet hatte, die im Texte gegebene Grundregel für die Bestimmung der Dichte, — und war darüber so erfreut, dass er vergass, sich anzukleiden, und mit dem Ausrufe *Εὕρηκα* durch die Strassen sprang; auch das Schwimmen handelte er wohl in der 268 angeführten Abhandlung zuerst mathematisch ab. — Der geschickte Glasbläser Sigmund Friedrich **Benteli**, und nicht Benteley (Bern 1755 — Bern 1808; Apotheker in Bern) und sein damaliger Provisor Joh.

Heinrich **Beck** (Thun 1778 — Thun 1811; später Professor der Physik in Bern), construirten mit einander das im Texte erwähnte, immer noch beliebte, und z. B. in Bd. 9 von Tromsdorf's Journal der Pharmacie behandelte Scalenaräometer, — während der durch sein „Journal of natural philosophy, chemistry and the arts. London 1796—1813, 5 Vol. in 4. und 36 Vol. in 8." auch sonst bekannte William **Nicholson** (London 1753 — London 1815; Civilingenieur und Literat in London) in der Abhandlung „Description of a new instrument for measuring the specific gravities of bodies (Mem. Manchest. Soc. II 1787)" ungefähr gleichzeitig seine nette Senkwaage beschrieb, — mit der übrigens auch eine ältere von **Fahrenheit** (s. Gehler I 380), und eine neuere, welche Joh. Georg **Tralles** (Hamburg 1763 — London 1822; Professor der Mathematik und Physik in Bern und Berlin; vergl. Bd. 1 und 2 meiner Biographieen) in Bd. 30 von Gilbert's Annalen empfahl, sehr nahe verwandt sind. — Um das specifische Gewicht oder die Dichte von Flüssigkeiten zu bestimmen, kann man z. B. den Gewichtsverlust desselben Körpers in ihnen und in reinem Wasser ermitteln, — oder auch ein Gefäss leer, und dann successive mit ihnen und mit reinem Wasser gefüllt, abwägen.



270. Die Capillarität. Die, die Erscheinungen der Adhäsion und Cohäsion (248) bedingende Molecularanziehung bewirkt auch eine Modification des Gesetzes der communicirenden Röhren (268), die sog. **Capillarattraction.** Netzt eine Flüssigkeit die Wandungen einer Röhre (Wasser in Glas), so steigt sie an denselben empor, ja erhebt sich mit concaver Oberfläche in sehr engen Röhren weit über das gesetzliche Niveau, und zwar so, dass die Höhe dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportionirt ist, und mit der Wärme abnimmt. Umgekehrt steht eine nicht netzende Flüssigkeit (Quecksilber in Glas) am Rande tiefer, und sinkt in engen Röhren mit convexer Oberfläche unter das Niveau, — und ebenso scheint sich eine bei gewöhnlicher Temperatur netzende Flüssigkeit bei sehr hohen Temperaturen zu verhalten. Eine verwandte Erscheinung ist der Flüssigkeitsaustausch durch poröse Wände oder Membranen, die sog. **Endosmose** und **Exosmose.**

Als erster Entdecker der Capillarität wird Niccolo **Aggiunti** oder Adjunctus (Borgo di San Sepolcro in Toskana 1600 — Pisa 1635; Professor der Mathematik zu Pisa) angesehen, — während Isaac **Vossius** (Leyden 1618 — Windsor 1689; Sohn von Gerhard; erst lange auf Reisen, zuletzt Canonicus in Windsor) in seiner Schrift „De Nili et aliorum fluminum origine. Hage Com. 1666 in 4." zuerst von der Depression des Quecksilbers in Glasröhren sprechen, — und G. F. **Parrot** in seiner „Uebersicht des Systems der theoretischen Physik. Dorpat 1809—1811, 2 Bde. in 8. (Bd. 3 unter dem Titel: Grundriss der Physik der Erde und Geologie. Riga 1815)" zuerst Erscheinungen der Endosmose anführen soll, wenn man Letztere nicht mit der schon **Nollet** um 1748 bekannt gewordenen ähnlichen Erscheinung bei Gasen und Dämpfen, der sog. **Diffusion** (vergl. 279), zusammenwerfen will. Für die

weitere Entwicklung der Kenntniss dieser Erscheinungen vergl. z. B. „**Clairault**, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743 in 8. (2 éd. durch Poisson 1808), — **Musschenbroek**, Introductio ad philosophiam naturalem. Leyden 1762, 2 Vol. in 4. (Posthum, von Lulof edirt), — **Lalande**, Dissertation sur la cause de l'élévation des liqueurs dans les tubes capillaires. Paris 1770 in 12., — **Laplace**, Théorie de l'action capillaire. Paris 1806 in 4. (Suppl. 1807), und: Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires (Annal. de chim. et de phys. XII, 1819), — Nicolaus Wolfgang **Fischer** (Gross-Meseritz in Mähren 1782 — Breslau 1850; Professor der Chemie zu Breslau), Ueber Capillarwirkungen thierischer Blase (Pogg. X und XI 1827), — René-Joaquim-Henri **Dutrochet** (Néon in Poitou 1776 — Paris 1847; Militärarzt), Nouvelles recherches sur l'endosmose et l'exosmose (Annal. de chim et de phys. XXXV, 1828), — **Poisson**, Théorie nouvelle de l'action capillaire. Paris 1831 in 4., — Carl **Brunner** (Bern 1823; Professor der Physik in Bern, sowie Telegraphendirector in Bern und später in Wien), De ratione qua inter fluidorum cohæsionem et calorem intercedit. Berolini 1846 in 4., — **Holtzmann**, Theorie der Erscheinungen der Capillarität. Stuttgart 1862 in 8., — etc."

271. Die Ausflussgesetze. Die Ausflussgeschwindigkeit ist bei engen Oeffnungen gleich der Geschwindigkeit zu setzen, welche beim freien Falle durch die Druckhöhe erhalten würde, — so dass (237) die Ausflussmenge durch eine Oeffnung der Fläche q für die Druckhöhe h gleich $q \cdot \sqrt{2gh}$ wäre. Für weitere Oeffnungen wird diese Menge durch die im Innern der Flüssigkeit entstehenden Bewegungen und die damit zusammenhängende Contraction sehr vermindert, so dass obiger Formel ein Erfahrungsfactor (etwa 0,65) gegeben, oder versucht werden muss, die Ausflussmenge durch conisch sich erweiternde Ansatzröhren wieder zu vermehren. Durch eine $0^m,05$ unter dem Wasserspiegel befindliche Oeffnung von $0^m,01$ Radius in einer $0^m,017$ dicken Wand fliessen in einem Tage nach Prony 20^{cm} Wasser, der sog. metrische **Wasserzoll**, ab. — Der Stoss einer bewegten Wassermasse ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Druckfläche ist, und deren Höhe $a^2 : 2g$ der Geschwindigkeit a des Wassers als Druckhöhe entspricht. Bewegt sich das Wasser in Röhren, so zeigt sich eine Hemmung in seinem Abflusse als Druck auf die Wandungen, der z. B. beim sog. **Stossheber** nutzbar gemacht wird.

Ueber den Ausfluss des Wassers, dessen im Eingange des Textes ausgesprochenes Fundamentalgesetz **Torricelli** 1643 in seiner Schrift „De motu naturaliter accelerato" zuerst ausgesprochen haben soll, — sowie über die Bestimmung der Geschwindigkeit fliessender Gewässer vergl. z. B. „Reinhard **Woltman** (Axstedt in Hannover 1757 — Hamburg 1837; Wasserbau-Director in Ritzebüttel und Hamburg), Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg 1790 in 4. (Neue Aufl. Leipzig 1835), — **Prony**, Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes. Paris 1802 in 4., — **Weisbach**, Versuche über den Ausfluss des Wassers. Leipzig 1842 in 4., — **Lesbros**,

Expériences sur les lois de l'écoulement de l'eau. Paris 1851 in 4., — etc." — Der Stossheber oder hydraulische Widder wurde 1796 von Jos. **Montgolfier**, mit Hülfe des ihm befreundeten, ihm schon bei Verfertigung der ersten Montgolfieren (vergl. 278) behülflichen Genfer-Mechanikers Aimé **Argand** (1755—1803) construirt, und functionirte, trotz des (s. Cosmos 1868 V 16) von **Bossut** erhobenen Widerspruchs, auf das Schönste.

272. Die Wellenbewegung. Hebt man, z. B. durch Aufsaugen, an irgend einer Stelle einer Flüssigkeit eine Säule über das Niveau empor, und lässt sie dann wieder los, so sinkt sie nach den Gesetzen der Hydrostatik nieder, und geht sogar, da die Flüssigkeit, auf welche sie fällt, nach der Seite ausweichen kann, in Folge der erhaltenen Geschwindigkeit unter das Niveau, — es bildet sich ein **Thal**, während die umgebende Flüssigkeit zu einem **Berge** aufsteigt, jedoch sofort durch die Schwere wieder niedergezogen wird, dabei nach Aussen einen neuen Berg erzeugt, etc. Es entsteht so (und in ähnlicher Weise in der Luft durch den Stoss des Windes, etc.) eine eigene Art schwingender Bewegung, eine sog. **Wellenbewegung**, bei der nach den Weber'schen Versuchen jedes Flüssigkeitstheilchen in einer, unter den einfachsten Bedingungen nahe elliptischen Bahn oscillirt, nicht eine fortschreitende Bewegung zeigt. Kreuzen sich verschiedene Wellenbewegungen, so entstehen, je nachdem dabei ein Thal theilweise oder ganz mit einem Thale, oder aber mit einem Berge zusammentrifft, verschiedene sog. **Interferenz**-Erscheinungen.

Für die Wellenlehre ist auf das classische Werk der Brüder Ernst Heinrich **Weber** (Wittenberg 1795; Professor der Anatomie und Physiologie in Leipzig) und Wilhelm Eduard **Weber** (Wittenberg 1804; Professor der Physik in Göttingen), „Die Wellenlehre auf Experimente gegründet. Leipzig 1825 in 8.", zu verweisen.

XXVIII. Aerostatik, Pneumatik und Akustik.

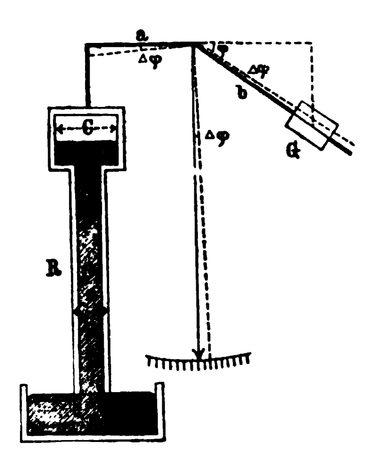
273. Der Barometer. Wird eine, am einen Ende geschlossene Röhre von circa 3 Fuss Länge mit luftfreiem Quecksilber gefüllt und dann umgekehrt in Quecksilber getaucht, so sinkt das Quecksilber in der Röhre, bis sich das Gleichgewicht mit der äussern Luft hergestellt hat. Die Niveau-Differenz in Röhre und Gefäss, welche am Meere circa 28 Pariser-Zoll oder 760^{mm} beträgt, kann somit als Maass des Luftdruckes, oder die ganze Vorrichtung als **Barometer** dienen, — strenger genommen ist jedoch der Luftdruck erst nach der Formel

$$b = \frac{a}{1 + 0{,}00018018 \,.\, \tau - 0{,}00001878\,(\tau - \alpha)} = \text{nahe } a - \beta\tau \quad 1$$

zu berechnen, wo a die an einer Messingscala abgelesene Erhebung der Quecksilberkuppe über das Niveau im Gefässe, τ die in Centesimalgraden ausgedrückte Temperatur des Quecksilbers und Messings, α die Normaltemperatur des der Scala zu Grunde liegenden Etalon's (beim alt-französischen Maasse 13° R.) bezeichnet, $\beta = 0{,}00016 . a$ aber Taf. XII zu entnehmen ist. Da jedoch dieser sog. **Gefässbarometer** wegen der Capillarität (wenn nicht die Röhre mindestens 12^{mm} weit) etwas zu kleinen Luftdruck angibt, und der Nullpunct der Scale (wenn nicht das Gefäss mindestens 120^{mm} weit) beständig verschoben werden muss, so substituirt man ihm oft einen sog. **Heberbarometer**, der aus einer cylindrischen gebogenen Röhre besteht, und eine Scale mit Nullpunct in der Mitte hat. Setzt man in den offenen Schenkel einen Schwimmer ein, so kann man den Luftdruck leicht sich selbst registriren lassen; jedoch wird in neuerer Zeit zu letzterem Zwecke vorzugsweise der sog. **Waagbarometer** Secchi's benutzt, bei dem das Gefäss fest steht, während die oben zu einer Kammer erweiterte Röhre am kürzern Arme eines Winkelhebels hängt, dessen längerer Arm ein Gegengewicht, der Stützpunct aber einen Zeiger mit Schreibapparat trägt.

Dass auch die Luft schwer sei, lehrte schon **Aristoteles**; aber dennoch wurden bis in das 17. Jahrhundert hinein alle Erscheinungen an Heber, Pumpe, etc. durch einen Abscheu der Natur gegen den leeren Raum (horror vacui) erklärt, und noch **Galilei** glaubte in dem Factum, dass in einer Saugpumpe zu Florenz das Wasser nicht über 32' steigen wollte, nur zu erkennen, dass dieser Abscheu seine Grenzen habe. Erst als 1643 Galilei's Nachfolger **Torricelli** den im Eingange des Textes beschriebenen Versuch machte, und sich ihm zeigte, dass die Höhen von Quecksilber und Wasser sich umgekehrt wie die Dichten dieser beiden Flüssigkeiten verhalten, wurde ihm das Wesen des Luftdruckes klar, das sodann durch die Versuche, welche **Pascal** 1648 am Puy de Dome über das Abnehmen der Barometerhöhe mit der Abnahme der wirksamen Luftsäule machen liess, noch klarer vor Augen gelegt, und durch des Letztern Schrift „Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air. Paris 1663 in 12." bald allgemein zur Anerkennung gebracht wurde. — Der Druck einer Atmosphäre auf ein Quadratmeter beträgt bei 760^{mm} Barometerstand $0{,}760 \times 1000 \times 13{,}597 = 10334$ Kilogramme. — Die zur Reduction des Barometerstandes auf 0° C. dienende Formel 1 bedarf wohl keiner speciellen Erläuterung. Ist die Scale direct in's Glas geritzt, so ist der Factor von $\tau - \alpha$ durch den Ausdehnungscoefficienten 0,00000862 des Glases zu ersetzen, wodurch β nahe um 0,01 zunimmt (vergl. XII). — Wer zuerst den Einfall hatte, zu Gunsten des grösseren Publikums sog. **Birnbarometer**, d. h. Gefässbarometer mit einem seitlich angeblasenen kleinen Gefässe, — oder das im Texte beschriebene, vom Einflusse der Capillarität freie, später besonders von **Deluc** empfohlene Heberbarometer zu construiren, ist unbekannt. In neuerer Zeit wendet man als Normalbarometer häufig eine oben so stark ausgebauchte Röhre und ein so weites Gefäss an,

dass in ersterer die Capillarität, in letzterer die Veränderung des Niveau's kaum mehr merklich ist, und liest die Höhe mit dem schon von **Dulong** gebrauchten und dann von **Pouillet** verbesserten sog. **Kathetometer** ab, — einem längs einem verticalen prismatischen Maassstabe gleitenden Fernrohr. — Zum Füllen des Barometers wendet man mit verdünnter Salpetersäure geschütteltes, hierauf gut gewaschenes und mit Fliesspapier getrocknetes Quecksilber an, das man erwärmt durch einen bis nahe zum untern Ende reichenden Trichter einfüllt, und hierauf noch, um die trotz aller Sorgfalt miteindringenden Luftbläschen wegzubringen, sorgfältig auskocht. — Bei dem Waagbarometer schwimmt gewissermassen das Rohr im Gefässe, zum Theil durch das Gegengewicht, zum Theil durch das verdrängte Quecksilber gehalten, so dass, wenn R das Gewicht des Rohr's, G das Gegengewicht, A und B aber Querschnitte bezeichnen, für horizontalen Stand von a



$$a\,[R-(B-A)\,h\,q]=G\,b\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi \qquad 2$$

wo q das specifische Gewicht des Quecksilbers, und h die Länge des eintauchenden Rohrtheiles ist. Steigt der Barometer um m^{mm}, so sinkt das Quecksilber im Gefäss um $\Delta h = m\,.\,C:D$, wo C den Querschnitt der Kammer und D denjenigen des Gefässes bezeichnet, — und gleichzeitig erhält der Wagebalken einen Ausschlag $\Delta\varphi$, so dass jetzt statt 2 die Gleichheit

$$a\,[R-(B-A)\,(h-\Delta h+a\,\mathrm{Sin}\,\Delta\varphi)\,q]\,\mathrm{Cos}\,\Delta\varphi = G\,b\,\mathrm{Cos}\,(\varphi-\Delta\varphi)$$

besteht, und somit, da $\Delta\varphi$ als klein zu betrachten,

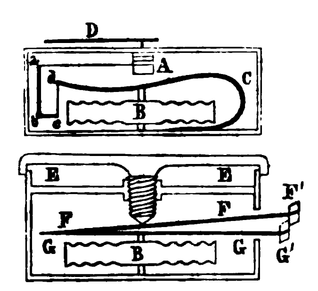
$$\Delta\varphi = \frac{a\,(B-A)\,m\,C\,q}{D\,[G\,b\,\mathrm{Sin}\,\varphi + a^2\,(B-A)\,q]\,\mathrm{Sin}\,1''} \qquad 3$$

wird. Es ist also der Ausschlag der Variation des Barometerstandes proportional, und um so grösser, je dicker die Glasröhre, je weiter die Kammer, und je kleiner φ ist. Für $\varphi = 0$ und $C = A$ wird

$$\Delta\varphi = \frac{m\,.\,A}{D\,.\,a\,.\,\mathrm{Sin}\,1''} \qquad 4$$

Die einlässlichere Theorie, für welche z. B. „**Jullien**, Etude sur l'équilibre du baromètre à balance du R^d. P. A. Secchi (Annal. Tortol. 1861), — Rod. **Radau**, Sur un météorographe ancien et sur la théorie du baromètre statique (Compt. rend. 1867), — etc." zu vergleichen, zeigt, dass der hier vernachlässigte Einfluss der Temperatur bei Beobachtung gewisser Verhältnisse bei Construction des Apparates wirklich compensirt wird. — Bei dem von Sir Samuel **Morland** (Sulhamstead in Berkshire 1625 — Hammersmith bei London 1695; Master of Mechanics) erfundenen und Carl II. von England präsentirten, sog. **statischen** Barometer, welchen **Magellan** für seinen Meteorographen (s. 247) verwendete, fehlt die Kammer und ist der Waagebalken gerade, — sonst ist es ganz ein Waagbarometer, so dass dafür 4 Anwendung findet. Das Fig. 1 entsprechende Waagbarometer, und seine Einführung in die selbstregistrirenden Apparate verdankt man Angelo **Secchi** (Reggio 1818; erst

Professor der Physik und Mathematik im Jesuitencollegium zu Georgetown bei Washington, jetzt der Astronomie im Collegio Romano zu Rom). — Als Reisebarometer dürfte, trotz der grossen Mühe, welche sich J. **Fortin** (Mouchi-la-Ville bei Clermont 1750 — Paris 1831?; Mechaniker in Paris), **Horner** und Andere gaben, den Gefässbarometer transportabel zu machen, der von **Geissler** zu diesem Zwecke construirte Heberbarometer am zweckmässigsten sein, oder dann der sog. **Aneroidbarometer**, bei dessen ursprünglicher Construction durch **Bourdon** eine luftleere gerippte Metallbüchse B mit einer dem Luftdrucke entgegenwirkenden Feder C in Verbindung steht, deren eines Ende d an dem Winkelhebel a b c und somit durch die Kette a A auf den Zeiger D wirkt, — während in der neuern Zeit Jakob **Goldschmid** (Winterthur 1815; Mechaniker in Zürich) noch wesentlich bessere Erfolge dadurch erzielt hat, dass er die mit G G zusammengelöthete Feder F F mittelst dem Schraubendeckel E E so stellt, dass die beiden Striche auf F' und G' in eine Horizontale fallen, und nun den Stand der Schraube abliest. Vergl. auch „**Hirsch**, Sur les baromètres anéroides à enregistrement électrique de M. Hipp (Bull. de Neuch. 1865).“ — Anhangsweise ist zu bemerken, dass nach „T. R. **Robinson**, Director der Sternwarte zu Armagh: On the dependence of a clock's rate on the height of the barometer (Bd. 5 der Mem. of Astr. Soc.), — Adalbert **Krüger** (Marienburg 1832; erst Assistent in Bonn, dann Director der Sternwarte in Helsingfors), Ueber Barometercompensation der Pendeluhren (A. N. 1482), — etc.“ ein Zoll Zunahme im Barometerstand bei einer Pendeluhr eine tägliche Verspätung von circa $^1/_2$" bewirkt, und es daher nöthig wird, eine feine Uhr gegen die Variation des Luftdruckes zu compensiren, oder in die Formel für ihren Gang ein betreffendes Glied einzuführen.



274. Das Mariotte'sche Gesetz. Schliesst man in einer gebogenen Röhre, deren kürzerer Schenkel geschlossen ist, die Luft in diesem letztern mit Quecksilber ab, und giesst dann nach und nach in den längern Schenkel so viel Quecksilber, dass die Niveaudifferenz 1, 2, 3,... (n — 1) Barometersäulen, also der Druck auf die abgeschlossene Luft 2, 3, 4,... n Luftdrucke beträgt, so findet man das Volumen der letztern auf $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, ... $^1/_n$ des ursprünglichen Volumens reducirt. Dieselben Verhältnisse zeigen sich auch bei andern Gasen, so lange sie sich nicht in der Nähe ihres Ueberganges in den liquiden Zustand befinden, und das (3) nach Mariotte benannte, und (s. 301:3) constante Temperatur voraussetzende Gesetz: „Das Volumen einer Gasmenge ist der drückenden Kraft umgekehrt proportionirt,“ weicht auch nach den neuesten Versuchen erst bei sehr hohem Drucke (bei atmosphärischer Luft etwa von 100 Atmosphären hinweg) merklich von der Wahrheit ab, — erlaubt daher aus dem Volumen rückwärts auf den

Druck zu schliessen, wie es z. B. bei dem sog. **Manometer** geschieht.

Das Mariotte'sche Gesetz ist schon in den von **Boyle** in seiner gegen den Jesuiten Francis **Line** oder Linus (London 1595 — Lüttich 1675; Lehrer der Mathematik in Lüttich) gerichteten Abhandlung „A Defense of the Doctrine touching Spring and Weight of the Air. London 1662" gegebenen Versuchsreihen enthalten, und wurde auch sofort (s. Poggendorf's Lex.) gestützt auf dieselben von Richard **Townley**, Esquire in Lancashire, ganz deutlich ausgesprochen, während **Mariotte** selbst dasselbe erst in seinem „Second essai de physique: De la nature de l'air. Paris 1679 in 12." publicirte: Es sollte somit eigentlich das Boyle'sche Gesetz heissen.

275. Die Hypsometrie. Denkt man sich eine Luftsäule, der Längeneinheit entsprechend, in Schichten abgetheilt, und bezeichnen $p\, p_1 \ldots p_n$ die Gewichte dieser Schichten, $P\, P_1 \ldots P_n$ aber die sie drückenden Kräfte, so hat man (274)

$$p : p_1 = P : P_1 \qquad p_1 : p_2 = P_1 : P_2 \ \ldots p_{n-1} : p_n = P_{n-1} : P_n$$
$$P_1 = P - p_1 \qquad P_2 = P_1 - p_2 \quad \ldots\ldots P_n = P_{n-1} - p_n$$

folglich successive

$$p_1 = p \frac{P}{P+p} \qquad p_2 = p\left(\frac{P}{P+p}\right)^2 \quad \ldots\ldots p_n = p\left(\frac{P}{P+p}\right)^n$$

Sind daher B und b die Barometerstände in den Höhen m und n, so hat man für $n - m = h$

$$B : b = p_m : p_n = 1 : \left(\frac{P}{P+p}\right)^h \quad \text{oder} \quad h = \frac{\lg B - \lg b}{\lg (P+p) - \lg P} \qquad 1$$

Es ist daher die Höhendifferenz zweier Stationen der Differenz der Logarithmen gleichzeitiger Barometerstände an denselben proportional, — jedoch abgesehen von dem Einflusse der Lufttemperatur. Unter Berücksichtigung dieses letztern erhält man dagegen die Deluc'sche Formel

$$h = A (\log B - \log b) \qquad 2$$

in der A den für das Argument der Summe $T + t$ der in C ausgedrückten Lufttemperaturen beider Stationen aus Taf. XII zu entnehmenden Werth von $18393^m\, [1 + 0{,}002\, (T + t)]$ bezeichnet, und welcher man nach Laplace die Factoren

$$(1 + 0{,}00265 \operatorname{Cos} 2\varphi)\left(1 + \frac{15926 + 2H + h}{R}\right) \qquad 3$$

beifügen kann, wo φ die Breite ist, H die absolute Höhe der untern Station, h die vorläufig nach 2 berechnete Höhendifferenz und R der Erdradius. Approximativ kann man die Fischer'sche Formel

$$h = 15976^m \cdot \frac{B - b}{B + b}\, [1 + 0{,}002\, (T + t)] \qquad 4$$

gebrauchen, oder zur Bestimmung der ungefähren Höhe über dem

Meere ($B = 760^{mm}$ und $T = t = 15^0$ angenommen) die der Formel

$$H' = 19445 (\log 760 - \log b) \qquad 5$$

entsprechende Columne der Tafel XII.

Die durch 1 ausgedrückte Proportionalität sprach **Halley** schon 1686 in seinem „Discourse of the rule of the decrease of the height of the mercury in the barometer, according as places are elevated above the surface of the earth (Phil. Trans. 1686)" aus. Die erste gute hypsometrische Formel gab dagegen erst **Deluc** in seinem 247 erwähnten Werke unter der Form

$$h = 10000^t (\log B - \log b) (1 + 0{,}001 . a) \qquad 6$$

wo a die Summe der an beiden Stationen erhaltenen Ablesungen an einem Quecksilberthermometer bezeichnet, das in thauendem Eise -39^0 und in siedendem Wasser $+147^0$ zeigt; setzt man die Toisen in Meter, die Temperaturen in Celsius um, so erhält man

$$h = 17970^m (\log B - \log b) [1 + 0{,}002 (T + t)]$$

d. h. eine Formel, welche sich von 2 nur dadurch unterscheidet, dass dort nach dem Vorgange von **Laplace** der Factor 17970 gestützt auf die Versuche von Louis-François-Elisabeth **Ramond** de Carbonnières (Strassburg 1753 — Paris 1827; früher Professor der Naturgeschichte an der Centralschule des Dép. der obern Pyrenäen, später Präfect des Dép. Puy-de-Dôme, etc., auch Mitglied des Institut; vergl. Cuvier Eloges III) auf 18393 erhöht wurde, ja wahrscheinlich noch mehr erhöht werden dürfte: So z. B. hat **Plantamour** durch directes Nivellement die Höhe des St. Bernhard über Genf gleich $2070^m{,}34$ gefunden, während er für diese beiden Stationen 1860 die mittlern Jahreswerthe $t = -3^0{,}31$, $b = 562^{mm}{,}29$, $T = +8^0{,}37$, $B = 725^{mm}{,}71$ erhielt, und bildet man hiefür nach 2 die Gleichung

$$2070{,}34 = x [1 + 0{,}002 (8{,}37 - 3{,}31)] (\log 725{,}71 - \log 562{,}29)$$

so findet man

$$x = 18497$$

also in der That einen wesentlich grössern als den Laplace-Ramond'schen Factor. — Setzt man in der logarithmischen Interpolationsformel 49 : 1 statt $y + \delta$, y, a der Reihe nach B, b, 10, so erhält man

$$\overset{10}{\log} B - \overset{10}{\log} b = 2 . 0{,}4342945 \left[\frac{B-b}{B+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{B-b}{B+b}\right)^3 + \ldots\right]$$

und mit Hülfe hievon nach 2 die schon in dem Schriftchen „Karl v. **Fischer** (Bern 1807; Botaniker in Bern), Beschreibung einer einfachen Methode der Berechnung bei Höhenmessungen mittelst des Barometers. Bern 1848 in 8." aufgestellte Formel 4, welche später z. B. auch **Babinet** empfohlen hat. — Abgesehen von dem Temperaturfactor ergibt 2 durch Differentiation

$$\frac{dh}{db} = -18393 . \frac{1}{\overset{e}{\log} 10} . \frac{1}{b} = -\frac{7988}{b} \qquad 7$$

und hiernach entsprechen sich für $db = 1^{mm}$ die Werthe

$b = 700$	710	720	730^{mm}
$dh = 11{,}41$	11,25	11,09	$10{,}93^m$

so dass in unsern Gegenden das Barometer um 1^{mm} steigt, wenn wir 11^m abwärts gehen. — Aus 2 folgt für $T = t = 0$ und $B = 760$

$$\log \frac{b}{760} = \text{Dec. Erg.} \frac{h}{18393} \qquad 8$$

und hiernach ist folgende Tafel berechnet:

h	b : 760	1290 . b : 760	b	log b +	Δ log b
m		gr	mm		
0	1,0000	1290	760,0	2,880814 +	0,000000 . τ
1000	0,8823	1138	670,6	826446	0217
2000	0,7785	1004	591,7	772077	0435
3000	0,6869	886	522,1	717708	0652
4000	0,6061	782	460,6	663340	0870
5000	0,5348	690	406,4	608972	1087
6000	0,4718	609	358,6	554603	1305
7000	0,4163	537	316,4	500235	1522
8000	0,3673	474	279,2	445866	1740
9000	0,3241	418	246,3	391497	1957
10000	0,2860	369	217,3	337129	2174

wo b : 760 nach 274 die Dichte der Luft in der Höhe h vorstellt, diejenige am Meere als Einheit angenommen, — 1290 . b : 760 das Gewicht eines Kubikmeters Luft in Grammen, unter Voraussetzung, die Dichte der Luft am Meere sei (vergl. IX) 0,00129 derjenigen des Wassers, — b endlich den der Höhe h bei 0° Lufttemperatur zukommenden Barometerstand, dessen Logarithmus nach 2 nahe um

$$\Delta \cdot \log b = \frac{h}{18393}\left(1 - \frac{1}{1 + 0{,}004 \cdot \tau}\right) = \frac{0{,}004 \cdot h}{18393} \cdot \tau \qquad 9$$

zunimmt, wenn die mittlere Wärme der Luftsäule von 0 auf $\tau = \frac{1}{2}(T + t)$ Grade ansteigt. — Setzt man in 2 für Bern $h = 572^m{,}5$, $b = 714^{mm}{,}2$, $t = 7^\circ{,}8$ und (für ein Kilometer Erhebung 5° Wärmeabnahme in Rechnung bringend) $T = 10^\circ{,}7$, so folgt $B = 765{,}3 = 714{,}2 + 51{,}1$, — es beträgt also für Bern die Reduction des Barometerstandes auf das Meeresniveau durchschnittlich $+ 51^{mm}{,}1$, — entsprechend erhält man für Zürich bei $h = 480$, $b = 720{,}3$, $t = 8{,}9$ und $T = 11{,}3$ die Reduction $+ 42{,}8$, — etc., — während die von Oberst F. **Burnier** in Morges (s. Bull. Vaud. Nr. 62) zur Berechnung des mittlern Barometerstandes aufgestellte empirische Formel

$$b = 762^{mm} - H\,(88{,}8 - 3{,}5 \,.\, H) \qquad 10$$

wo H die in Kilometern ausgedrückte Höhe über dem Meere bezeichnet, für Bern 49,7, — Zürich 41,9, — etc. als Reductionen gibt. — Für weitern Detail und für ausgedehntere Hülfstafeln kann man vergleichen: „**Biot.** Tables barométriques portatives. Paris 1801 in 8., — Bernhard August von **Lindenau** (Altenburg 1780 — Altenburg 1854; Director der Sternwarte auf dem Seeberge bei Gotha, und später sächsischer Minister), Tables barométriques pour faciliter le calcul des nivellements et des mesures des hauteurs par le baromètre. Gotha 1809 in 8., — **Ramond.** Mémoires sur la formule barométrique de la mécanique céleste. Clermont-Ferrand 1811 in 4., — **Littrow.** Ueber Höhenmessungen durch das Barometer. Wien 1823 in 4., — **Horner.** Tables hypsométriques pour le baromètre divisé en pouces et lignes du pied français et le thermomètre octogésimal. Zuric 1827 in 8., — Joseph Johann **Pohl** (Wien 1825; Professor der chem. Technologie in Wien) und Jakob **Schabus** (Dallach in Kärnthen 1825; Professor der Naturlehre in Wien), Tafeln zur Reduction der Barometerstände. Wien 1852, 8 Stücke in 8., — C. **Prediger.** Ueber die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. Clausthal 1860 in 8., — **Plantamour.** Mesures hypsométriques

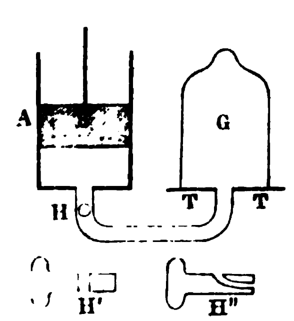
dans les Alpes à l'aide du Baromètre. Genève 1860 in 4., — **Bauernfeind**, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. München 1862 in 8., — Richard **Rühlmann**, Docent in Carlsruhe: Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig 1870 in 8., — etc."

276. Die Luftpumpe. Da die Dichte einer Gasmenge ihrem Volumen umgekehrt proportionirt ist, so wird eine Luftmenge A der Dichte d, welcher man noch einen Raum B eingibt, die Dichte $d_1 = d . A : (A + B)$ erhalten. Wird dann je der Raum B wieder abgesperrt, geleert und neuerdings eingegeben, so hat die Luftrestanz nach n Wiederholungen dieser Operation die Dichte

$$d_n = d . \left(\frac{A}{A + B}\right)^n$$

Ein zu diesem Zwecke eingerichteter Apparat heisst **Luftpumpe**, und dient zum Nachweise, dass die Luft einen Druck ausübt, — dass sie ausdehnsam, sowie zum Leben, Brennen und als Schallmittel erforderlich ist, — dass sie gegen das Fallen, Verdampfen, Entweichen von Gasen aus Flüssigkeiten, etc., einen Widerstand ausübt, — dass die Körper in ihr einen Gewichtsverlust erleiden, — etc. Lässt man den Raum B negativ werden, so geht die Luftpumpe in eine sog. **Compressionspumpe** über.

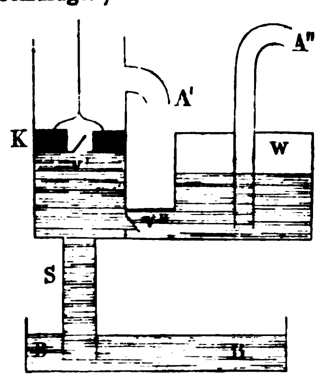
Führt von einem Teller TT, auf dem eine Glocke G genau aufsitzt (oder ein anderer Apparat aufgeschraubt werden kann), eine bei H mit einem Hahne versehene Röhre zu einem Stiefel A, in dem sich ein Kolben B bewegt, so vertheilt sich die in G befindliche Luft, wenn beim Aufwärtsgehen des Kolbens der Hahn die Stellung H' hat, in den Raum A + G; gibt man sodann dem Hahn die Stellung H'', so geht die in A enthaltene Luft beim Niedergehen des Kolbens in's Freie, — etc., kurz es ist die im Texte verlangte Einrichtung vorhanden. — Der Erste, welcher einen solchen Apparat etwa 1650 construirte, war Otto von **Guerike**, und er benutzte ihn 1654, um damit nach dem Wunsche des Kurfürsten von Mainz vor dem Reichstage in Regensburg zu experimentiren, — namentlich um zwei auf einander passende, hohle, sog. **Magdeburgische** Halbkugeln zu entleeren, welche sodann mehrere angespannte Pferde nicht von einander zu reissen vermochten. Seine Luftpumpe wurde zuerst von Caspar **Schott** in seiner „Mechanica hydraulico-pneumatica. Herbipoli 1657 in 4." beschrieben, — dann von **Boyle** nachgebildet und benutzt, wofür dessen „New experiments physico-mechanical, touching the spring of the Air and its effects. Oxford 1660" zu vergleichen, — bis endlich sein eigenes classisches Werk „Experimenta nova, ut vocantur, Magdeburgica, de vacuo spatio. Amstelod. 1672 in fol." erschien. Seit dieser frühesten Zeit ist nun allerdings die Luftpumpe wesentlich umgestaltet worden; namentlich ist es



gelungen, den zwischen Stiefel und Hahn gelegenen, sog. **schädlichen Raum** entweder zu verkleinern oder sogar, mittelst Ersetzung der Hahne durch Ventile, ganz zu beseitigen, — für die Stellung der Hahne eine Selbst-Steuerung anzubringen, — die Operation durch Anwendung eines Doppelstiefels zu beschleunigen, — etc. — Gibt man beim Aufwärtsgehen des Kolbens dem Hahne die Stellung H'', beim Abwärtsgehen die Stellung H', so geht die Luftpumpe in eine Compressionspumpe über.

277. Einige andere Apparate. Wird in dem einen von zwei communicirenden Gefässen die Luft verdünnt oder verdichtet, so steigt oder sinkt die Flüssigkeit in demselben, bis der durch die Niveaudifferenz erzeugte Druck der Ab- oder Zunahme der Ausdehnsamkeit Gleichgewicht hält. Hierauf beruhen das Ansaugen, die Heber, die Saug- und Druckpumpen, der Heronsball (Windkessel), der Heronsbrunnen, etc.

Ueber die schon den Alten bekannten Heber wird kaum nöthig sein, etwas beizufügen, — eher über die Pumpen: Wird die Röhre S in einen Wasserbehälter B gesetzt, und der Kolben K aufwärts gezogen, so verdünnt sich die unter ihm befindliche Luft, und das Wasser steigt in der Röhre. Geht der Kolben abwärts, so öffnet sich, je nachdem derselbe durchbohrt oder voll ist, das Ventil v' (Saugpumpe) oder v'' (Druckpumpe) und es entweicht erst Luft, dann Wasser, — etc. Ist bei der Saugpumpe das Wasser hinlänglich über den Kolben gestiegen, so fliesst dasselbe stossweise durch A' ab. Aehnliches hat bei der Druckpumpe statt, wenn nicht der Kanal mit dem Ventile v'' erst in einen sog. **Windkessel** W führt, in welchem durch das Einpumpen von Wasser comprimirte Luft entsteht, die sodann bei richtigen Raumverhältnissen von Stiefel und Kessel das Wasser continuirlich nach A'' treibt. — Der Windkessel (Heronsball) ist nebst einigen verwandten Apparaten schon von dem Alexandriner **Hero** (284—221 v. Chr; vergl. „Th. H. Martin, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie. Paris 1854 in 4.") in seiner berühmten Schrift „Πνευματικά" oder Spiritualia (Lat. von Commandino, Urbino 1575 in 4.; ital. durch Porta, Neapel 1605 in 4.; deutsch von Cario, Bamberg 1687 in 4.) beschrieben worden.



278. Bestimmung der Dichte von Gasen. Hat ein ausgepumpter Glasballon das Gewicht a, — mit trockener, z. B. durch eine Röhre mit Chlorcalcium geleiteter Luft gefüllt das Gewicht b, — mit irgend einem Gase unter atmosphärischem Drucke gefüllt das Gewicht c, — und endlich mit reinem Wasser gefüllt das Gewicht d, so stellen

$$\frac{b-a}{d-a} \qquad \frac{c-a}{d-a} \qquad \frac{c-a}{b-a}$$

der Reihe nach die Dichte der atmosphärischen Luft oder des Gases in Beziehung auf Wasser, und des Gases in Beziehung auf die atmosphärische Luft als Einheit dar. [IX.]

Dass bei diesen Bestimmungen, die z. B. **Regnault** die Dichte der atmosphärischen Luft bei 0° und 760^{mm} gleich 0,001293 oder das Gewicht eines Kubikmeters Luft gleich 1,293 Kilogramme ergeben haben, auf Temperatur von Luft und Wasser, auf Barometerstand, etc., gehörige Rücksicht zu nehmen ist, versteht sich wohl von selbst; vergl. hiefür 301. — Auf der Gewichtsdifferenz, welche verschiedene Gase unter gleichem Drucke oder bei gleicher Expansivkraft zeigen, beruhen die sog. **Aerostaten** oder Luftballons, deren wirkliche Erfindung unbedingt auf das Jahr 1783 zu setzen und Joseph **Montgolfier** gutzuschreiben ist, wenn auch schon einige Frühere in Schriften die Möglichkeit der Luftschifffahrt bei Anwendung einer luftleeren kupfernen Hohlkugel oder eines mit Luft aus höhern Regionen gefüllten Ballons betonten, wofür z. B. „Francesco de **Lana** (Brescia 1631 — Rom 1687; Jesuit, Lehrer der Mathematik und Philosophie in Brescia), Prodromo, ovvero Saggio di alcune invenzioni nuove. Brescia 1670 in fol. (Deutsch Tübingen 1784; lat. Hagæ 1785), — Philipp **Lohmeyer** (Magdeburg 16.. — Lüneburg? 1680; Professor der Physik zu Rinteln, dann Inspector der Ritteracademie zu Lüneburg), De artificio navigandi per aërem. Rint. 1676 in 4. (Auch Hagæ 1785; deutsch Arolsen und Tübingen 1784), — Joseph **Galien** (St. Paulien bei Puy 1699 — Avignon 1782; Dominicaner, Professor der Philosophie und Theologie zu Avignon), L'art de naviguer dans les airs. Avignon 1755 in 16. (Auch 1757)" zu vergleichen sind. — Während Montgolfier, der 1783 VI 5 seinen ersten grössern Ballon von 10' Durchmesser zu Annonay öffentlich aufsteigen liess, die Luft durch Erwärmung verdünnte, — füllte der, von dem Geometer Jacques **Charles** (Cluny 17.. — Paris 1791; Mitglied der Academie) wohl zu unterscheidende Physiker Jacques-Alexandre-César **Charles** (Beaugency 1746 — Paris 1823; Professor der Physik in Paris), dieselben mit Wasserstoffgas, und machte mit einem solchen 1783 XII 1 in Begleit von François **Robert** (Charmèle 1737 — Heiligenstadt 1819; Professor der Philosophie und Mathematik zu Châlons-sur-Saône) zu Paris seine erste Auffahrt. Schon vor Charles, nämlich 1783 X 15, und also auch ehe Montgolfier 1784 den Fallschirm erfunden hatte, wagte es Jean-François **Pilatre de Rozier** (Metz 1756 — Boulogne 1785; erst Professor der Chemie zu Rheims, später Pensionär des Königs), sich einer Montgolfière anzuvertrauen, und kehrte glücklich wieder zur Erde zurück; bei einer spätern Fahrt dagegen, für die er sich, von der Regierung mit 40,000 Francs unterstützt, einen aus der Montgolfière und Charlière combinirten Ballon gebaut hatte, mit welchem er über den Kanal setzen wollte, ging er zu Boulogne 1785 VI 15 zu Grunde, indem sein Ballon in 1200' Höhe Feuer fasste. — Für die erste Geschichte dieser anfänglich ungeheures Aufsehen machenden Luftschifferei vergl. „Barthélemi **Faujas de Saint-Fond** (Montélimart 1741 — Soriel bei Valence 1819; Professor der Geologie in Paris), Description des expériences aérostatiques de Mss. Montgolfier. Paris 1783, 2 Vol. in 8., — Christian **Kramp** (Strassburg 1760 — Strassburg 1826; Dr. med., später Professor der Mathematik zu Strassburg), Geschichte der Aerostatik. Strassburg 1784—1785, 2 Bde. in 8. (Anhang 1786), — Tiberio **Cavallo** (Neapel 1749 — London 1809; erst Kaufmann, dann Privatgelehrter und Mitglied der Roy. Society in

London), The history and practice of aërostation. London 1785 (Deutsch Leipzig 1786)", — für die neuern Auffahrten und ihre wissenschaftlichen Ergebnisse „Relation d'un voyage aérostatique fait par Mss. Gay-Lussac et Biot le 6 Fructidor XII (Journ. de phys. 1804), — Voyages aériens par J. Glaisher, Camille Flammarion, W. de Fonvielle et Gaston Tissandier. Paris 1870 in 8., — etc."

279. Die Diffusion. Die expansibeln Körper ordnen sich unter einander auf die Dauer nicht nach dem Gesetze der Schwere, sondern durchdringen sich in Folge ihrer Expansivkraft. Diese sog. Diffusion der Gase zeigt sich z. B. in der atmosphärischen Luft, wo Sauerstoff, Stickstoff, Kohlensäure, Wassergas, etc., gewissermassen jedes eine eigene Atmosphäre bilden.

Für die Diffusion vergl. ausser dem 270 Mitgetheilten z. B. „**Dalton**, On the tendency of elastic fluids to diffusion through each other (Mem. Manchest. Soc. 1805), — **Graham**, On the law of diffusion of gases (Edinb. Trans. 1834), — **Bunsen**, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857 in 8., — etc."

280. Die Hygroskopie. Manche feste und liquide Körper haben das Vermögen, Gase an ihrer Oberfläche zu verdichten, ja zu absorbiren. So absorbiren z. B. Haare (mit Verlängern), Saiten (mit Verkürzen), abgestorbene Tannenästchen (mit Biegen), etc., Wasser in expansibelm und liquidem Zustande, und können somit als **Hygroskope**, zur Noth als **Hygrometer** dienen, — ja unter Controle eines Psychrometers (305) sogar zur Construction selbstregistrirender Hygrometer verwendet werden.

Wie weit der Zeit nach die aus Darmsaiten in allen möglichen Formen construirten Hygroskope, z. B. die sog. holländischen oder Puppenhygrometer (Mann mit Regen- und Frau mit Sonnenschirm) zurückgehen, weiss man nicht; für die älteste wissenschaftliche Behandlung dürfte auf „William **Molyneux** (Dublin 1656 — Dublin 1698; reicher Privatgelehrter in Dublin, einige Zeit Surveyor-General), Description of a new hygrometer (Phil. Trans. 1685)" zu verweisen sein. — Das gegenwärtig wieder neuerdings in Aufnahme gekommene, 1775 zuerst construirte Haarhygrometer verdankt man dem durch seine Montblanc-Besteigung im Jahre 1787 und seine „Voyages dans les Alpes. Neuchâtel 1779—1796, 4 Vol. in 4. (auch 1780—1796, 8 Vol. in 8.: deutsch die zwei ersten Bde., Leipzig 1781—1788, 4 Bde. in 8.) allgemein bekannten Horace-Bénédict de **Saussure** (Genf 1740 — Genf 1799; Professor der Philosophie in Genf, und auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie: siehe Bd. 1 von Cuvier's Eloges und Bd. 4 meiner Biographieen), vergleiche seinen „Essai sur l'hygrométrie. Neuchatel 1783 in 8. (Deutsch von Titius. Leipzig 1784)". — Für das Asthygrometer vergl. meine Abhandlung im dritten Bande der von mir herausgegebenen „Schweiz. meteorolog. Beobachtungen. Zürich 1864—1870, 6 Bde. in 4." — Dass einzelne Stoffe, wie Schwefelsäure, Chlorcalcium, etc. der Luft das Wasser entziehen und gewissermassen binden, war den Chemikern längst bekannt, als Carl Emmanuel **Brunner** (Bern

1796 — Bern 1867; Professor der Chemie in Bern; Vater des 270 erwähnten Physikers) im Jahre 1830 (vergl. Poggend. Annal. 20) den Vorschlag machte, diese Eigenschaft zur Bestimmung des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft in folgender Weise zu benutzen: Er liess aus einem Gefässe, seinem sog. **Aspirator**, auf dem eine Röhre mit durch Schwefelsäure befeuchtetem Asbest aufgesteckt war, Wasser abfliessen; die Menge des abgeflossenen Wassers gab ihm das Volumen der durch die Röhre geströmten Luft, die Gewichtsvermehrung der Röhre aber ihren Feuchtigkeitsgehalt; der Aspirator hielt etwa 15 Liter.

281. Geschwindigkeit und Intensität des Schalles. Jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit, die sich durch ein geeignetes Medium bis zu unserm Gehörorgane fortpflanzen kann, wird durch dasselbe als sog. **Schall** (Geräusch, Klang, Ton) wahrnehmbar, und ist gewissen Gesetzen unterworfen, die in der sog. **Akustik** abgehandelt werden. So beträgt die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles oder der, statt aus Berg und Thal, aus abwechselnd dichtern und dünnern Luftschichten bestehenden sog. **Schallwellen** in trockener Luft und bei 0° Wärme $332{,}2^m$, und nimmt mit der Feuchtigkeit und Wärme zu; in dem $1:0{,}069 = 3{,}8^2$ dünneren Wasserstoffgas ist sie nahe 4 mal, im Wasser etwas mehr als 4 mal, im Eisen 15 mal so gross. — Die Intensität des Schalles nimmt mit dem Quadrate der Entfernung, beim Uebergange in ein neues Mittel, etc., ab. — Das Gehörorgan vermag in der Secunde 9 Laute zu unterscheiden, und ein Körper muss also mindestens $^{333}/_{2 \cdot 9} = 18{,}5^m$ entfernt sein, um einen Schall als **Echo** (im Gegensatze zu Nachhall) zu reflectiren.

Für die Geschichte der Akustik und ihre Entwicklung in der neuern Zeit können neben den in 248 namhaft gemachten etwa noch folgende Specialwerke verglichen werden: „**Descartes**, Compendium musicæ. Ultraject. 1650 in 4. (Posth. erschienen, dagegen schon etwa 1618 verfasst), — **Morland**, Description of the Tuba Stentorophonica or speaking trumpet (Sprachrohr), an instrument of excellent use, as well at sea at as land, invented and variously experimented in the year 1670. London 1671 in fol., — **Euler**, Tentamen novæ theoriæ Musicæ, ex certissimis harmoniæ principiis dilucide expositæ. Petrop. 1739 in 4., — **d'Alembert**, Elémens de musique théorique et pratique. Paris 1779 in 8., — **Chladni**, Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig 1782, ferner: Die Akustik, Leipzig 1802 in 4., ferner: Traité d'Acoustique. Paris 1809 in 8., und: Neue Beiträge zur Akustik. Leipzig 1817 in 4., — Gottfried **Weber** (Freinsheim in Rheinbayern 1779 — Kreuznach 1839; Generalprokurator in Darmstadt), Theorie der Tonsetzkunst. Mainz 1817—1823, 2 Bde. in 8. (3. A. 1830—1832), — Charles **Cagniard de la Tour** (Paris 1777 — Paris 1859; Ingénieur-géographe und Mitglied der Pariser-Academie), Sur la Sirène (Annales de chim. et de phys. 1819), — Jean-Daniel **Colladon** (Genf 1802; Professor der Mechanik in Genf) et Ch. **Sturm**, Mémoire sur la compression des liquides et la vitesse du son dans l'eau. Paris 1837 in 8. (Auch Annal. de chim. et de phys. 1837), — Hermann

Ludwig Ferdinand **Helmholtz** (Potsdam 1821; Professor der Physiologie zu Königsberg, Bonn und Heidelberg), Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Braunschweig 1863 in 8. (2. A. 1865), — J. **Pisko**, Die neuern Apparate der Akustik. Wien 1865 in 8., — John **Tyndall** (London 1820; Professor der Physik und Mitglied der Roy. Society in London), Sound: A Course of Lectures. London 1867 in 8. (Franz. von Moigno, Paris 1869; Deutsch von Helmholtz und Wiedemann, Braunschweig 1869), — F. J. **Fétis**, Histoire générale de la musique depuis les temps les plus anciens jusqu'à nos jours. Tom. 1—2, Paris 1869 in 8., — etc."

282. Gesetze der Schwingungen. Entfernt man eine gespannte Saite aus ihrer Ruhelage, so geräth sie in Schwingungen, welche einer entsprechenden Wellenbewegung in der Luft rufen, und so einen bestimmten Ton zur Folge haben. Die Anzahl der Schwingungen einer Saite in einer bestimmten Zeit und die Höhe des durch sie hervorgebrachten Tones sind der Quadratwurzel der Spannung direct, der Länge aber umgekehrt proportionirt. Verkürzt man die Saite auf $^8/_9$, $^4/_5$, $^3/_4$, $^2/_3$, $^3/_5$, $^8/_{15}$, $^1/_2$, so heissen die entsprechenden Töne: Secunde, Terz, Quart, Quinte, Sext, Septime und Octave des ersten Tones. — Auf ähnliche Weise können gespannten Membranen, Stäben, eingeschlossenen Luftsäulen, etc., durch Erregung von Schwingungen verschiedene Töne entlockt werden. — Saiten und elastische Platten können in Abtheilungen schwingen, indem die Bildung von Knoten und Knotenlinien dadurch bedingt wird, dass einzelne Stellen am Schwingen verhindert werden; es beruhen darauf z. B. die sog. Chladni'schen Klangfiguren. Umgekehrt kann sich die schwingende Bewegung schallender Körper so mittheilen, dass ein Mitklingen oder eine sog. Resonnanz erfolgt.

Ueber die von **Chladni** entdeckten und nach ihm benannten Klangfiguren vergl. seine 281 aufgeführten Werke; über seither entdeckte verwandte Erscheinungen vergl. z. B. „Félix **Savart** (Mésières 1791 — Paris 1841; Professor der Physik und Mitglied der Academie in Paris), Recherches sur les vibrations normales (Annal. de chim. et de phys. 1827), — **Faradey**, On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces (Phil. Trans. 1831), — August **Kundt** (Schwerin 1839; Professor der Physik in Zürich und Würzburg), Ueber die Schwingungen der Luftplatten (Viertelj. der Zürch. nat. Gesellsch. 1868), — etc."

XXIX. Die Optik.

283. Das Licht. Jede durch das Sehorgan vermittelte Wahrnehmung einer Erscheinung wird dem sog. **Lichte** zugeschrieben, das in der Optik seine Behandlung findet. Es wurde früher als eine **Emission** der leuchtenden Körper betrachtet, während man

es jetzt (296) für eine durch sie bewirkte **Undulation** eines äusserst feinen und elastischen Mittels, des sog. Ethers, hält. Da seine Geschwindigkeit (s. 405, 427) circa 42000 Meilen oder ein Million-mal so gross als die des Schalles in der Luft ist, so müsste, wenn die Quadrate der Geschwindigkeiten in expansibeln Medien sich (281) umgekehrt wie die Dichten verhalten würden, die Dichte dieses Ethers ein Billion-mal kleiner als die der Luft sein. — Trifft ein Lichtstrahl auf die Grenze eines neuen Mittels, so kehrt ein Theil desselben durch **Zerstreuung**, — ein anderer durch **Reflexion**, für welche die Winkel des einfallenden und reflectirten Strahles mit der in ihre Ebene fallenden Normale einander gleich sind, in das alte Mittel zurück, — ein dritter Theil aber geht in das neue Mittel über, oder wird, da dabei gewöhnlich eine Ablenkung erfolgt, **gebrochen**, und zwar so, dass für dieselben Mittel das Verhältniss der Sinuszahlen der Winkel des einfallenden und gebrochenen Strahles mit der in ihre Ebene fallenden Normale, der sog. **Brechungsexponent**, unveränderlich ist. — Bei derselben Lichtquelle ist die Intensität der Beleuchtung eines Körpers **einerseits** dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionirt, **anderseits** hängt sie von dem Cosinus des Einfallswinkels der auffallenden Strahlen und von der Fähigkeit des Körpers, das Licht zu zerstreuen, d. h. von seiner sog. **Weisse** oder **Albedo**, ab, — auf welche Gesetze Bouguer und Lambert die sog. **Photometrie** bauten. Die Dauer eines Lichteindruckes auf das Auge beträgt etwa $^1/_3{}^s$, worauf z. B. das sog. Phantasmaskop beruht.

Noch im vorigen Jahrhunderte dominirte die durch **Newton** eingeführte Emissions-Hypothese, bei der man sich dachte, es gehen von den leuchtenden Körpern zahllose, äusserst feine, der Trägheit, aber nicht der Schwere unterworfene Theilchen von verschiedener Beschaffenheit aus, welche auf den Gesichtssinn in ähnlicher Weise wirken, wie die Ausströmungen von Riechstoffen auf den Geruchssinn. Seither ist diese Hypothese, weil sie manche neu entdeckte Erscheinungen (vergl. 296 u. f.) nur höchst gezwungen oder gar nicht erklären konnte, ja, wie wir unten an einem Beispiele sehen werden, mit Ergebnissen der Messung in förmlichen Conflict gerieth, verworfen und durch die von **Hugens** aufgestellte Undulations-Hypothese ersetzt worden. Nach dieser Letztern befinden sich die leuchtenden Körper in einer vibrirenden Bewegung, welche sich dem, den ganzen Weltraum erfüllenden und alle Körper durchdringenden, elastischen Aether mittheilt, so dass Wellen entstehen, die in ähnlicher Weise auf unsern Gesichtssinn wirken, wie die durch einen schallenden Körper erregten Luftwellen auf das Gehörorgan. Hat das Fortpflanzungsmittel nach jeder Richtung gleiche materielle Beschaffenheit und gleiche physikalische Eigenschaften (wie z. B. Wasser, Luft, etc.), so heisst es **isotrop**, — hat es dagegen nach verschiedenen Richtungen (wie z. B. bei manchen krystallinischen Körpern) verschiedene Eigenschaften, und namentlich verschiedene Elasticität, so heisst es **anisotrop**. — Ist O der Mittelpunct

der Erregung einer schwingenden Bewegung der Schwingungsdauer T, welche sich mit constanter Geschwindigkeit c in einem isotropen Mittel nach allen Richtungen von Theilchen zu Theilchen fortpflanzt, so wird nach der Zeit T das Theilchen O gerade eine Schwingung vollendet haben, — jedes in der Distanz l von ihm befindliche Theilchen m erst seit der Zeit $t = T - (l : c)$ schwingen, — und ein in der Distanz $L = c \cdot T$ befindliches Theilchen M seine Schwingung gerade beginnen. Eine solche Schwingung eines Theilchens besteht aber offenbar eigentlich darin, dass es durch eine momentane äussere Einwirkung in einer gewissen Richtung verschoben wird, während die durch solche Verschiebung geweckte Elasticität dasselbe auf gleichem Wege wieder in seine Ruhelage zurückzuführen sucht. Zur sog. **Phasenzeit** t hat es eine gewisse Elongation x, und es wirkt auf dasselbe eine die Verminderung von x anstrebende Kraft $f = F(x)$, welche für $x = 0$ verschwindet, so dass die in eine Reihe entwickelte $F(x)$ kein Glied ohne x enthalten kann; man darf somit für ganz kleine Werthe von x, wenn k^2 eine Constante ist,

$$f = -k^2 x \quad \text{oder nach 239:2} \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = -k^2 x \qquad 1$$

setzen. Dieser Differentialgleichung genügt aber, wie man sich leicht durch Differentiation überzeugt, wenn c' und c'' Constante sind, und $i = \sqrt{-1}$ ist, die Integralgleichung

$$x = c' \cdot e^{tki} + c'' \cdot e^{-tki}$$

oder, da $x = 0$ und $t = 0$ sich entsprechen, also $0 = c' + c''$ sein muss, mit Hülfe von 50:1

$$x = c'(e^{tki} - e^{-tki}) = 2c'i \cdot \text{Sin}\, tk \qquad 2$$

und hieraus folgt die der Phasenzeit t entsprechende Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = 2kc'i \cdot \text{Cos}\, tk \qquad 3$$

Ist a die Amplitude oder Elongation der Schwingung und t' die ihr entsprechende Phasenzeit, so folgen aus 2 und 3

$$a = 2c'i \cdot \text{Sin}\, t'k \qquad 0 = 2kc'i \cdot \text{Cos}\, t'k = ak \cdot \text{Ctg}\, t'k$$

also muss

$$\text{Ctg}\, t'k = 0 \qquad t'k = \frac{\pi}{2} \qquad \text{Sin}\, t'k = 1 \qquad c' = \frac{a}{2i}$$

sein, wofür 2 und 3 in

$$x = a \cdot \text{Sin}\, tk \qquad v = ak \cdot \text{Cos}\, tk \qquad 4$$

übergehen. Ist aber n eine ganze Zahl, so hat man

$$\text{Sin}\, tk = \text{Sin}\,(2n\pi + tk) = \text{Sin}\left(\frac{2n\pi}{k} + t\right)k$$

$$\text{Cos}\, tk = \text{Cos}\,(2n\pi + tk) = \text{Cos}\left(\frac{2n\pi}{k} + t\right)k$$

und es nehmen daher, wenn t je um $2\pi : k$ vermehrt wird, x und v immer wieder dieselben Werthe an, oder es ist die Dauer einer Schwingung

$$T = \frac{2\pi}{k} \qquad \text{also auch} \qquad k = \frac{2\pi}{T} \qquad 5$$

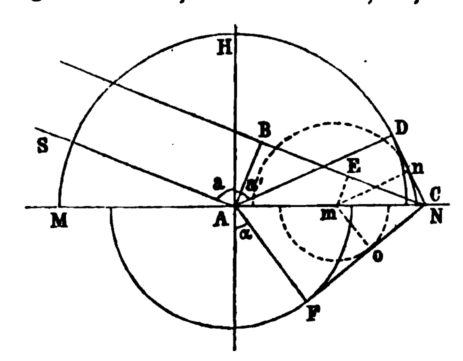
wofür die 4 in

$$x = a \cdot \text{Sin}\, \frac{2t\pi}{T} \qquad v = \frac{2a\pi}{T} \cdot \text{Cos}\, \frac{2t\pi}{T} \qquad 6$$

übergehen, so dass für das früher betrachtete Theilchen m zur Zeit t nach der Erregung von O, oder zur Zeit $t - (l : c)$ nach dem Beginne seiner eigenen Schwingung

$$x = a \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{L}\right) 2\pi \qquad v = \frac{2a\pi}{T} \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{L}\right) 2\pi \qquad 3$$

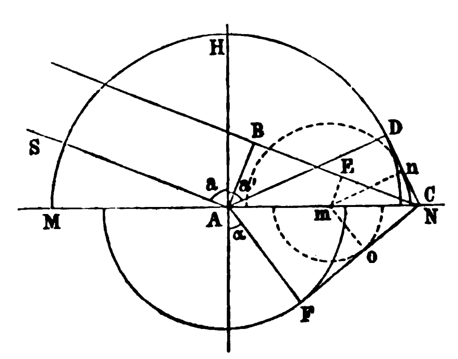
zu setzen ist. Es geht hieraus hervor, dass nicht nur alle Theilchen, welche von O in demselben Abstande l oder auf einer Kugelfläche des Radius l liegen, sondern auch Alle, welche die Abstände $L + l$, $2L + l, \ldots$ haben, wenn sie nur überhaupt zur Zeit t schon schwingen, sich in derselben Schwingungsphase befinden, — und dass in jeder Kugelschaale der Dicke L gleichzeitig alle Schwingungsphasen vertreten sind. Man nennt eine solche Kugelschaale eine **Welle**, L die **Wellenlänge**, und jeden Radius einen **Strahl**. — Sobald das Theilchen m angeregt ist, so theilt es seine Schwingungen ebenfalls den benachbarten Theilchen mit oder wird Mittelpunct einer secundären Wellenbewegung, die aber z. B. ein von O in der Distanz l' über m hinaus liegendes Theilchen m' zur Zeit $t' = (l : c) + [(l' - l) : c] = l' : c$, d. h. zu derselben Zeit erreicht, wo auch die Anregung von O dort ankömmt, — es braucht also für die geradlinige Fortpflanzung in demselben Mittel nur die, alle secundären Wellen einhüllende Hauptwelle in Berücksichtigung gezogen zu werden, — und in Fällen, wo, wie im Folgenden, diese secundären Wellen leichter ermittelt werden können, darf man ihnen die Einhüllende als Hauptwelle substituiren. — Trifft eine Lichtwelle, von der $AB \perp AS$ ein Stück darstellen mag, auf die Trennungsebene MN des alten und eines neuen Mittels, so wird das Theilchen A Mittelpunct einer secundären Welle, von der ein Theil mit der frühern Geschwindigkeit in das alte Mittel zurückkehrt, ein zweiter mit veränderter Geschwindigkeit in das neue Mittel übergeht.



Der rückkehrende Theil wird, während die alte Welle von B nach C fortschreitet, bis zu dem aus A mit BC beschriebenen Kreise gelangen, — und unterdessen wird auch jedes zwischen A und C liegende Theilchen m angeregt worden sein, ja selbst eine Welle bis zu dem aus m mit EC als Radius beschriebenen Kreise gesandt haben. Zieht man von C eine Tangente CD an den aus A beschriebenen Kreis, und ist mn parallel zum Berührungsradius AD, so verhält sich $mn : AD = mC : AC = EC : BC$. Nun ist aber $AD = BC$, also muss auch $mn = EC$ sein, oder es berührt CD auch den aus m beschriebenen Kreis; also hüllt CD alle von den zwischen A und C liegenden Puncten ausgehenden secundären Wellen in demselben Augenblicke ein, wo die ursprüngliche Welle nach C gelangt, — folglich ist CD die entsprechende Lage der reflectirten Hauptwelle, und es entspricht dem einfallenden Strahle SA der reflectirte Strahl AD. Da aber wegen $AD = BC$ die Dreiecke ADC und ABC congruent sind, so folgt $\angle SAM = \angle BCA = \angle DAC$, oder es ist der sog. Einfallswinkel a gleich dem Reflexionswinkel a'. — Bezeichnet c' die Geschwindigkeit, mit welcher sich der in das neue Mittel übergehende Theil der in A erregten Welle in demselben fortpflanzt, so wird er in der Zeit $t = BC : c$, welche die ursprüngliche Welle braucht, um von B nach C zu kommen, bis zu dem aus A mit dem Radius $r = c' \cdot t$ beschriebenen Kreise

gelangen, den die Tangente aus C in F berührt. Ist ferner $t' = EC : c$, so wird die in m entstehende Welle bis zum Ende derselben Zeit zu dem aus m mit dem Radius $r' = c' . t'$ beschriebenen Kreise fortrücken. Wenn aber $mo \perp CF$, so hat man

$$r : r' = t : t' = BC : EC = AC : mC = AF : mo = r : mo$$



folglich ist $r' = mo$, und hieraus kann man offenbar, entsprechend wie es bei der Reflexion geschehen ist, schliessen, dass CF die gebrochene Welle und AF der gebrochene, mit dem Lothe AH einen Winkel α bildende Strahl ist, so dass

$$\begin{aligned} \text{Sin}\, a : \text{Sin}\, \alpha &= \\ &= \text{Cos}\, DAC : \text{Cos}\, FAC = \\ &= AD : AF = ct : c't = \\ &= c : c' = n \end{aligned} \qquad 8$$

womit, da n für dieselben zwei Mittel constant bleibt, das im Texte ausgesprochene Brechungsgesetz aus der Undulationshypothese bewiesen ist, — zumal sich der Beweis nicht verändert, wenn auch $c' > c$ angenommen wird. Nur wenn c' so gross, dass $AF > AC$, so kann keine Tangente CF mehr gezogen werden, und es wird also die gebrochene Welle für $c't > ct . \text{Cosec}\, \alpha$ oder $\text{Sin}\, \alpha > n$ unmöglich, — es tritt dann der in 286 behandelte Fall der totalen Reflexion ein. — Die Richtigkeit des aus 8 folgenden Gesetzes, dass sich die Brechungsexponenten für den Uebergang des Lichtes aus einem Mittel in zwei verschiedene Mittel

$$n' : n'' = \frac{c}{c'} : \frac{c}{c''} = c'' : c' \qquad 9$$

d. h. umgekehrt wie die, diesen Mitteln zukommenden Geschwindigkeiten verhalten, ist wiederholt, so z. B. von Jean-Bernard-Léon **Foucault** (Paris 1819 — Paris 1868; physikalischer Assistent der Pariser-Sternwarte), vergl. seine Abhandlung „Sur les vitesses relatives de la lumière dans l'air et dans l'eau (Annal. de chim. et de phys. 1854)", experimentell nachgewiesen, und dadurch ein entscheidender Beweis für die Unzulänglichkeit der Emanations-Hypothese geliefert worden, da diese für das stärker brechende Mittel auch die grössere Geschwindigkeit verlangt, und für sie statt 8 die Beziehung $c' : c = n$ bestehen müsste, so dass der Gewinn an lebendiger Kraft, welche ein Lichttheilchen $m = 1$ beim Eintritte in ein stärker brechendes Mittel zu erwarten hätte, nach 264

$$k = c'^2 - c^2 = c^2 (n^2 - 1) \qquad 10$$

wäre. Nimmt man die Geschwindigkeit im Vacuum als Einheit an, so wird für irgend ein Mittel $k = n^2 - 1$, und diese Grösse wird seit Newton **brechende Kraft** dieses Mittels, ihr Verhältniss zur Dichte des Mittels aber **Brechungsvermögen** genannt, obschon jetzt, wo die Undulationstheorie allgemein angenommen ist, diese Ausdrücke nicht mehr die frühere Bedeutung haben. — Das Reflexionsgesetz kömmt schon in der von **Euklid** geschriebenen „Οπτικα και Κατοπτρικα (Parisiis 1557 in 4., und später)" vor, — das Brechungsgesetz scheint dagegen zuerst von Willebrord **Snellius** aufgefunden, von **Descartes** in dessen Manuscripten entdeckt, annexirt, und in der jetzt üblichen Form in seinem in 3 erwähnten Hauptwerke publicirt

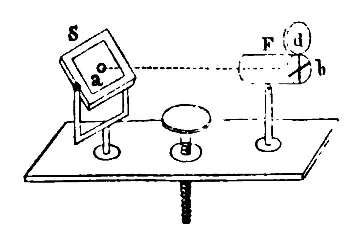
worden zu sein. — Die durch die Werke „**Bouguer**, Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729 in 8. (Neue Ausg. durch Lacaille, Paris 1760 in 4.; lat. durch Richtenburg, Wien 1762)" und „**Lambert**, Photometria. Aug. Vind. 1760 in 8." begründete Lichtstärkemessung oder Photometrie, geht zunächst von den zwei Hauptgrundsätzen aus, dass **1.** dem Auge nur darüber ein entscheidendes Urtheil zusteht, ob zwei gleichzeitig auftretende Helligkeiten gleich sind oder nicht, so dass auf den Grad ihrer Verschiedenheit nur aus der Grösse der Veränderung geschlossen werden kann, welche die Eine erleiden muss, um der Andern gleich zu werden, und die praktische Photometrie somit Mittel zu suchen hat, um Helligkeiten messbar zu verändern; — **2.** dass die Helligkeit in demselben Verhältnisse abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung der Lichtquelle zunimmt. Die meisten Photometer beruhen entsprechend entweder darauf, dass man die Schatten eines Stabes oder die Beleuchtung zweier Flächen durch Verschieben der einen Lichtquelle ausgleicht, und die Distanzen der Lichtquellen misst, — oder dass man (was aber nach den Versuchen von May ganz irrige Resultate zu geben scheint) zählt, wie viele durchsichtige Glasblättchen oder Hornscheiben eine Lichtquelle unsichtbar machen. Für neuere Photometer vergl. theils 446, theils mehrere sofort namhaft zu machende Specialschriften. — Ausser den in 245 angeführten Werken sind nämlich sowohl für weitern Detail, als für die historische Entwicklung der Optik etwa folgende Schriften zu vergleichen: „**Keppler**, Dioptrice, seu Demonstratio eorum quæ visui et visibilibus propter Conspicilla non ita pridem inventa accidunt. Aug. Vind. 1611 in 4., — **Barrow**, Lectiones opticæ XVIII. Londini 1669 in 4. (für eine spätere Aufl. vergl. 3), — **Hugens**, Traité de la lumière, avec un discours de la cause de la pesanteur. Leyde 1690 in 4., — **Newton**, Optics or a Treatise of the reflexions, inflections and colours of Light. London 1704 in 4. (Auch wiederholt in 8.; lat. durch Clarke, London 1706 in 4. und ebenfalls mehrmals in 8.; franz. durch Coste, Amsterdam 1729, 2 Vol. in 12.), — Robert **Smith** (1689 — Cambridge 1768; Professor der Mathematik zu Cambridge), A complet system of Optics. Cambridge 1738, 2 Vol. in 4. (Deutsch von Kästner, Altenburg 1755; franz. durch Pesenas, Avignon 1767, — durch Duval-Leroi, Brest 1767), — Nicolas-Louis de **La Caille** (Rumigny 1713 — Paris 1762; Professor der Mathematik und Mitglied der Academie zu Paris), Leçons élémentaires d'optique. Paris 1750 in 8. (Viele Auflagen, noch 1810; lat. durch Boscovich, Viennæ 1757), — **Euler**, Nova theoria lucis et colorum (Op. var. arg. I), ferner: Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis (Op. var. arg. II), und: Dioptrica. Petrop. 1769—1771, 3 Vol. in 4., — **Priestley**, History and present state of discoveries relating to vision, light and colours. London 1772, 2 Vol. in 4. (Deutsch von Klügel, Leipzig 1775), — **Klügel**, Analytische Dioptrik. Leipzig 1778 in 4., — Joh. Wolfgang von **Göthe** (Frankfurt 1749 — Weimar 1832; der gefeierte Dichter), Beiträge zur Optik. Weimar 1791—1792, 2 Stücke in 8., und: Zur Farbenlehre. Tübingen 1810, 2 Bde. in 8., — Giovanni Battista **Venturi** (Bibiano bei Reggio 1746 — Reggio 1822; Professor der Philosophie und Physik zu Modena und Pavia), Commentari sopra la storia e le teorie dell' Ottica. Bologna 1814 in 4., — John Frederick William **Herschel** (Slough bei Windsor 1792; Sohn von Wilhelm; Mitglied der Roy. und Astron. Soc. und auswärtiges Mitglied der Par.-Acad.; einige Jahre Director der k. Münze, jetzt wieder Privatgelehrter in London), On the theory of light. London 1828 in 4. (franz. durch

Verhulst und Quetelet, Brux. 1829; deutsch von E. Schmidt, Stuttgart 1831), — Joh. Joseph **Prechtl** (Bischofsheim in Franken 1778 — Wien 1854: Director des polytechn. Instituts in Wien), Praktische Dioptrik. Wien 1828 in 8., — Giovanni **Santini** (Caprese 1786; Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Padua), Teorica degli stromenti ottici. Padova 1828, 2 Vol. in 8., — **Littrow**, Dioptrik. Wien 1830 in 8., — **Brewster**, A treatise on optics. London 1831 in 8., — Joh. Karl Eduard **Schmidt** (Leipzig 1803 — Tübingen 1832; Professor der Mathematik, Astronomie und Physik zu Tübingen), Lehrbuch der analytischen Optik (herausgegeben von Goldschmidt), Göttingen 1834 in 8., — **Kunzek**, Die Lehre vom Lichte. Lemberg 1836 in 8. (2. Aufl. Wien 1853), — Heinrich Emil **Wilde** (Finkenstein bei Marienwerder 1793 — Berlin 1859), Geschichte der Optik. Berlin 1838—1843, 2 Bde. in 8., — Gustav **Radicke** (Berlin 1810; Professor der Physik in Bonn), Handbuch der Optik. Berlin 1839, 2 Bde. in 8., — **Gauss**, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841 in 4., — **Encke**, De formulis dioptricis. Berolini 1844 in 4., — **Dove**, Darstellung der Farbenlehre und optische Studien. Berlin 1853 in 8., — **Grunert**, Optische Untersuchungen. Leipzig 1846—1851, 3 Bde. in 8., — **Beer**, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853 in 8., — F. **Billet**, Professor der Physik in Dijon: Traité d'optique physique. Paris 1858—1859, 2 Vol. in 8., — Georg **Recknagel**, Lambert's Photometrie und ihre Beziehung zum gegenwärtigen Standpuncte der Wissenschaft. München 1861 in 8., — A. Emile **Cherbuliez** (Genf 1837; Lehrer der Mathematik und Rector der Kantonsschule in Bern), Essai historique sur les précurseurs de la théorie des ondes lumineuses. Berne 1863 in 8., — Charles **Briot**, Professor in Paris: Essai sur la théorie mathématique de la lumière. Paris 1864 in 8., — Joh. Karl Friedrich **Zöllner** (Berlin 1834; Docent in Leipzig), Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865 in 8., — Aléxandre-Edmond **Becquerel** (Paris 1820; Sohn von Antoine-César; Professor in Paris), La lumière, ses causes et ses effets. Paris 1867—1868, 2 Vol. in 8., — J. H. **Lindemann**, Beitrag zur Geschichte der Photometer, nebst Angabe einer neuen Methode der Lichtmessung. Breslau 1868 in 8., — Fr. **Burckhardt**, Leonhard Euler's Lehre vom Licht. Basel 1869 in 8., — etc.“

284. Der ebene Spiegel. Alle Strahlen, welche von einem leuchtenden Puncte auf einen ebenen Spiegel fallen, werden durch diesen (283) so zurückgeworfen, wie wenn sie direct aus dem symmetrischen Puncte (88) kommen würden, und dieser letztere Punct heisst darum **Bild** des erstern, — ist aber nur ein fingirtes, nicht ein reelles Bild, da die Strahlen nicht wirklich durch ihn gehen. — Ein Punct wird bei einer bestimmten Stellung des Auges in einem solchen Spiegel gesehen, wenn die Gesichtslinie nach seinem Bilde den Spiegel trifft. Ferner haben Gegenstand und Bild dieselbe Grösse. — Trifft ein Strahl auf die Kante zweier zu einander senkrechter Spiegel ein, so bilden die beiden reflectirten Strahlen eine Gerade, — eine Eigenschaft, auf welcher der sog. **Heliotrop** von Gauss beruht. — Bildet der Winkel α zweier Spiegel einen aliquoten, z. B. den n^{ten} Theil von 360°, so glaubt

man jeden zwischen ihnen befindlichen leuchtenden Punct n-fach zu sehen, und zwar erscheint er mit seinen Bildern symmetrisch in einem Kreise geordnet, dessen Centrum in der Kante der Spiegelebenen liegt, — man hat ein sog. **Kaleidoskop.**

Das beiläufig bemerkte Glitzern der Fenster eines fernen Kirchthurmes soll **Gauss** auf den Gedanken gebracht haben, einen schwer sichtbaren Richtpunct dadurch scharf anvisirbar zu machen, dass man mit einer Hülfsvorrichtung, für welche der Text und 222 zu vergleichen, von diesem Puncte aus Sonnenlicht gegen den Beobachter hin reflectire. Statt seines Heliotropen (vergl. für denselben Gött. gel. Anz. 1821, sowie Astr. Nachr. Bd. 1 und 5) wird jetzt meistens folgender Einfachere benutzt, den **Baeyer** in seinem Werke „Die Küstenvermessung. Berlin 1849 in 4." vorgeschlagen hat: Ein über dem Visirpuncte aufgestelltes Brett trägt einen um zwei Axen drehbaren, in der Mitte bei a durchbrochenen Spiegel S, und ein durch einen Deckel d verschliessbares Rohr F mit Fadenkreuz b; man stellt zuerst ab nach dem Stationspuncte ein, — dann wird d geschlossen, S gedreht, bis das Sonnenlicht das Fadenkreuz erhellt, und der von a herrührende dunkle Fleck durch dasselbe gleichmässig getheilt wird, — schliesslich d wieder geöffnet. Für einen verwandten Heliotropen von **Steinheil** vergl. Schumacher's astron. Jahrb. auf 1844. — Für das Kaleidoskop, auf das sein Erfinder **Brewster** 1817 ein Patent nahm, vergl. dessen Schrift „On the Kaleidoscope, its history, theory and construction. Edinburgh 1858 in 8."



285. Hohlspiegel und Convexspiegel. Von einem sphärischen Hohlspiegel des Mittelpunctes C wird jeder von einem leuchtenden Puncte D einfallende Strahl DM (s. Fig. 1) so nach MB zurückgeworfen, dass (110)

$$BC : CD = BM : MD$$

oder angenähert

$$BC : CD = BA : AD$$

also nahe (116) A, B, C, D harmonische Puncte sind. Der Punct B, in welchem somit nahe alle reflectirten Strahlen den in sich selbst zurückgeworfenen sog. **Hauptstrahl** DA schneiden, ist das reelle Bild von D, und kann aus A, C, D nach 116 durch Construction gefunden werden. Bezeichnen α, 2p, a die **Bildweite** AB, den Radius AC und die **Gegenstandsweite** AD, so folgt aus obiger Proportion

$$\alpha = \frac{ap}{a-p} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a} = \frac{1}{p} \qquad \mathbf{1}$$

Ist a sehr gross, wie z. B. für die Sonne, so wird $\alpha = p$, und es heisst daher p als Sonnenbildweite **Brennweite.** Für $a < p$ wird α negativ, oder es entsteht ein hinter dem Spiegel liegendes fingir-

tes Bild. Gegenstand und Bild haben, wie die Hauptstrahlen der äussersten Puncte des Gegenstandes lehren, gleiche oder entgegengesetzte Lage, je nachdem sie auf gleicher oder entgegengesetzter Seite des Mittelpunctes liegen, — ihr Grössenverhältniss aber stimmt mit dem Verhältniss ihrer Abstände vom Mittelpuncte überein. — Wird der Radius eines sphärischen Hohlspiegels negativ, so geht er in den sphärischen Convexspiegel (Malerspiegel) über, so dass für diesen

$$\alpha = -\frac{ap}{a+p} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a} = -\frac{1}{p} \qquad 2$$

d. h. jedes Bild hinter dem Spiegel, aufrecht und verkleinert ist. — Zylindrische und conische Spiegel wirken in der Richtung der Kanten als ebene, senkrecht zur Axe als sphärische Spiegel und geben darum Zerrbilder. Bei jedem nach einer Linie zweiten Grades geschliffenen Hohlspiegel endlich werden alle aus dem einen Brennpuncte einfallenden Strahlen in den andern Brennpunct zurückgeworfen, — so z. B. bei einem parabolischen Spiegel alle parallel zur Axe einfallenden Strahlen in den Brennpunct concentrirt.

Den Satz: „Beim sphärischen Hohlspiegel sind Bild und Gegenstand, in Beziehung auf Mitte und Mittelpunct des Spiegels als zugeordnete Puncte, einander harmonisch zugeordnet", theilte ich 1843 in Grunert's Archiv (III 444) mit. — Aus Dreieck BMC folgt

$$BC = 2p\frac{\sin(v-w)}{\sin(2v-w)} = 2p\frac{\sin v - \cos v . \operatorname{Tg} w}{\sin 2v - \cos 2v . \operatorname{Tg} w} =$$

$$= 2p\frac{\sin v - \cos v[2p \sin v : (CD - 2p \cos v)]}{\sin 2v - \cos 2v[2p \sin v : (CD - 2p \cos v)]} =$$

$$= 2p\frac{CD . \sin v}{CD . \sin 2v - 2p \sin v} = \frac{p . CD}{p - CD . \cos v} \qquad 3$$

Bei ganz kleiner Oeffnung oder sog. **Apertur** des Spiegels darf $\cos v = 1$ gesetzt werden, so dass in diesem Falle nach 3

$$BC : CD = 2p : 2(p - CD) \quad \text{oder} \quad BC : CD = BA : AD$$

und, wenn überdiess $CD = \infty$ ist, $BC = p$, — wie dieses Beides im Texte als Näherung gefunden wurde. Für jeden andern Werth von v wird dagegen B'C grösser als für v = 0, und zwar hat man, wenn B'C dem grössten Werthe v' entspricht, den v bei der gegebenen Apertur des Spiegels annehmen kann, BC aber mit v = 0 correspondirt,

$$B'C - BC = \frac{p . CD}{p - CD . \cos v'} - \frac{p . CD}{p - CD} = \frac{p . CD^2 . (1 - \cos v')}{(p - CD)(p - CD . \cos v')} \qquad 4$$

so dass die sog. **Längenabweichung** mit der Oeffnung des Spiegels zunimmt, — für CD = 0 oder v' = 0 aber verschwindet. Kann, wie für parallel zur Axe einfallende Strahlen, p gegen CD vernachlässigt werden, so wird die Längenabweichung, wenn überdiess $a = 2p \sin v'$ als **Maass** für die Apertur eingeführt wird, sehr nahe

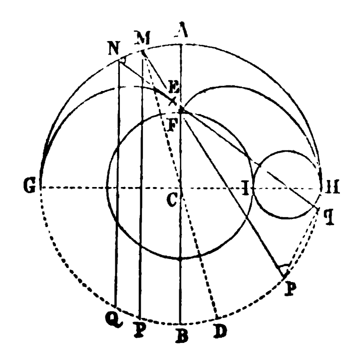
$$\delta = \frac{p(1 - \cos v')}{\cos v'} = \frac{p(1 - \sqrt{1 - a^2 : 4p^2})}{\sqrt{1 - a^2 : 4p^2}} = \frac{a^2}{8p} \qquad 5$$

und dieser Längenabweichung entspricht als Bild des Punctes, anstatt eines

Punctes, ein Kreis des Radius

$$s = l \,.\, \mathrm{Tg}\, v' = \text{nahe}\ \frac{a^3}{16\,p^2} \qquad 6$$

oder auch eine **Seitenabweichung**, welche der Deutlichkeit des Bildes Eintrag thut. — Aus 3 geht hervor, dass alle von D ausgehenden Strahlen DM, welche in derselben Distanz AM vom Pole A des Spiegels auf diesen Letztern fallen, nach der Reflexion in demselben Puncte B zusammenkommen. Es sind diese letztern, in 3—5 enthaltenen Sätze bereits von Roger **Baco** (Ilchester in Sommerset 1216 — Oxford 1294; Franziskaner), dem sog. Doctor mirabilis des Mittelalters, in seinem „Tractatus de speculis (Ed. Joh. Combach, Francof. 1614 in 4.)" ausgesprochen worden. — Sind PM und QN zwei parallel zur Axe eines sphärischen Hohlspiegels einfallende Strahlen, und macht man Dp = DP oder Mp = MP, und entsprechend Nq = NQ, so sind Mp und Nq die reflectirten Strahlen, welche sich in E schneiden. Nun hat man nach Construction Arc Mp — Arc Nq = Arc MP — Arc NQ = 2 . MN, und Arc pq = Arc . Np — Arc . Nq = MN + Mp — Nq = 3 MN, — und, wenn MN sehr klein ist, sehr nahe



$$ME = Eq \,.\, \frac{MN}{pq} = \tfrac{1}{3} \,.\, Eq = \tfrac{1}{3}\, Ep = \tfrac{1}{4} \,.\, Mp$$

Da endlich Arc . Mp = Arc . MP = 2 MG, so hat man, um den Punct E zu finden, wo ein Strahl PM nach seiner Reflexion durch den benachbarten reflectirten Strahl getroffen wird, nur Arc . Mp = 2 . MG aufzutragen, und ¼ der Verbindungslinie Mp zu nehmen. Der Ort des, schon von **Barrow** (vergl. seine Lectiones) in einzelnen einfachen Fällen aufgesuchten Punctes E, welcher in dem vorliegenden Falle mit der von H beim Wälzen des Kreises HI auf IF beschriebenen Epicycloide übereinkömmt, und z. B. in einem mit Wasser gefüllten Glase sichtbar wird, heisst Brennlinie oder **Catacaustica**, und wurde zuerst durch **Hugens** in seinem schon 1678 verfassten „Traité de la lumière", — dann auch, aber wenigstens anfänglich fehlerhaft, von Graf Ehrenfried Walter von **Tschirnhausen** (Kieslingswalde bei Görlitz 1651 — Dresden 1708; auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie, viel auf Reisen) in mehreren Vorlagen an die Pariser-Academie behandelt, — endlich von Jakob und Johannes **Bernoulli** (vergl. ihre Opera und die Analyse des infinimens petits) nebst der Diacaustica (s. 290) allgemein untersucht. Als betreffende Arbeiten aus der neuern Zeit mögen zum Schlusse noch „Auguste **De la Rive** (Genf 1801; Professor der Physik in Genf und auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie), Dissertation sur la partie de l'optique qui traite des courbes dites caustiques. Genève 1823 in 8." und „**Strauch**, Das umgekehrte Problem der Brennlinien. Wien 1862 in 4. (Auch Wiener Denkschr. 20)" angeführt werden.

286. Die totale Reflexion. Bezeichnet α den Einfallswinkel, β den Brechungswinkel und n den Brechungsexponenten, so ist (283)

$$\mathrm{Sin}\,\alpha : \mathrm{Sin}\,\beta = n : 1$$

und es entsprechen sich somit

$\alpha > \beta$ und $n > 1$ $\quad$ $\alpha = \beta$ und $n = 1$ $\quad$ $\alpha < \beta$ und $n < 1$

oder es wird ein Strahl im Allgemeinen in Beziehung auf das Einfallsloth zugebrochen, nicht gebrochen oder weggebrochen, je nachdem n grösser, gleich oder kleiner Eins. Ist jedoch $n < 1$ und $\alpha > \text{Arc Sin } n$, so wird β unmöglich; es kann also der Strahl nicht passiren, sondern kehrt durch sog. **totale Reflexion** in das alte Mittel zurück, so dass in diesem Falle die brechende Fläche wie ein Spiegel wirkt.

Die im Texte erhaltene Bedingung für die totale Reflexion stimmt offenbar genau mit der in 283 aus der Undulationstheorie Abgeleiteten überein. — Der Name **totale** Reflexion ist um so berechtigter, als nach den Versuchen von **Arago** (vergl. dessen Oeuvres Vol. 10) und Paul-Auguste-Ernest **Laugier** (Paris 1812; früher Adjunct der Pariser-Sternwarte, jetzt Mitglied der Academie) bei Benutzung eines Reflexionsprisma's (vergl. das gebrochene Fernrohr in 221) wirklich fast kein Licht, jedenfalls entschieden viel weniger als bei einem gewöhnlichen Spiegel, verloren geht.

287. Die Refraction. Denken wir uns die Atmosphäre als eine Folge concentrischer und homogener Schichten der Brechungsexponenten μ, so verhält sich nach 283

$$\text{Sin } e_n : \text{Sin } b_n = \mu_{n+1} : \mu_n$$

während trigonometrisch

$$\text{Sin } b_n : \text{Sin } e_{n+1} = a_{n+1} : a_n$$

und es ist daher

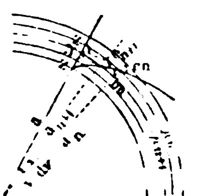
$$a_n \cdot \mu_n \cdot \text{Sin } e_n = a_{n+1} \cdot \mu_{n+1} \cdot \text{Sin } e_{n+1} = \gamma \qquad 1$$

wo γ eine Constante. Bezeichnen daher z und z' den ersten und letzten Einfallswinkel (die wahre und scheinbare Zenithdistanz), $r = z - z'$ die Ablenkung des Lichtes durch die Atmosphäre oder die sog. **Refraction,** und setzt man $\mu_0 = 1$, $\mu_\infty = n$, während man die Höhe der Atmosphäre gegen den Erdradius vernachlässigt, so ist nahe

$$\text{Sin } z = n \text{ Sin } z' \qquad r = \frac{n-1}{\text{Sin } 1''} \text{Tg } z' = \frac{n-1}{n \cdot \text{Sin } 1''} \text{Tg } z \qquad 2$$

also die Refraction nahe der Tangente der Zenithdistanz proportional.

Aus 1 folgt unmittelbar in der im Texte angegebenen Weise



$$\text{Sin } z = n \text{ Sin } z'$$

und hieraus, je nachdem man z oder z' eliminirt

$$\text{Sin } (r + z') = n \text{ Sin } z'$$

$$\text{Sin } z = n \text{ Sin } (z - r)$$

oder nahe

$$r \text{ Sin } 1'' \cdot \text{Cos } z' + \text{Sin } z' = n \text{ Sin } z'$$

$$\text{Sin } z = n \text{ Sin } z - n\, r \text{ Sin } 1'' \cdot \text{Cos } z$$

woraus dann sofort die übrigen Gleichungen 2 folgen.

Für die weitere Entwicklung der Refraction, die Geschichte dieser Disciplin, und die betreffenden Tafeln vergl. 390.

288. Das Prisma. Die Ablenkung a eines Lichtstrahls in Folge seines Durchganges durch ein sog. Prisma des brechenden Winkels b und des Brechungsexponenten n wird durch die Beziehungen

$$\operatorname{Sin} \alpha_1 = n \operatorname{Sin} \beta_1 \qquad \operatorname{Sin} \beta_2 = n \operatorname{Sin} \alpha_2 \tag{1}$$

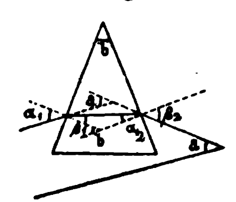
$$b = \beta_1 + \alpha_2 \qquad a = \alpha_1 + \beta_2 - b \tag{2}$$

bestimmt. Für $\alpha_1 = \beta_2$ oder $\beta_1 = \alpha_2$ wird a ein Minimum, und wenn man daher das Prisma so lange dreht, bis der Winkel des directen und doppelt gebrochenen Strahles am Auge ein Minimum a_0 annimmt, so hat man

$$\alpha_1 = \frac{a_0 + b}{2} \qquad \beta_1 = \frac{b}{2} \qquad n = \operatorname{Sin} \frac{a_0 + b}{2} : \operatorname{Sin} \frac{b}{2} \tag{3}$$

und kann somit n bestimmen.

Aus 1 folgt



$$\operatorname{Sin} \alpha_1 \cdot \operatorname{Sin} \alpha_2 = \operatorname{Sin} \beta_1 \cdot \operatorname{Sin} \beta_2 \tag{4}$$

oder

$$\operatorname{Cos}(\alpha_1 - \alpha_2) - \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{Cos}(\beta_2 - \beta_1) - \operatorname{Cos}(\beta_2 + \beta_1) \tag{5}$$

Ferner folgen aus 1

$$\operatorname{Cos} \alpha_1 \cdot d\alpha_1 = n \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 \cdot d\beta_1$$

$$\operatorname{Cos} \beta_2 \cdot d\beta_2 = n \cdot \operatorname{Cos} \alpha_2 \cdot d\alpha_2$$

und, zum Theil mit Hülfe hievon und von 4, aus 2 successive

$$d\alpha_2 = -d\beta_1 \qquad d\alpha_1 = n \frac{\operatorname{Cos} \beta_1}{\operatorname{Cos} \alpha_1} \cdot d\beta_1 \qquad d\beta_2 = -n \frac{\operatorname{Cos} \alpha_2}{\operatorname{Cos} \beta_2} \cdot d\beta_1$$

$$\frac{da}{d\beta_1} = \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} + \frac{d\beta_2}{d\beta_1} = n \frac{\operatorname{Cos}(\beta_2 - \beta_1) - \operatorname{Cos}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{Cos} \alpha_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_2} \tag{6}$$

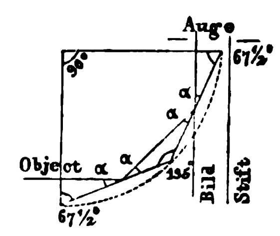
Soll a ein Minimum annehmen, so muss somit

$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \qquad \text{also nach 5} \qquad \beta_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

folglich

$$\beta_2 = \alpha_1 \qquad \text{und} \qquad \beta_1 = \alpha_2$$

sein, w. z. b. w. Für einen etwas andern Beweis vergl. K. L. **Bauer** in Bd. 3 von Carl's Repertorium der technischen Physik. — Jeder auf eine Kathetenfläche eines Prisma's A senkrecht einfallende Strahl tritt nach doppelter Reflexion normal zu der andern Kathetenfläche aus, und man sieht daher auf einem unter dem Prisma liegenden Papier gleichzeitig einen seitlichen Gegenstand und einen Zeichnungsstift; hierauf basirt die von **Wollaston** erfundene **Camera lucida** zum Nachzeichnen.



289. Die Linsen. Ein von zwei Kugelsegmenten der Radien R und r begrenzter durchsichtiger Körper heisst **biconvexe Linse**, die mit der Centraldistanz zusammenfallende Gerade **Axe** derselben,

der in die Linse fallende Theil d der Axe **Dicke**, und die Mitte der Dicke **Mittelpunct** der Linse. Bezeichnet n den Brechungsexponenten, so erhält man unter Annahme, dass der einfallende Strahl einen kleinen Winkel mit der Axe bilde oder ein Centralstrahl sei, und d vernachlässigt werden dürfe (103; 283; Fig. 1)

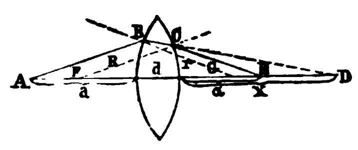
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p} \qquad \text{oder} \qquad \alpha=\frac{a p}{a-p}=p+\frac{p^2}{a-p} \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$\frac{1}{p}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$$

Es gilt also für die biconvexe Linse dasselbe Gesetz wie für den Hohlspiegel (285), folglich bietet sie auch ganz analoge Erscheinungen dar. — Schlägt R durch das Unendliche (planconvexe Linse) in einen negativen Werth (concav-convexe Linse) über, so ändert sich das Gesetz, so lange $R > r$ bleibt, nicht, indem dadurch nur die Brennweite p etwas grösser wird. Es haben also die bi-, plan- und concav-convexen Linsen gleiche Eigenschaften, namentlich das Bestreben, die Convergenz der Strahlen zu befördern, — sie bilden die Classe der **Sammellinsen** oder Brenngläser. — Wird $r > R$ (convex-concave Linse), oder schlägt auch noch r durch das Unendliche (planconcave Linse) in einen negativen Werth (biconcave Linse) über, so wird p negativ, so dass diese drei Linsenarten nunmehr mit dem sphärischen Convexspiegel (285) gleiches Gesetz und somit gleiche Eigenschaften haben; namentlich befördern sie die Divergenz der Strahlen, und bilden somit die Classe der **Zerstreuungslinsen.**

Nach dem Werke „Discoveries in the ruins of Niniveh and Babylon. London 1833" wurde **Brewster** eine zu Ninive gefundene planconvexe Bergkristall-Linse zur Untersuchung übergeben; er fand bei ihr auf 1'',6 Durchmesser eine Brennweite von 4'',5, und sprach des Bestimmtesten aus, dass man sie nicht als eine Zierath, sondern als eine Probe eines assyrischen Vergrösserungsglases zu betrachten habe. Es scheinen also die Linsen schon den Alten bekannt gewesen zu sein, und die von 1317 datirende Grabschrift in Florenz „Qui giace **Salvino** degli Armati, Inventore degli occhiali. Dio gli perdoni le peccata" würde uns somit nicht den eigentlichen Erfinder der Brillen, sondern nur etwa denjenigen bezeichnen, der sie förmlich fabricirte und in Handel brachte. — Die zur Ableitung der von **Barrow** in seinen „Lectiones (s. 283)" zuerst gegebenen Beziehung 2 im Texte aufgestellten Gleichheiten 1 ergeben sich aus den Dreiecken A B G, B G D und F C D, F C E nach 103 und 283 ohne Schwierigkeit: Bezeichnen nämlich



e, b, e', b' die Einfalls- und Brechungswinkel an den beiden Linsenflächen, — φ und φ' aber die Winkel, welche r und R mit der Axe bilden, so hat man

$$\begin{array}{ll}
\text{Sin}\,\varphi : \text{Sin}\,e = AB : AG & \qquad \text{und} \qquad \text{Sin}\,e' : \text{Sin}\,\varphi' = FD : CD \\
\text{Sin}\,b : \text{Sin}\,\varphi = GD : BD & \qquad\qquad\qquad \text{Sin}\,\varphi' : \text{Sin}\,b' = CE : FE \\
\text{Sin}\,e : \text{Sin}\,b = n : 1 & \qquad\qquad\qquad \text{Sin}\,b' : \text{Sin}\,e' = n : 1 \\
\hline
n . AB . GD = AG . BD \;\times & \qquad\qquad\qquad n . FD . CE = CD . FE \;\times
\end{array}$$

und, wenn der Strahl die Linse in der Distanz $h = a . \varrho$ von der Axe passirt, sehr nahe

$$AB = \sqrt{h^2 + \left(a + \frac{h^2}{2r}\right)^2} = a\left(1 + \frac{a+r}{2r}\varrho^2\right) \quad , \quad AG = a + r$$

$$BD = \sqrt{h^2 + \left(x + d - \frac{h^2}{2r}\right)^2} = a\left(\frac{x+d}{a} - \frac{x+d-r}{2r(x+d)} a\varrho^2\right), \quad GD = x + d - r$$

$$CE = \sqrt{h^2 + \left(\alpha + \frac{h^2}{2R}\right)^2} = a\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha+R}{2\alpha R} a\varrho^2\right) \quad , \quad FD = R + x$$

$$CD = \sqrt{h^2 + \left(x + \frac{h^2}{2R}\right)^2} = a\left(\frac{x}{a} + \frac{x+R}{2xR} a\varrho^2\right) \quad , \quad FE = R + \alpha$$

folglich

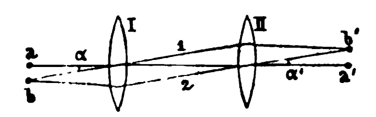
$$n\left(1 + \frac{a+r}{2r}\varrho^2\right)(x + d - r) = (a + r)\left(\frac{x+d}{a} - \frac{x+d-r}{2r(x+d)} a\varrho^2\right)$$

$$n(R + x)\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha+R}{2\alpha R} a\varrho^2\right) = (R + \alpha)\left(\frac{x}{a} + \frac{x+R}{2xR} a\varrho^2\right)$$

woraus bei Vernachlässigung von ϱ und d

$$x = \frac{a n r}{a(n-1) - r} \qquad \alpha = \frac{x R}{x(n-1) + nR} = \frac{a r R}{a(n-1)(r+R) - rR}$$

oder die 1 folgen, aus denen hervorgeht, dass wenn die **Gegenstandsweite** a von ∞ bis auf die **Brennweite** p abnimmt, die **Bildweite** von p bis ∞ zunimmt. — Vom Brennpuncte kommende Strahlen treten aus einer Linse parallel aus, und wenn sie somit auf eine zweite Linse derselben Axe fallen, so vereinigen sie sich in ihrem Brennpuncte neuerdings. Diese Eigenschaft, die bewirkt, dass man mit einem Fernrohr in ein anderes Fernrohr hineinsehen kann, benutzte **Gauss** (vergl. Astron. Nachr. 1824, Nr. 43) in folgender Weise, um Fadendistanzen (vergl. 340) direct zu messen: Er beleuchtete die zu messenden Faden, indem er das Ocular des



sie enthaltenden Fernrohrs gegen den hellen Himmel richtete, stellte dann dem betreffenden Objective I das Objectiv II eines Theodoliten gegenüber, sah so die Faden a und b in a' und b', und mass nun den wegen 1 || 2 der Fadendistanz α gleichen Winkel α' in gewöhnlicher Weise. Auf entsprechende Art kann man die Durchmesser von Kreismikrometern (s. 347), etc., bestimmen, — ferner, wie schon 1769 **Lambert** in einem Briefe an Brander hervorhob, und dann wieder David **Rittenhouse** (Germantown bei Philadelphia 1732 — Philadelphia 1796; Uhrmacher und Mechaniker in Philadelphia, später Münzmeister der Vereinigten Staaten) betont haben soll, ein künstliches Signal in der Nähe erhalten, das sich wie ein unendlich Fernes verhält (vergl. 290, 330), — etc. — Während bei Aufstellung der Formeln 1 die Dicke d der Linse vernachlässigt wurde, so kann man, ohne diess nöthig zu haben, für eine Linse, ja für ein ganzes System brechender Flächen, ganz ebenso einfache Gesetze erhalten, wenn man folgenden, von **Gauss** in seiner Abhandlung „Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841 in 4." vorgezeichneten

der in die Linse fallende Theil d der Axe … *des Radius* r
der Dicke **Mittelpunct** der Linse. Bes… *Strahl durch*
exponenten, so erhält man unter An… $(x - N) + b$ **3**
Strahl einen kleinen Winkel mit de… *enen Strahl aber durch*
strahl sei, und d vernachlässigt w… $= \frac{\beta'}{n'}(x - N) + b'$ **4**

$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$ oder … n und n' die Brechungs-

wo $\frac{1}{p} = \ldots$ nten der beiden Mittel, β aber, da nur Centralstrahlen …tracht fallen, kleine Grössen

Es gilt also für die … tand des Punctes N von irgend
Hohlspiegel (285), … te bezeichnen soll. Für P ist
nungen dar. — S… $r(1 - \mathrm{Cos}\,\theta)$
in einen negati… kleine Grösse der ersten Ordnung zu betrachten,
sich das Ges… und 4
die Brennw… $\ldots \mathrm{Cos}\,\theta) + b = r \cdot \frac{\beta'}{n'}(1 - \mathrm{Cos}\,\theta) + b'$ oder $b = b'$
und con…
Bestre… *auf Grössen* dritter Ordnung genau. Nun hat man aber einerseits
die …

$$\frac{MQ'}{MQ} = \frac{MQ' : r}{MQ : r} = \frac{\mathrm{Sin}\,MPQ' : \mathrm{Cos}\,\lambda'}{\mathrm{Sin}\,MPQ : \mathrm{Cos}\,\lambda} = \frac{n\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{n'\,\mathrm{Cos}\,\lambda'}$$

(c…

und anderseits nach 3 und 4, da $M - N = r$

$$\frac{MQ'}{MQ} = \frac{(\beta' r : n') + b'}{(\beta r : n) + b} \quad \text{also} \quad b' + \frac{\beta' r}{n'} = \frac{n\,\mathrm{Cos}\,\lambda}{n'\,\mathrm{Cos}\,\lambda'}\left(b + \frac{\beta r}{n}\right)$$

oder, da λ und λ' kleine Grössen sind, ebenfalls bis auf Grössen dritter Ordnung genau

$$\beta' = \frac{nb + \beta r}{r}\left(1 + \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{2}\right) - \frac{n'b'}{r} = \beta - \frac{n' - n}{r} \cdot b \qquad \mathbf{5}$$

Sind mehrere, z. B. vier, brechende Flächen, und bezeichnen N^0, N', N'', N^* ihre Durchschnittspuncte mit der Axe, — M^0, M', M'', M^* ihre Mittelpuncte, — n^0, n', n'', n''', n^* aber die Brechungsexponenten, so kann man entsprechend 3 und 4 den einfallenden Strahl und die successiven gebrochenen Strahlen durch

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - N^0) + b^0$$

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - N^0) + b^0 = \frac{\beta'}{n'}(x - N') + b'$$

$$y = \frac{\beta''}{n''}(x - N') + b' = \frac{\beta''}{n''}(x - N'') + b'' \qquad \mathbf{6}$$

$$y = \frac{\beta'''}{n'''}(x - N'') + b'' = \frac{\beta'''}{n'''}(x - N^*) + b^*$$

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*$$

darstellen, wo, wenn zur Abkürzung

$$\frac{N' - N^0}{n'} = t' \qquad \frac{N'' - N'}{n''} = t'' \qquad \frac{N^* - N''}{n'''} = t^*$$

$$\frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} = u^0 \qquad \frac{n'' - n'}{N' - M'} = u' \qquad \frac{n''' - n''}{N'' - M''} = u'' \qquad \frac{n^* - n'''}{N^* - M^*} = u^* \qquad \mathbf{7}$$

gesetzt werden, mit Hülfe von 5 die Beziehungen

$$\beta' = \beta^0 + u^0 b^0 \qquad \beta'' = \beta' + u' b' \qquad \beta''' = \beta'' + u'' b'' \qquad \beta^* = \beta''' + u^* b^*$$
$$b' = b^0 + \beta' t' \qquad b'' = b' + \beta'' t'' \qquad b^* = b'' + \beta''' t^*$$

statt haben, aus denen durch successive Elimination

$$b^* = g \, . \, b^0 + h \, . \, \beta^0 \qquad \beta^* = k \, . \, b^0 + l \, . \, \beta^0 \qquad 8$$

folgen, und

$$\begin{aligned} g = {} & 1 + u^0 (t' + t'' + t^*) + u' (t'' + t^*) + u'' t^* + u^0 u' (t' t'' + t' t^*) + \\ & + u^0 u'' (t' t^* + t'' t^*) + u' u'' t'' t^* + u^0 u' u'' t' t'' t^* \\ h = {} & t' + t'' + t^* + u' (t' t'' + t' t^*) + u'' (t' t^* + t'' t^*) + u' u'' t' t'' t^* \\ k = {} & u^0 + u' + u'' + u^* + u^0 u' t' + u^0 u'' (t' + t'') + u^0 u^* (t' + t'' + t^*) + \\ & + u' u'' t'' + u' u^* (t'' + t^*) + u'' u^* t^* + u^0 u' u'' t' t'' + \\ & + u^0 u' u^* (t' t'' + t' t^*) + u^0 u'' u^* (t' t'' + t'' t^*) + u' u'' u^* t'' t^* + \\ & + u^0 u' u'' u^* t' t'' t^* \\ l = {} & 1 + u' t' + u'' (t' + t'') + u^* (t' + t'' + t^*) + u' u'' t' t'' + \\ & + u' u^* (t' t'' + t' t^*) + u'' u^* (t' t^* + t'' t^*) + u' u'' u^* t' t'' t^* \end{aligned} \qquad 9$$

ist, so dass

$$g l - h k = 1 \qquad 10$$

wird, und somit die 8 durch

$$b^0 = l \, . \, b^* - h \, . \, \beta^* \qquad \beta^0 = - k \, . \, b^* + g \, . \, \beta^* \qquad 11$$

ersetzbar sind. Es ist dabei zu bemerken, dass 8, 10 und 11 nicht nur für vier, sondern für jede beliebige Anzahl von brechenden Flächen bestehen, und von **Gauss** in der erwähnten Abhandlung unter Anwendung einiger durch **Euler** in Bd. 9 der Comm. nov. Petrop. erwiesenen Relationen, welche ich aber hier nicht voraussetzen wollte, auch allgemein erwiesen wurden. — Sind ξ und η die Coordinaten eines gegebenen Punctes P im einfallenden Strahle, so hat man nach 6[1] und 11

$$\eta = \frac{g\beta^* - kb^*}{n^0} (\xi - N^0) + l b^* - h \beta^* \quad \text{oder} \quad b^* = \frac{n^0 \eta + [n^0 h - g (\xi - N^0)] \beta^*}{n^0 l - k (\xi - N^0)} \qquad 12$$

wofür, wenn man

$$N^* - \frac{n^0 h - g (\xi - N^0)}{n^0 l - k (\xi - N^0)} \, . \, n^* = \xi^* \qquad \frac{n^0 \eta}{n^0 l - k (\xi - N^0)} = \eta^* \qquad 13$$

setzt, die letzte 6 in

$$y = \frac{\beta^*}{n^*} (x - \xi^*) + \eta^* \qquad 14$$

übergeht, womit bewiesen ist, dass ein Punct P^* der Coordinaten ξ^* und η^* in dem letztaustretenden Lichtstrahle liegt. Da ferner ξ^* und η^* nur von ξ und η, nicht auch von β^0, abhängig sind, so bleiben sie für alle durch P einfallenden Strahlen dieselben, oder es gehen alle von P kommenden Strahlen nach der letzten Brechung durch P^*, so dass man P^* als das **Bild** von P betrachten kann. — Ersetzt man die erste und letzte 6 durch

$$y = \frac{\beta^0}{n^0} (x - Q) + B \qquad \text{und} \qquad y = \frac{\beta^*}{n^*} (x - Q^*) + B^* \qquad 15$$

so ist

$$b^0 = B + \theta \, . \, \beta^0 \qquad B^* = b^* + \theta^* \beta^* \qquad \text{wo} \qquad \theta = \frac{N^0 - Q}{n^0} \qquad \theta^* = \frac{Q^* - N^*}{n^*} \qquad 16$$

also mit Hülfe von 8

$$B^* = G \, . \, B + H \, . \, \beta^0 \qquad \beta^* = K \, . \, B + L \, . \, \beta^0 \qquad 17$$

wo

$$G = g + k \, . \, \theta^* \qquad H = h + g\theta + k\theta\theta^* + l\theta^* \qquad K = k \qquad L = l + k\theta \qquad 18$$

Nimmt man z. B. statt Q und Q* zwei Puncte E und E* so an, dass

$$\theta = \frac{1-l}{k} \quad \text{oder} \quad E = Q = N^0 - \frac{n^0(1-l)}{k}$$
$$\theta^* = \frac{1-g}{k} \quad \text{oder} \quad E^* = Q^* = N^* + \frac{n^*(1-g)}{k} \qquad 19$$

also nach 18, mit Hülfe von 10,

$$G = 1 \qquad H = 0 \qquad K = k \qquad L = 1 \qquad 20$$

so entsprechen sich nach 15

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - E) + B \quad \text{und} \quad y = \frac{kB + \beta^0}{n^*}(x - E^*) + B \qquad 21$$

Nimmt man dagegen statt Q und Q* zwei Puncte F und F* so an, dass

$$\theta = \frac{-l}{k} \quad \text{oder} \quad F = Q = N^0 + \frac{l\,n^0}{k} = E + \frac{n^0}{k}$$
$$\theta^* = \frac{-g}{k} \quad \text{oder} \quad F^* = Q^* = N^* - \frac{n^* g}{k} = E^* - \frac{n^*}{k} \qquad 22$$

also nach 18, mit Hülfe von 10,

$$G = 0 \qquad H = -\frac{1}{k} \qquad K = k \qquad L = 0 \qquad 23$$

so entsprechen sich nach 15

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - F) + B' \quad \text{und} \quad y = \frac{kB'}{n^*}(x - F^*) - \frac{\beta^0}{k} \qquad 24$$

Legt man durch E eine brechende Fläche des Halbmessers $(n^0 - n^*) : k$, und denkt sich die n^0 und n^* entsprechenden Mittel direct an sie grenzend, so entsprechen sich nach 3, 4, 5

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - E) + B \quad \text{und} \quad y = \frac{kB + \beta^0}{n^*}(x - E) + B \qquad 25$$

als einfallender und gebrochener Strahl, und es ergibt somit die Vergleichung von 21 und 25 den merkwürdigen Satz, dass der letzte Weg eines durch verschiedene brechende Flächen und Medien aus einem Mittel in ein anderes Mittel gegangenen Strahles in Beziehung auf E* dieselbe Lage hat, wie ihn ein Strahl in Beziehung auf E hätte, wenn er direct aus dem ersten in das letzte Mittel durch die Eine brechende Fläche in E gegangen wäre. — In dem speciellen, aber besonders wichtigen Falle, wo $n^0 = n^*$ und daher Vorstehendes unzulässig, wollen wir in E eine unendlich dünne Linse der Brennweite $-n^0 : k$ annehmen. Sollen sich an derselben

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - E) + B \quad \text{und} \quad y = \frac{\beta''}{n^*}(x - E) + B' \qquad 26$$

als einfallender und ausfallender Strahl entsprechen, so muss einerseits $B = B'$ sein, da die für $x = E$ aus den beiden Gleichungen hervorgehenden Werthe übereinstimmen müssen; anderseits geben die beiden Gleichungen, wenn a und α entsprechend wie im Texte Gegenstandsweite und Bildweite bezeichnen, für $y = 0$

$$a = E - x = \frac{B n^0}{\beta^0} \qquad \alpha = x - E = -\frac{B' n^*}{\beta''} = -\frac{B n^0}{\beta''}$$

so dass nach 1

$$\frac{\beta^0}{B \cdot n^0} - \frac{\beta''}{B \cdot n^0} = -\frac{k}{n^0} \quad \text{oder} \quad \beta'' = k \cdot B + \beta^0 \qquad 27$$

Substituirt man diesen Werth in 26[2] und vergleicht mit 21[2], so ergibt sich, dass der nach einer gewissen Anzahl von Brechungen in das erste Mittel zurückkehrende Strahl gegen E* genau so liegt, wie ein nur durch die an-

gegebene Linse gegangener Strahl gegen E. Diese beiden merkwürdigen Puncte E und E* hat Gauss **Hauptpuncte** genannt, — und da für $\xi = E$ mit Benutzung von 10 und 19 aus 13 sich $\xi^* = E^*$ und $\eta^* = \eta$ ergibt, so ist einerseits der zweite Hauptpunct das Bild des ersten, und anderseits, wenn man durch E und E* senkrecht zur Axe Ebenen legt, so hat jeder Punct der ersten Ebene sein Bild in dem entsprechenden Puncte der zweiten. — Für alle aus dem Puncte F einfallenden Strahlen müssen sich $x = F$ und $y = 0$ entsprechen; folglich ist für sie nach 24 immer $B' = 0$, während die austretenden Strahlen die Gleichung $y = -\beta^0 : k$ haben, also parallel zur Axe sind. Umgekehrt ist für alle parallel einfallenden Strahlen $\beta^0 = 0$, also haben die austretenden Strahlen die Gleichung $y = k B'(x - F^*) : n^*$, oder gehen durch F*. Man kann daher F und F* mit Gauss passend **Brennpuncte** des Systemes heissen; ferner haben die in diesen Puncten zur Axe senkrechten Ebenen nach 24 die Eigenschaft, dass alle von irgend einem Puncte der ersten Ebene ausgehenden Strahlen parallel unter sich (aber nur für F mit der Axe) austreten, — und alle parallel unter sich einfallenden Strahlen sich nach der Brechung in einem bestimmten Puncte der zweiten Ebene vereinigen. — Ist $n^0 = n^*$ und setzt man mit Hülfe von 22, 18, 19, 10

$$p = E - F = F^* - E^* = -\frac{n^0}{k} \qquad a = E - \xi$$

$$\alpha = \xi^* - E^* = \xi^* - N^* + N^* - E^* =$$

$$= -\frac{n^0 . h - g(\xi - E + E - N^0)}{n^0 . 1 - k(\xi - E + E - N^0)} n^0 - \frac{1-g}{k} n^0 = \frac{a p}{a - p}$$

so besteht somit die 2 analoge Beziehung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \qquad 28$$

d. h. noch bei einem Systeme von Linsen und ohne Vernachlässigung ihrer Dicke besteht die einfache Beziehung, dass die Summe der Reciproken von Gegenstandsweite und Bildweite gleich der Reciproken der Brennweite ist, wenn man nur diese drei Grössen von den Hauptpuncten aus rechnet. — Schliesslich mag noch angeführt werden, dass man zuweilen nach dem Vorschlage von Joh. Benedict **Listing** (Frankfurt 1808; Professor der Physik in Göttingen) in dem Falle, wo n^0 und n^* ungleich sind, noch zwei sog. **Knotenpuncte**

$$K = E + \frac{n^0 - n^*}{k} \qquad K^* = E^* + \frac{n^0 - n^*}{k} \qquad 29$$

benutzt; für $n^0 = n^*$ fallen sie offenbar mit den Hauptpuncten zusammen.

290. Weitere Gesetze. Um die Brennweite P einer Sammellinse zu finden, misst man die Bildweite eines sehr entfernten Gegenstandes, z. B. der Sonne. Ist dieselbe sehr gross, oder handelt es sich um die Brennweite einer Zerstreuungslinse, so verbindet man sie mit einer Sammellinse von kleiner Brennweite p, und misst die Brennweite π der Verbindung; denn, da in diesem Falle für die Hülfslinse der Gegensatz von P als Gegenstandsweite zu betrachten ist, so hat man (289 : 1)

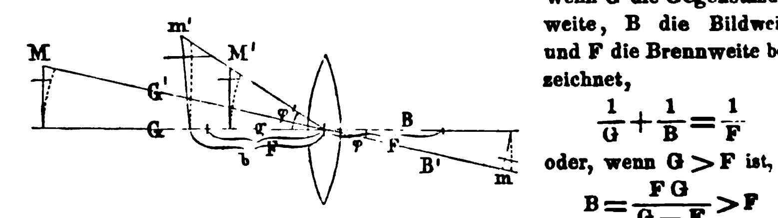
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{-P} = \frac{1}{p} \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{Pp}{P+p} \quad \text{oder} \quad P = \frac{p\pi}{p-\pi} \qquad 1$$

Erzeugen die verbundenen Linsen von einem Gegenstande der Distanz a ein Bild in der Distanz α, so hat man somit

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\pi}=\frac{1}{p}+\frac{1}{P} \quad \text{oder} \quad P=\frac{a\alpha p}{ap+\alpha p-a\alpha} \qquad 2$$

und hieraus folgt, dass für $P=a$ auch $p=\alpha$ wird, oder dass für $P=a$ der Gegenstand mit der Hülfslinse wie ein unendlich ferner Gegenstand gesehen wird.

Das durch eine Linse von einer Ebene erzeugte Bild ist strenge genommen eine krumme Fläche: Haben wir nämlich eine biconvexe Linse, so ist nach 289:1, wenn G die Gegenstandsweite, B die Bildweite und F die Brennweite bezeichnet,



$$\frac{1}{G}+\frac{1}{B}=\frac{1}{F}$$

oder, wenn $G>F$ ist,

$$B=\frac{FG}{G-F}>F \qquad 3$$

Ist $G'>G$, so findet man somit die entsprechende Bildweite

$$B'=B+F\left(\frac{G'}{G'-F}-\frac{G}{G-F}\right)=B-F^2\frac{G'-G}{(G'-F)(G-F)}<B \qquad 4$$

d. h. wenn sich der Gegenstand von der Linse entfernt, so nähert sich das Bild derselben. In dem speciellen Falle, wo $G'=G\,.\,\mathrm{Sec}\,\varphi$ dem Puncte M entspricht, ist somit ebenfalls für sein Bild m nothwendig $B'<B$, während für ein gerades Bild $B'=B\,.\,\mathrm{Sec}\,\varphi>B$ sein müsste. Sollte das Bild gerade werden, so müsste der Gegenstand umgekehrt gegen die Linse zu concav sein. Wird die Gegenstandsweite $g<F$, so wird b negativ, und man hat entsprechend 3 und 4, wenn wieder $g'>g$

$$b=\frac{Fg}{F-g}>g \quad \text{und} \quad b'=b+F^2\frac{g'-g}{(F-g)(F-g')}>b \qquad 5$$

d. h. das fingirte Bild entfernt sich mit dem Gegenstande. In dem speciellen Falle, wo $g'=\mathrm{Sec}\,\varphi'$ dem Puncte M' entspricht, ist somit für sein Bild m' ebenfalls nothwendig $b'>b$, und zwar ist nach 5 sogar, sobald noch $g'<F$,

$$b'=b\,\mathrm{Sec}\,\varphi'+\frac{Fg\,\mathrm{Sec}\,\varphi'}{F-g\,\mathrm{Sec}\,\varphi'}-\frac{Fg\,\mathrm{Sec}\,\varphi'}{F-g}=$$

$$=b\,\mathrm{Sec}\,\varphi'+Fg^2\,\mathrm{Sec}\,\varphi'\frac{\mathrm{Sec}\,\varphi'-1}{(F-g)(F-g\,\mathrm{Sec}\,\varphi')}>b\,\mathrm{Sec}\,\varphi' \qquad 6$$

so dass das Bild sogar hinter die Gerade zurückgebogen wird. Sollte das Bild gerade werden, so müsste der Gegenstand wieder gegen die Linse hin concav sein. Wird somit das durch eine Sammellinse construirte Bild durch eine Loupe betrachtet, so häufen sich die Deformationen, und sie können namentlich bei nahen Gegenständen störend werden, wofür z. B., ausser auf die schon in 255 angeführte Schrift von **Place**, auf „Pieter **Harting** (Rotterdam 1812; Professor der Chemie, Botanik, etc. in Franeker und Utrecht), Het Mikroskoop, deszelfs gebruik, geschiedenis en tegenwoordige toestand. Utrecht 1848—1850, 3 Th. in 8. (Deutsch von F. W. Theile, Braunschweig 1859), — Carl **Kellner** (Hirzenhayner Eisenhütte in Hessen 1826 — Wetzlar 1855; Opticus in Wetzlar), Das orthoskopische Ocular, eine neu erfundene

achromatische Linsencombination, welche dem Fernrohr und Mikroskop bei einem sehr grossen Gesichtsfeld ein vollkommen ungekrümmtes, perspectivisch richtiges, seiner ganzen Ausdehnung nach scharfes Bild ertheilt, sowie auch den blauen Rand des Gesichtsfeldes aufhebt. Braunschweig 1849 in 8., — etc." zu verweisen ist. — Vernachlässigt man in 289 : 2 die Dicke d, und bezeichnet durch

$$x_0 = \frac{a n r}{a(n-1) - r} \qquad \alpha_0 = \frac{x_0 R}{x_0 (n-1) + n R} \qquad 7$$

die Werthe, welche x und α für $\varrho = 0$ oder für Centralstrahlen annehmen, und setzt in 289 : 2

$$x = x_0 + \Delta x \qquad \alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha \qquad 8$$

dabei jedoch die zweiten und höhern Potenzen von Δx und $\Delta \alpha$, sowie ihre Producte unter sich und mit ϱ^2 vernachlässigend, so ergeben sich unter Benutzung von 7

$$\Delta x = -\frac{a^2 (a+r)(x_0 - r) + n a x_0 (x_0 - r)(a+r)}{2 r x_0 (n a - a - r)} \varrho^2 =$$

$$= -\frac{(a + x_0)^2 (a + n x_0)}{2 a x_0 (n-1)^2} \varrho^2 \qquad 9$$

$$\Delta \alpha = \frac{n \alpha_0^2}{x_0^2} \cdot \Delta x + \frac{a^2 n (x_0 - \alpha_0)^2 (\alpha_0 - n x_0)}{2 \alpha_0 x_0^3 (n-1)^2} \varrho^2 =$$

$$= -\frac{h^2 \alpha_0^2 n}{2 x_0^3 (n-1)^2} \left[\frac{(a + x_0)^2 (a + n x_0)}{a^2} - \frac{(x_0 - \alpha_0)^2 (\alpha_0 - n x_0)}{\alpha_0^3} \right] =$$

$$= -\frac{h^2 \alpha_0^2 n}{2 (n-1)^2} \left[\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{n}{a}\right) - \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{x_0}\right)^2 \left(\frac{1}{x_0} - \frac{n}{\alpha_0}\right) \right] \qquad 10$$

oder endlich, wenn man in der Klammer

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{p}$$

absondert, und schliesslich nach 289

$$\frac{1}{\alpha_0} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{a} \qquad \frac{1}{x_0} = \frac{n-1}{n r} - \frac{1}{n a}$$

setzt,

$$\Delta \alpha = -\frac{h^2 \alpha_0^2 n}{2 p (n-1)^2} \left[\frac{n}{a^2} - \frac{n}{a \alpha_0} + \frac{n}{\alpha_0^2} + \frac{2+n}{x_0^2} + \frac{1+2n}{x_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha_0}\right) \right]$$

$$= -\frac{h^2 \alpha_0^2}{2 n p} \left[A - \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} \right] \qquad 11$$

wo

$$A = \frac{n^3 - 2n^2 + 2}{r^2} + \frac{2n^3 - 2n^2 - n}{r R} + \frac{n^3}{R^2}$$

$$B = \frac{3n^2 - 3n - 4}{r} + \frac{3n^2 + n}{R} \qquad C = 3n + 2 \qquad 12$$

Ist h gleich der halben Oeffnung der Linse, so stellt $\Delta \alpha$ die sog. **sphärische Längenabweichung** vor, welche somit dem Quadrate der Oeffnung und dem Quadrate der Bildweite direct, der Brennweite umgekehrt proportional ist. Ihr entspricht (analog 285), wenn ψ den Winkel des austretenden Strahles mit der Axe bezeichnet, eine **Seitenabweichung**

$$\Delta \beta = \Delta \alpha \cdot \operatorname{Tg} \psi \qquad \text{oder nahe} \qquad \Delta \beta = \frac{h \cdot \Delta \alpha}{\alpha_0} \qquad 13$$

Für parallel einfallendes Licht ist $a = \infty$ und $\alpha_0 = p$, also wird

$$\Delta \alpha = -\frac{h^2 p A}{2 n} \qquad \Delta \beta = -\frac{h^3 A}{2 n} \qquad 14$$

Berechnet man für eine Folge von Werthen von h je die $\Delta\alpha$, so bestimmen diese die Folge der austretenden Strahlen, und diese stellen in ihren Durchschnitten die sog. **Diacaustica** dar, für welche aber auf die in 285 citirten Specialschriften verwiesen werden muss.

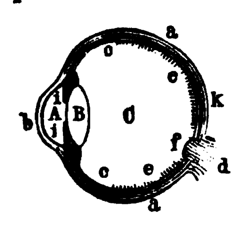
291. Camera obscura und Auge. Entwirft man in einem dunkeln Raume mit Hülfe einer Sammellinse ein Bild eines äussern Gegenstandes, und fängt dieses auf einer Tafel auf, so hat man eine sog. Camera obscura eingerichtet. Besteht die Tafel aus einer mit Joddämpfen beschlagenen Silberplatte, so modificirt das Licht in wenig Secunden die Jodschichte so, dass die von ihm getroffenen Stellen Quecksilberdämpfe um so leichter condensiren, je stärker es war, wodurch sich ein Bild, ein sog. **Daguerreotyp,** erzeugt, das durch Abwaschen des Jods mit einer Lösung von unterschwefligsaurem Natron Dauer erhält oder **fixirt** wird, — besteht sie dagegen aus einer erst mit Jodkalium oder jodkalihaltigem Collodium überzogenen, dann in einer Lösung von salpetersaurem Silberoxyd oder Gallussäure gebadeten Glastafel, so wird diese durch das Licht so modificirt, dass beim Begiessen mit einer Lösung von Eisenvitriol jede Stelle um so dunkler wird, je kräftigeres Licht auf sie einwirkte, oder ein sog. **Negativ** entsteht, das in ähnlicher Weise fixirt wird, und nun, wenn das Tageslicht durch dasselbe auf mit Chlorsilber impregnirtes Papier fällt, auf letzterm mit Hülfe einiger untergeordneter Manipulationen eine sog. **Photographie** erzeugt. — Der Camera obscura entspricht das Auge, in welchem das durch die Krystall-Linse erzeugte Bild von der Netzhaut aufgefangen werden soll. Das Auge kann sich nun zwar, indem es mit Hülfe der innern Muskulatur die Form der Linse abändert, der Gegenstandsweite a etwas accomodiren; aber wenn diese, um den Sehwinkel hinlänglich gross zu machen, kleiner als die sog. **Sehweite** h werden muss, so erfordert es zur Hülfe eine Sammellinse der Brennweite $p < h$, um die Bildweite wieder auf $(-h)$ zu reduciren. Da somit (289)

$$\frac{1}{-h} + \frac{1}{a} = \frac{1}{p} \qquad \text{oder} \qquad \frac{h}{a} = 1 + \frac{h}{p} = m$$

und sich kleine Winkel wie ihre Tangenten verhalten, so ist der Sehwinkel mit Hülfe der Linse m-mal vergrössert worden, und diese heisst darum **Vergrösserungsglas** oder **Loupe.**

Die **Camera obscura** wird gewöhnlich als eine Erfindung von Giambattista della **Porta** (Neapel 1538 — Neapel 1615; wohlhabender, meist auf Reisen lebender Edelmann) betrachtet, der sie in seiner „Magia naturalis sive de miraculis rerum naturalium libri IV. Neapolis 1558 in fol. (Neue Aufl. 1589; deutsch, Nürnberg 1713)“ beschrieb, — jedoch soll sie schon spätestens **Leonardo da Vinci** (Vinci bei Florenz 1452 — Cloux bei Amboise 1519;

Maler, Bildhauer und Physiker) gekannt haben. — Als erster Erfinder der Daguerreotypie ist Joseph-Nicéphore **Nièpce** (Châlons-sur-Saône 1[illegible] — Gras bei Châlons 1833; Cavallerie-Officier) zu betrachten, da seine Versuche bis zum Jahre 1814 hinaufreichen, und er schon 1827 der Roy. Society Bilder auf Metall übergab; **Daguerre**, dessen Hauptverdienst darin besteht, das Verfahren vervollkommnet und in eigentlichen Gebrauch eingeführt zu haben, war schon 1826 und dann durch gerichtlichen Act 1829 mit ihm in Verbindung gekommen. Die Photographie auf Papier will William Henry Fox **Talbot** (Lacock Abbey in Wiltshire 1800; reicher Privatmann) schon 1834 erfunden haben; jedoch theilte er sein Verfahren erst in der Schrift „Some account of the art of photogenic drawing. London 1839 in 4." öffentlich mit; über die seitherige Ausbildung der Photographie muss auf die Specialwerke „Adam Georg **Martin** (Wien 1812; Bibliothekar des Wiener-Polytechnikums), Repertorium (später Handbuch) der Photographie. Wien 1846 in 12. (6 A. 1865 in 8.), — D. van **Monckhoven** in Gand: Traité général de photographie. Paris 1856 in 8. (5. éd. 1865), — Photographische Mittheilungen. Zeitschrift des Vereins zur Förderung der Photographie. Berlin 1865—1870, 6 Bde. in 8., — Hermann **Vogel** (Dobrilugk in der Niederlausitz 1834; Lehrer der Photographie an der k. Gewerbeacademie in Berlin), Lehrbuch der Photographie. Abth. 1—2. Berlin 1867—1868 in 8., — etc." verwiesen werden. — Der Augapfel ist von der undurchsichtigen **harten Haut** (Sclerotica) a umschlossen, welche nach vorn in die stärker gewölbte und durchsichtige **Hornhaut** (Cornea) b übergeht, und im Innern mit der, aus zahllosen Blutgefässchen zwischen dunkeln Pigmentzellen bestehenden, **Aderhaut** (Chorioïdea) c bekleidet ist, an welche sich die ein Diaphragma bildende **Regenbogenhaut** (Iris) i anschliesst; hinten in den Augapfel bei d endlich tritt der Sehnerv ein, und breitet sich in die **Netzhaut** (Retina) e aus. Der Raum A zwischen der, zwiebelartig aus nach Innen immer dichter werdenden Schaalen gebildeten **Linse** (Crystallinum) B und der Hornhaut ist mit der **wässerigen Flüssigkeit** (Humor aqueus) erfüllt, — der Raum C hinter der Linse mit einer schleimigen Gallerte, der **Glasfeuchtigkeit** (Humor vitreus). Die Empfindlichkeit der Netzhaut ist beim sog. **gelben Fleck** (Macula lutea) k am stärksten, — an der Eintrittsstelle des Nervs, dem Mariotte'schen Fleck f, verschwindend klein. — Mit der gleichzeitigen Benutzung beider Augen hängt das Körperlich-Sehen zusammen, wie man sich überzeugen kann, wenn man jedem derselben eine ihm entsprechende (also bei Pupillendistanz 60^{mm} und Gegenstandsweite 250^{mm} um 2. Arc Sin (30 : 250) = circa 15° von der andern abweichende) ebene Darstellung eines Gegenstandes unterbreitet. Das zu letzterm Zwecke dienende **Stereoskop** wurde 1838 von Charles **Wheatstone** (Gloucester 1802; früher musikal. Instrumentenmacher, später Professor der Physik, jetzt Privatmann in London) erfunden; vergl. darüber „**Brewster**, On the Stereoscope, its history, theory and construction. London 1856 in 8., — A. **Steinhauser**, Professor der Mathematik in Wiener-Neustadt: Ueber die geometrische Construction der Stereoscopbilder. Graz 1870 in 8., — etc."



292. Das Mikroskop. Jedes Instrument, das, wie die Loupe, dazu dient, einen kleinen nahen Gegenstand unter einem grösseren

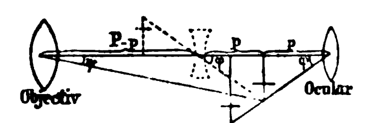
Gesichtswinkel zu zeigen, heisst **Mikroskop.** Beim gewöhnlichen Mikroskope wird mit einer Sammellinse, dem sog. **Objective,** von dem Gegenstande g ein reelles Bild b erzeugt, und dieses mit einer Loupe, dem sog. **Oculare,** betrachtet; seine Vergrösserung wird gewöhnlich bestimmt, indem man ein Mikrometer als Object unterlegt, und mit einem in der Sehweite angebrachten Maassstabe vergleicht. Da man das Objectiv g bis auf die Brennweite nähern, und dadurch b, wegen $b:g=\alpha:a$ und (289:1), bis in's Unendliche entfernen und vergrössern kann, so ist es möglich, durch einen blossen gleichzeitigen Auszug der Ocularröhre entweder nur irgend eine stärkere Vergrösserung zu erhalten, oder den Werth eines Umganges einer, mit dem im Brennpuncte stehenden Fadennetze verbundenen Mikrometerschraube mit einer als Object unterlegten Theilung (s. 327) in Einklang zu bringen. — Beim **Sonnenmikroskope** wird der mit einer Sammellinse beleuchtete Gegenstand vor den Brennpunct einer zweiten Sammellinse gebracht, und das sehr vergrösserte Bild an einer weissen Wand aufgefangen.

Vergl. für das Mikroskop ausser den 290 angeführten Schriften „Carl **Nägeli** (Kilchberg bei Zürich 1817; Professor der Botanik in Freiburg, Zürich und München) und Simon **Schwendener** (Buchs im Rheinthal 1829; erst Assistent von Nägeli in München, dann Professor der Botanik in Basel), Das Mikroskop. Leipzig 1867 in 8.“, — für seine mit derjenigen des Teleskop's verwobene Geschichte, sowie für anderweitige Bestimmung der Vergrösserung 293. — Das **Sonnenmikroskop** soll 1710 durch den damals als Professor der Mathematik und Physik an der Ritteracademie zu Erlangen thätigen Arzt Theodor **Balthasar** erfunden worden sein. Als eine Abart desselben ist die sog. **Zauberlaterne** (laterna magica) zu betrachten, deren Erfindung man gewöhnlich dem Jesuiten Athanasius **Kircher** (Geysa bei Fulda 1601 — Rom 1680; Professor der Mathematik und der orientalischen Sprachen in Würzburg und Rom) zuschreibt.

293. Das Teleskop. Ein Instrument, das dazu dient, einen entfernten Gegenstand unter einem grössern Gesichtswinkel zu zeigen, heisst **Teleskop** oder **Fernrohr** (Tubus). Bei demselben wird mittelst einer Convexlinse (Refractor) oder einem Hohlspiegel (Spiegelteleskop) der Brennweite P von dem Gegenstande ein Bild entworfen, und dieses durch eine Loupe der Brennweite p betrachtet (astronomisches Fernrohr), so dass für sehr ferne Gegenstände die Länge des Fernrohrs gleich $P+p$ ist. Um die Gegenstände aufrecht zu sehen, wird entweder nicht das Bild selbst, sondern ein durch eine neue Convexlinse gebildetes verkehrtes Bild des Bildes betrachtet (Erdfernrohr), oder es werden die vom Objectiv kommenden Strahlen schon in der Distanz $P-p$, ehe sie sich zum Bilde vereinigt haben, mit einer concaven Linse der Brennweite p aufgefangen

(holländisches Fernrohr). — Bei dem astronomischen und holländischen Fernrohr kann man sehr nahe mit Hugens die sog. **Vergrösserung** $\varphi : \psi$ durch das Verhältniss P:p ersetzen, und dieses letztere beim astronomischen Fernrohr praktisch bestimmen, indem man das für ferne Gegenstände ajüstirte Fernrohr gegen den Himmel richtet, und die Durchmesser des ein- und austretenden Lichtzylinders vergleicht (v. 297). — Das Gesichtsfeld ist der Fläche des Oculars proportional, — die Helligkeit des Bildes, bei gleicher Vergrösserung, der Fläche des Objectives. Zur Vergleichung von Refractoren und Reflectoren ist zu beachten, dass nach Arago eine Linse nahe alles Licht durchlässt, während ein Spiegel nur etwa die Hälfte reflectirt.

Gewöhnlich wird angenommen, es habe um 1590 der Brillenmacher Zacharias **Jansen** in Middelburg das erste Mikroskop zusammengesetzt, und von Einigen wird die erste Erstellung des Fernrohrs ebenfalls ihm, von Andern dagegen seinem Handwerksgenossen Hans **Lippershey**, oder auch Jacob Adriaanzoon genannt **Metius** (Alkmaar 15.. — Alkmaar 1630?; Sohn und Bruder der beiden Adriaan in 122; Glasschleifer in Alkmaar), etc., zugeschrieben, vergl. ausser Wilde (283) z. B. „Pierre **Borel** (Castres in Languedoc 1620? — Paris 1689; königl. Leibarzt und Mitglied der Academie in Paris), De vero telescopii inventore. Hagæ 1655 in 4.“. Gewiss ist, seit dem von Gerhard **Moll** (Amsterdam 1785 — Amsterdam 1838; Professor der Mathematik und Physik zu Utrecht) publicirten „Geschiekundig Onderzoek naar de eerste Uitfinders der Verrekijkers (Verh. v. Nederl. Inst. 1831)“, dass **Lippershey** 1608 X 2 bei den Generalstaaten um ein Privilegium für ein aus Bergkrystall-Linsen zusammengesetztes Fernrohr einkam, — dass die ersten Fernröhren allgemein **holländische** hiessen, und die im Texte unter diesem Namen aufgeführte, jetzt fast nur noch in den Operngucker repräsentirte Construction hatten, — dass das von **Galilei** verfertigte Fernrohr, welches man noch gegenwärtig mit seinem zwei Zoll Durchmesser und vier Fuss Länge besitzenden Kartonrohr im Museum zu Florenz mit der Aufschrift „Tubum opticum vides, Galilei inventum, et opus quo solis maculas et extimos lunæ montes, et Jovis satellites, et novam quasi rerum universitatem primus dispexit A. D. 1609“ aufbewahren soll, eine Nachbildung des Holländischen war, — dass, während dieses Letztere (vergl. meinen Vortrag: „Die Erfindung des Fernrohrs und ihre Folgen für die Astronomie. Zürich 1870 in 8.“) mehr als ein glücklicher, vielleicht sogar durch Spielen von Kindern mit Linsen veranlasster **Fund** zu betrachten, die Grundidee zu unserm jetzigen astronomischen und terrestrischen, für alle ernstlichen Anwendungen ausschliesslich brauchbaren Fernrohr erst von **Keppler** in seiner Schrift „Dioptrice. Aug. Vind. 1611 in 4.“ gegeben wurde, und somit **er** eigentlich als wahrer **Erfinder** dieses wichtigen Hülfsapparates zu bezeichnen sein dürfte, — dass **Hugens**, um die Vergrösserung trotz der keine stärkern Loupen erlaubenden sphärischen und chromatischen Abweichung (290, 295) zu steigern, die Anwendung von Objectiven grosser Brennweite einführte, ja unter dem Namen



Luftfernröhren (Télescopes aériens) einzelne Instrumente construirte, bei denen Objective von hundert und mehr Fuss Focaldistanz verwendet, und sodann Objectiv und Ocular getrennt aufgestellt waren, — dass endlich **Newton**, im Glauben, es sei die Farbenzerstreuung bei jedem Körper seiner Brechung proportional, an der Möglichkeit verzweifelte, durch Combination von Linsen die chromatische Abweichung heben zu können, darum zu dem schon 1616 von **Zucchius** gemachten Vorschlage griff, der Objectivlinse einen Objectivspiegel zu substituiren, und so ein erstes brauchbares Spiegelteleskop erhielt, das die Roy. Society noch jetzt unter der Aufschrift „Invented by Sir Isaac Newton and made with his own hands in the Year 1671" besitzen soll. Für die weitern Fortschritte in der Construction des Teleskopes, an denen natürlich je auch das Mikroskop participirte, vergl. 295. — Berechnet man x aus

$$\frac{1}{P+p}+\frac{1}{x}=\frac{1}{p} \qquad \text{oder} \qquad x=p+\frac{p^2}{P} \qquad 1$$

so treffen sich offenbar nach 289 : 1 sämmtliche von der Mitte des Objectives kommende Hauptstrahlen in der Distanz x hinter dem Oculare, und man wird daher von dem dadurch bestimmten, sog. **Aug-Puncte** das ganze Gesichtsfeld am Besten übersehen. — Ist ferner d die Distanz des Oculares vom Objectivbilde, welche ein Auge der Sehweite h nöthig hat, um vom Augpuncte aus deutlich zu sehen, so ist nach 289 : 1

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{-(h-x)}=\frac{1}{p} \qquad \text{oder} \qquad d=p-\frac{p^2 P}{Ph-p^2} \qquad 2$$

so dass der Weitsichtigere eines grössern Auszuges bedarf. — Ist bei einem auf ferne Gegenstände ajüstirten Fernrohr $\triangle P$ der nöthige Auszug um einen Gegenstand der Distanz a deutlich zu sehen, so ist nach 289 : 1

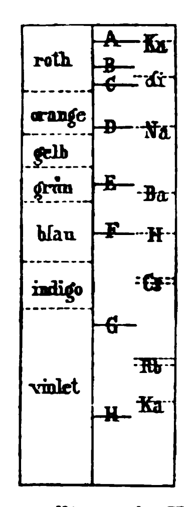
$$\triangle P=\frac{P^2}{a-P} \qquad \text{oder} \qquad a=P+\frac{P^2}{\triangle P} \qquad 3$$

so dass man a angenähert aus $\triangle P$ berechnen kann, und sich z. B. für $P=96''$ dd die Werthe $\triangle P=2'''$, $2''$, ... und $a=4616'$, $392'$, ... entsprechen. — Von den verschiedenen Versuchen, durch Zugabe weiterer Linsen das Fernrohr zu verkürzen, das Gesichtsfeld zu erweitern, die sphärische Abweichung und die Krümmung des Bildes (290) zu heben, etc., mag beispielsweise angeführt werden, dass **Hugens** vorschlug, einer planconvexen Augenlinse eine ebensolche, etwas innerhalb der Brennweite des Objectives stehende, sog. **Collectivlinse** beizugeben, so dass beide Linsen ihre convexe Seite dem Objective zukehren, — während **Ramsden** die Hülfslinse ausserhalb der Brennweite anbrachte, und die convexen Seiten einander zuwandte; ersteres Ocular, bei dem offenbar die Bildebene zwischen die beiden Linsen, oder in das Ocular fällt, heisst **negativ**. — Letzteres, das bei mikrometrischen Vorrichtungen vorgeschraubt, und somit unabhängig von denselben gewechselt werden kann, wird dagegen als **positiv** bezeichnet. — Zur leichtern Messung des austretenden Lichtzylinders, behufs der im Texte erwähnten Methode, die Vergrösserung zu bestimmen, hat **Adams** unter dem Namen **Auxometer** eine Art Loupe mit Theilung construirt, für welche auf „**Magellan**, De l'Auxomètre inventé par Mr. Adams (Journ. de phys. par Rozier 1783)" verwiesen werden kann, und die mit dem von **Ramsden** zu gleichem Zwecke empfohlenen **Dynamometer** ziemlich identisch ist.

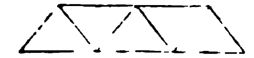
294. Das Spectrum. Lässt man durch eine enge Spalte Sonnenlicht auf ein Prisma fallen, und fängt sodann den gebrochenen Licht-

büschel mit einem weissen Schirme auf, so erhält man ein breites farbiges Bild oder **Spectrum**, das einerseits die sog. **Regenbogenfarben**: „Roth, orange, gelb, grün, blau (hellblau), indigo (dunkelblau), violet" zeigt, so dass das Sonnenlicht aus farbigen Strahlen besteht, deren Brechbarkeit von roth bis violet beständig zunimmt, — und anderseits eine Menge dunkler Querstreifen, die sog. **Fraunhofer'schen Linien**, deren hauptsächlichste (s. Fig. 1) mit den Buchstaben A bis H bezeichnet wurden. — Ferner ist durch die Untersuchungen von Brewster, Kirchhoff, etc. bekannt geworden, dass, wenn man in einer Flamme auch nur ganz kleine Mengen gewisser Salze (z. B. in einer Weingeistflamme etwas Kochsalz) verbrennt, das entstehende Spectrum aus einzelnen farbigen Linien (bei Kochsalz aus einer gelben Linie) besteht, — und dass, wenn man hinter diese Flamme eine Lichtquelle von höherer Temperatur und Intensität bringt, welche für sich ein continuirliches Spectrum gibt (z. B. ein durch ein Knallgasgebläse bis zur Weissgluth erhitztes Stückchen gebrannten Kalkes) das Spectrum der Flamme dadurch umgekehrt wird, d. h. die hellen Linien in dunkle verwandelt erscheinen. Man muss somit einerseits schliessen, dass die dunkeln Linien im Sonnenspectrum durch Umkehrung des Spectrums der Sonnenatmosphäre entstehen, und dass diese z. B. Kalium, Natrium und Hydrogen enthält, weil genau an der Stelle der diesen Stoffen entsprechenden Linien A, D und F dunkle Querstreifen gesehen werden, dagegen kein Lithium, Barium, Cæsium, Rubidium, etc., weil die diesen Stoffen entsprechenden Linien keine Repräsentanten unter den Fraunhofer'schen Linien besitzen, — und anderseits, dass drei Arten von Spectren zu unterscheiden sind: Das von undurchsichtigen, muthmasslich nur von festen oder flüssigen Körpern gelieferte **continuirliche Spectrum**, — das von gasförmigen Körpern gebildete **discontinuirliche Spectrum**, — und das sog. **Absorptions-Spectrum**, welches entsteht, wenn das an und für sich ein continuirliches Spectrum erzeugende Licht vor dem Eintritte in's Prisma durch Dämpfe einzelner Strahlen beraubt wird. — Endlich bleibt zu erwähnen, dass sich im Spectrum noch ausserhalb roth **Wärmestrahlen**, sowie ausserhalb violet **chemisch wirksame Strahlen** finden, und dass es wahrscheinlich zunächst letztere Strahlen sind, unter deren Einwirkung bei einzelnen Körpern (Fluorcalcium, schwefelsaures Chinin, etc.) momentan eine als **Fluorescenz** bezeichnete Lichterscheinung entsteht, während andere Körper (Diamant, Kalkspath, etc.) erst nach Entziehen des Lichtes leuchten oder **Phosphorescenz** zeigen.

Die Farbenzerstreuung durch Brechung oder die sog. **Dispersion** des Lichtes, wie sie z. B. in den Regenbogen und Höfen (s. 391) zu Tage tritt, war als Thatsache gewiss schon in den ältesten Zeiten bekannt; dagegen wurde sie erst von 1666 hinweg durch **Newton** (vergl. dessen Schrift in 283) gründlich untersucht, — das Licht gewissermassen mit Hülfe des Prisma's analysirt, und namentlich auch, indem der Schirm durchbrochen und hinter demselben ein zweites Prisma aufgestellt wurde, der Nachweis geleistet, dass jeder der durch das Prisma erhaltenen farbigen Strahlen sich nicht weiter auflöst oder **einfach** (homogen), der ursprüngliche Lichtstrahl aber aus Licht von verschiedener Brechbarkeit **zusammengesetzt** (heterogen) ist. — Die dunkeln Linien im Sonnenspectrum entdeckte eigentlich **Wollaston** zuerst, und beschrieb sie in seiner Abhandlung „A method of examining refractive and dispersive powers by prismatic reflection (Phil. Trans 1802)"; aber auch **Fraunhofer** entdeckte sie unabhängig, bestimmte sie zuerst genau nach ihrer Lage, zeigte ihre Verwendung, und seine Abhandlung über „Bestimmung des Brechungs- und des Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhren (Münchn. Denkschr. V für 1814—1815; franz. in Schumacher's astr. Abh., Heft II)" bildet die eigentliche Grundlage aller spätern Arbeiten. Auch scheint Fraunhofer der Erste gewesen zu sein, der im Sternlichte und bei verschiedenen Flammen eine andere Vertheilung der **dunkeln** Linien nachwies, — im elektrischen Lichte **helle** Linien bemerkte, — etc.



Während aber Fraunhofer ausser den in der Figur dargestellten acht Hauptlinien nur etwa 580 feinere Linien sah, unterschieden **Brewster** und Karl **Kuhn** (Cunreuth in Oberfranken 1816; Professor der Mathematik und Physik in München) mehr als 3000 solcher Linien, und bahnten überhaupt den Weg in dieses Gebiet der Optik, auf dem sodann **Bunsen** und ganz besonders **Kirchhoff** die übersichtlich im Texte mitgetheilten, wichtigen Resultate erhielten. Vergl. für weiteren Detail 296 und 448, sowie „**Mousson**, Résumé de nos connaissances sur le spectre (Bibl. univ. Arch. 1861), — **Kirchhoff**, Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Berlin 1862—1863, 2 Abh. in 4., — Andreas **Lielegg**, Lehrer der Chemie zu St. Pölten: Die Spectralanalyse. Weimar 1867 in 8., — Anders Jöns **Angström** (Medelpad 1814; Professor der Physik in Upsala), Recherches sur le spectre solaire. Berlin 1869 in 4. Atl. in fol., — Henry Enfield **Roscoe** (London 1833; Professor der Chemie in Manchester), Spectrum Analysis. London 1869 in 8., — Thomas Joseph Heinrich **Schellen** (Kevelaer bei Düsseldorf 1818; Director der Realschulen zu Münster und Cöln), Die Spectralanalyse in ihrer Anwendung auf die Stoffe der Erde und die Natur der Himmelskörper. Braunschweig 1870 in 8., — etc.". — Während **Fraunhofer** bei seinen ersten Versuchen einfach ein Fernrohr auf die Spalte ajüstirte, und dann ein Prisma vor das Objectiv setzte, wendet man jetzt eigens construirte **Spectroscope** an, von welchen z. B. das von Mechaniker **Hofmann** in Paris verfertigte, sehr beliebte Taschen-Spectroscop folgende Einrichtung hat: Das Prisma ist nach dem Vorgange



von Giovanni Battista **Amici** (Modena 1786; Professor der Mathematik zu Modena und Florenz), dessen Namen es auch trägt, entsprechend beistehender Figur, aus fünf Prismen zusammengesetzt, von denen das zweite und vierte aus Flintglas, die übrigen aus Crownglas bestehen, und deren Winkel so gewählt sind, dass die austretenden farbigen die Richtung der einfallenden Strahlen haben; es sitzt mitten in einem Rohr, — hat vor sich eine Sammellinse, und, um die Brennweite Letzterer weiter entfernt, die Spalte, so dass die divergirend einfallenden Strahlen parallel werden, — hinter sich ein gewöhnliches kleines, auf unendlich gestelltes Fernrohr. Für grössere Spectroscope, wie sie in den Laboratorien gebräuchlich sind, vergl z. B. das erwähnte Werk von Schellen, — für Sternspectroscope 448.

295. Der Achromatismus. Nach dem Durchgange durch eine Linse treffen sich die rothen Strahlen später als die violetten, — es zeigt sich die der Schärfe des Bildes schädliche sog. **chromatische** oder **Farbenabweichung**, die jedoch zum Glücke gehoben werden kann: Während nämlich bei Anwendung zweier gleicher Prismen, deren brechende Winkel eine verkehrte Lage haben, mit der Farbenzerstreuung gleichzeitig auch die Brechung gehoben wird, so gibt es dagegen auch Körper, welche bei nahe gleicher Brechung sehr verschieden zerstreuen. Lässt man z. B. einem Crownglasprisma von 25° ein verkehrt liegendes Flintglasprisma von 12° folgen, so wird die Zerstreuung, nicht aber die Brechung gehoben, und man hat ein **achromatisches** Prisma construirt. Analog kann man aus einer Convexlinse von Crownglas und einer Concavlinse von Flintglas eine achromatische Linse zusammensetzen.

Schon um 1733 gelang es einem Engländer **Chester**, Esquire of More-Hall in Essex, von dem schon durch David **Gregory** betonten Achromatismus des Auges ausgehend, einen kleinen Achroma'en darzustellen (s. Monthly Notices 28); aber es scheint sein Versuch vereinzelt und unbekannt geblieben zu sein. Erst als **Euler** neuerdings und wiederholt auf das Auge hingewiesen, und Samuel **Klingenstjerna** (Tollefors 1698 — Stockholm 1765; Professor der Mathematik zu Upsala und später Informator des schwedischen Kronprinzen; vergl. seine Vita in Nova Acta Upsal. 8) experimentel die Unrichtigkeit von Newton's Annahme (s. 293) nachgewiesen hatte, gelang es etwa 1757 John **Dollond** (Spitalfields bei London 1706 — London 1761; erst Seidenweber, dann Optiker) die eigentliche Fabrication von farbenfreien Fernröhren in's Leben zu rufen, welche sodann **Euler** in seiner Schrift „Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro. Petropoli 1762 in 4.“ wissenschaftlich behandelte. Als es sodann Pierre-Louis **Guinand** (Corbatière bei Chaux-de-Fonds 1748 — Corbatière 1824; von 1805—1814 im optischen Institute von Benedictbeuern mit der Glasfabrication betraut, und in dieser Richtung der Lehrer von Fraunhofer; vergl. Bd. 2 meiner Biographieen), später **Fraunhofer** selbst, Theodor **Daguet** (Vuippens im Canton Freiburg 1795 — Freiburg 1870; erst Apotheker, dann Flintglasfabricant in Solothurn und Freiburg), etc., nach und nach gelang, die anfänglich noch ziemlich im

Argen gelegene Flintglasfabrication zu vervollkommnen, begann entsprechend durch **Fraunhofer** und seinen, jetzt noch in einem Sohne Sigmund fortlebenden Nachfolger **Georg Merz** (Bichl bei Benedictbeuern 1793 — München 1867), welche die meisten der grossen Refractoren unserer Sternwarten erstellten, — durch Robert-Aglaé **Cauchoix** (Cormeilles-en-Parisis 1776 — Deuil bei Montmorency 1845; Optiker in Paris), der das Crownglas häufig durch Bergkristall ersetzte, — Simon **Plössl** (Wien 1794 — Wien 1868; Optiker in Wien), der sich besonders durch seine Dialyten und Feldstecher auszeichnete, — etc., die immer vorzüglichere Construction der Fernröhren, welcher wir uns gegenwärtig erfreuen. Während z. B. **Hugens** für seine Zeit etwas Ausgezeichnetes leistete, als er bei einem 12füssigen Fernrohr die Vergrösserung 50 erreichte, entsprechen sich jetzt etwa

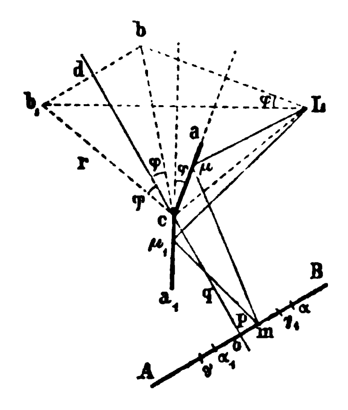
Oeffnung	24'''	37'''	52'''	6''	14''
Länge	24''	48''	6'	8'	21'
Vergrösserung	40	64—216	64—324	85—456	140—1200

Spiegelteleskope werden jetzt fast nur noch von Liebhabern, oder in Fällen construirt, wo kolossale Dimensionen verlangt werden: Das grosse Spiegelteleskop, welches sich Wilhelm **Herschel** (Hannover 1738 — Slough 1822; erst Musiklehrer, dann Privatastronom Georg III. von England) um 1789 baute, hatte auf 49½'' Oeffnung 40', — dasjenige von William Parsons Earl of **Rosse** (Parsonstown in Irland 1800—1867) auf 72'' Oeffnung 54' Focaldistanz. Die in neuerer Zeit von **Steinheil** und **Foucault** beliebte Verwendung versilberter Glasspiegel empfiehlt sich allerdings gegenüber den kostbaren und schweren Metallspiegeln, — aber blind werden sie eben auch in verhältnissmässig kurzer Zeit, während eine Linse bei sorgfältiger Behandlung sich so zu sagen immer gleich bleibt.

296. Interferenz und Beugung. Gewisse farbige Erscheinungen, die beim Zusammentreffen paralleler oder nahezu paralleler, durch stumpfwinklige Prismen, dünne Oelschichten, etc. erhaltenen Lichtstrahlen, oder beim Vorbeigehen derselben an Gitterwerken, an den Rändern undurchsichtiger Körper, etc. entstehen, und unter dem Namen der **Interferenz-** und **Beugungsphänomene** bekannt sind, haben zunächst der Undulationstheorie (283) zum Siege verholfen. Unter der Annahme, dass den verschiedenen Farben Lichtwellen von verschiedener Länge entsprechen, und zwar roth Wellen von etwa 62, orange 58, gelb 55, grün 51, blau 48, indigo 45 und violet 42 Hunderttausendstel eines Millimeters, — lassen sich in der That jene Erscheinungen theoretisch reconstruiren: Beträgt nämlich die Wegdifferenz zweier Lichtwellen ein Vielfaches der Wellenlänge, so verstärken sich dieselben, — beträgt sie dagegen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so schwächen oder vernichten sie sich, — und wie ein Theil eines Strahles aufgehoben wird, so tritt nothwendig die complementäre Farbe hervor.

Steht zwei, einen kleinen Winkel φ mit einander bildenden Spiegeln ca und ca_1 ein leuchtender Punct L gegenüber, so werden die von ihm aus-

gehenden Strahlen von den Spiegeln nach 284 so reflectirt, wie wenn sie von den zu L in Beziehung auf dieselben symmetrischen Puncten b und b_1 kommen würden, und da c von L, b und b_1 nothwendig die gleiche Distanz r hat, so ergibt sich die Gleichheit der in der Figur mit φ bezeichneten Winkel nach 124 und 69. Wird $b b_1$ von $c o = q$ unter rechtem Winkel in d halbirt, und ist ein Schirm $AB \parallel b b_1$, so hat o von b und b_1 gleichen Abstand, — also hat auch das von L mit Hülfe der beiden Spiegel nach o kommende Licht gleich langen Weg zurückzulegen, während dagegen das nach jedem andern, auf $\alpha_1 \gamma_1$ liegenden, von o einen Abstand p besitzenden Puncte m kommende Licht für die beiden Spiegel eine



Wegdifferenz

$$\Delta b = m b_1 - m b = \sqrt{o d^2 + (b_1 d + o m)^2} - \sqrt{o d^2 + (b d - o m)^2}$$
$$= \sqrt{(r \cos \varphi + q)^2 + (r \sin \varphi + p)^2} - \sqrt{(r \cos \varphi + q)^2 + (r \sin \varphi - p)^2}$$

hat, welche man somit für kleine Werthe von φ und p sehr angenähert

$$\Delta b = (r+q)\left[\sqrt{1 + \frac{2 p r \varphi \sin 1''}{(r+q)^2}} - \sqrt{1 - \frac{2 p r \varphi \sin 1''}{(r+q)^2}}\right] = \frac{2 p r \varphi \sin 1''}{r+q} \qquad 1$$

setzen kann. Ist das Licht homogen, so muss, wenn die Undulationstheorie richtig, sobald die Wegdifferenz ein Vielfaches der entsprechenden Wellenlänge λ ist, der Punct m **doppeltes** Licht, — sobald sie dagegen ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge ist, **kein** Licht erhalten; es müssen also o und alle von o um

$$p = \frac{r+q}{2 r \varphi \sin 1''} \cdot n \lambda = 2 n \cdot \frac{\lambda}{4 \varphi \sin 1''}\left(1 + \frac{q}{r}\right) \qquad 2$$

abstehenden Puncte **hell**, — alle von o um

$$p = \frac{r+q}{2 r \varphi \sin 1''} \cdot (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} = (2n+1) \frac{\lambda}{4 \varphi \sin 1''}\left(1 + \frac{q}{r}\right) \qquad 3$$

abstehenden Puncte dagegen **dunkel** erscheinen, — und zwar werden zwei auf einander folgende helle oder dunkle Puncte nach 2 und 3 den Abstand

$$d = \frac{\lambda}{2 \varphi \sin 1''}\left(1 + \frac{q}{r}\right) \quad \text{haben, so dass} \quad \lambda = \frac{2 d r \varphi \sin 1''}{q+r} \qquad 4$$

aus Messung desselben berechnet werden kann, und jener Abstand zur Wellenlänge proportional, zum Winkel der Spiegel reciprok ist, beim Nähern der Lichtquelle und beim Entfernen des Schirmes zunimmt. Der wirkliche Versuch, welchen **Fresnel** Anfangs der Zwanziger-Jahre, vergl. seine Abhandlung „Sur la lumière (Suppl. zu einer Paris 1822 durch Riffault veröffentlichten Uebersetzung von Thomson's Chemie)", mit solchen Spiegeln unternahm, zeigte genau die oben theoretisch erhaltenen Erscheinungen, und zeugte damit nicht nur für die Richtigkeit der Undulationstheorie, sondern erlaubte Fresnel, welcher den Schirm durch eine mikrometrische Vorrichtung ersetzte, in oben angegebener Weise die Wellenlängen für die einzelnen Farben zu messen, — Messungen, deren Resultate oben im Texte mitgetheilt sind, und die später **Fraunhofer** in etwas anderer Weise wiederholt und an seine Linien ange-

bunden hat. Letzterer fand für die Linie

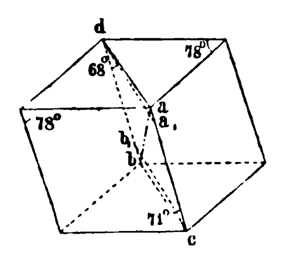
	mm		mm
A . . .	0,0007610	E . . .	0,0005260
B	6878	F	4843
C	6588	G	4291
D	5888	H	3928

Den letzten merklichen Wärmestrahlen ausser roth (vergl. 294) soll etwa die Wellenlänge 0,0048000, — den letzten fluorescirenden Strahlen ausser violet etwa 0,0003090 entsprechen. — Aus dieser verschiedenen Wellenlänge folgt nach 2—4 unmittelbar, dass, wenn L weisses Licht gibt, sich zwar bei o noch weisses Licht zeigt, dann aber zunächst violet erlöscht und seine Complementärfarbe auftritt, etwas weiter ab blau, — etc., kurz ein farbiges Bild entsteht, und in ähnlicher Weise vermag die Undulationstheorie die Farbenerscheinungen bei dünnen Blättchen, beim Lichtdurchgange durch enge Spalten, etc. leicht zu erklären, und nach allem Detail vorauszuberechnen. — Zuerst wurde auf die Interferenz- und Beugungs-Erscheinungen **Grimaldi** aufmerksam, beschrieb sie in dem nach seinem Tode erschienenen Werke „Physico-Mathesis de lumine, coloribus et iride libri II, nec non de hactenus incognita luminis diffusione, de refractione et diffractione. Bononiæ 1665 in 4.“, und hob bestimmt hervor, dass Licht zu Licht hinzugefügt unter Umständen Dunkelheit hervorbringen könne, — während sich ungefähr gleichzeitig **Boyle** in seinen „Experiments and considerations upon colours. 1663 (Lat. Amst. 1667 in 16.)“ und **Hooke** in seiner „Micrographia. Lond. 1665 in fol.“ speciell mit den Farben dünner Blättchen, deren Gesetze bald darauf **Newton** in seiner Optik (vergl. 283) definitiv auf experimentellem Wege feststellte, beschäftigten. Einen neuen Aufschwung nahmen sodann diese Untersuchungen durch „**Young**, On the theory of light and colours (Phil. Trans. 1802)“ und „**Fresnel**, Mémoire sur la diffraction de la lumière (1815 dem Institut vorgelegt, 1819 von demselben gekrönt, und 1826 in den Mém. erschienen)“, welche Arbeiten der Undulationstheorie zum Durchbruche verhalfen. Aus neuerer Zeit mögen noch die Schriften „**Airy**, Mathematical Tracts on the lunar and planetary theories, the undulatory theory of optics, etc. 2. ed. Cambridge 1831 in 8. (3. ed. 1842), — Friedrich Magnus **Schwerd** (Osthofen in Rheinbayern 1792; Professor der Mathematik zu Speyer), Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt. Mannheim 1836 in 4., — **Cauchy**, Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prague 1836 in 4., — etc.“ zur Ergänzung der in 283 gegebenen Literatur angeführt werden.

297. Die Doppeltbrechung. Manche krystallinische Körper, namentlich der rhomboedrische Doppelspath, lassen das Licht nach zwei Richtungen durch. Betrachtet man z. B. durch einen Doppelspath einen Punct, so sieht man ihn doppelt, und zwar dreht sich das dem ungewöhnlichen Strahle entsprechende Bild beim Drehen des Krystalles um das andere in einem Kreise, dessen Halbmesser einem Winkel von $6^0\ 12' = 372'$ entspricht; um eben so viel wird der Mittelpunct eines Kreises versetzt, und wenn somit die beiden Bilder eines auf einer fernen Tafel verzeichneten Kreises, die man durch einen vor das Ocular eines Fernrohrs gebrachten Doppel-

spath sieht, sich tangiren, so ist sein scheinbarer Durchmesser 2φ durch das Fernrohr auf 372′ gebracht, d. h. es ist die Vergrösserung des Letztern gleich $372 : 2\varphi$. Eine Gerade erscheint, wenn sie in einer durch die stumpfen Ecken des Rhomboeders gehenden Ebene, einem sog. **Hauptschnitte**, liegt, einfach, sonst immer doppelt.

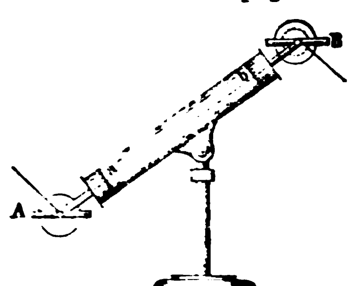
Die durch die beiden stumpfen Ecken a und b eines Kalkspath-Rhomboeders gehende Diagonale a b heisst **Hauptaxe** und jede zu ihr Parallele **optische Axe**, — jede durch eine optische Axe gelegte Ebene, voraus a c b d, **Hauptschnitt.** Fällt ein Strahl so ein dass er parallel zur optischen Axe gebrochen wird, so geht er einfach durch, und es entspricht ihm das Brechungsverhältniss 1,654, — in jedem andern Falle dagegen theilt sich der gebrochene Strahl so, dass dem einen Theile, welchen man den **gewöhnlichen** nennt, noch dasselbe Brechungsverhältniss, dem andern **aussergewöhnlichen** aber ein um so kleineres entspricht, je weiter er von der optischen Axe abweicht, — ein kleinstes 1,483, wenn er zu derselben senkrecht durchgeht. Aehnliche Verhältnisse zeigen sich beim Anatas, Korund, Smaragd, etc.; dagegen gibt es auch Krystalle, wie Amethyst, Bergkrystall, Zirkon, etc., bei welchen dem aussergewöhnlichen Strahle das grössere Brechungsverhältniss entspricht. Die Undulationstheorie hat diese Erscheinungen als Folgen davon nachgewiesen, dass die Elasticität des Aethers in diesen Krystallen nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, und dadurch eine Zerlegung der Schwingungen nach der Richtung der grössten und kleinsten Elasticität bewirkt wird. — Die Doppeltbrechung, deren im Texte erwähnte Anwendung zur Bestimmung der Vergrösserung **Arago** zu verdanken ist, findet sich zuerst in „**Bartholinus**, Experimenta crystalli islandici disdiaclastici quibus mira et insolita refractio detegitur. Havniæ 1669 in 4." beschrieben, und wurde dann bald darauf auch durch **Hugens** in seinem 283 erwähnten Traité einlässlich behandelt. Aus neuerer Zeit sind namentlich noch die Schriften „**Malus**, Théorie de la double réfraction. Paris 1810 in 4., — **Biot**, Sur la nature des forces qui partagent les rayons lumineux dans les cristaux doués de la double réfraction (Mém. de l'Inst. 1813—1815), — **Fresnel**, Mémoire sur la double réfraction (Mém. de l'Acad. 1827), — etc." zu erwähnen.

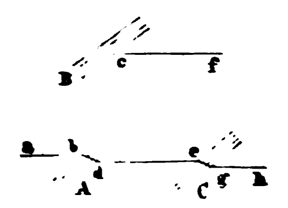


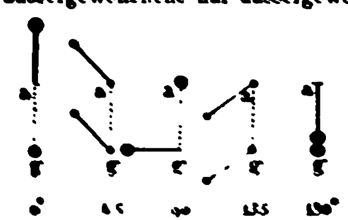
298. Die Polarisation. Wenn ein Lichtstrahl unter einem Winkel von $54^1/_2{}^0$ auf einen geschwärzten Glasspiegel einfällt, so erhält er durch die Reflexion verschiedene Eigenschaften, die ihm den Namen eines polarisirten Strahles zugezogen haben: Fällt er unter gleicher Neigung auf einen zweiten Spiegel ein, so wird er, je nachdem die neue Einfallsebene zu der ersten parallel oder senkrecht steht, **noch** oder **nicht mehr** reflectirt, — fällt er auf einen doppeltbrechenden Körper, so erleidet er nur die **gewöhnliche** oder nur die **ungewöhnliche** Brechung, je nachdem der durch

ihn und die Hauptaxe gehende Hauptschnitt zur Reflexionsebene parallel oder senkrecht steht, etc. Die Undulationstheorie hat unter der Annahme, dass längs einem polarisirten Strahle einander parallele, zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte Vibrationen statt haben, auch diese Erscheinungen als nothwendig nachgewiesen.

Gibt man den zwei Spiegeln A und B, welche am Besten aus schwarzem nur oberflächlich spiegelndem Obsidianglase bestehen, eine Neigung von $90 - 54\frac{1}{2} = 35\frac{1}{2}°$ gegen die Axe a b der Röhre, an welchen sie angesteckt sind, stellt B ‖ A, und lässt einen gewöhnlichen Lichtstrahl so auf A einfallen, dass er nach a b auf B fällt, so wird er von B ohne merklichen Lichtverlust reflectirt; dreht man sodann die Hülse von B um a b, so zeigt sich ein immer grösserer Lichtverlust, und wenn die Drehung bis 90° zugenommen hat, so wird gar kein Licht mehr reflectirt; wird die Drehung noch weiter fortgesetzt, so nimmt bis 180° die Intensität wieder zu, dann neuerdings ab, — etc., ganz entsprechend dem im Texte Gesagten. Der Spiegel A heisst polarisirend oder **Polarisator**, — B analysirend oder **Polariscop**, — die Lage der Einfallsebene auf B bei vollständiger Reflexion **Polarisationsebene**. — Lässt man einen Lichtstrahl unter dem Winkel von $54\frac{1}{2}°$ auf eine Säule A paralleler Glas- oder Glimmerplatten fallen, so wird ein Theil reflectirt, ein anderer gebrochen. Fängt man die beiden Theile b c und d e mit zwei andern, zu A parallelen Säulen B und C auf, so wird b c reflectirt, aber nicht durchgelassen, — d e durchgelassen, aber nicht reflectirt; dreht man dagegen B und C um b c und d e je um 90°, so wird umgekehrt b c durchgelassen und d e reflectirt, so dass die Polarisationsebene für b c mit der Einfallsebene zusammenfällt, für d e zu ihr senkrecht steht, oder b c und d e **entgegengesetzt polarisirt** sind. So sind auch die beiden aus einem Doppelspath austretenden Lichtstrahlen entgegengesetzt polarisirt, — der gewöhnliche im Hauptschnitte, der aussergewöhnliche senkrecht zu demselben, — und wenn man sie durch einen zweiten Doppelspath auffängt, so geht bei paralleler oder um 180° verschiedener Lage der gewöhnliche nur gewöhnlich und der aussergewöhnliche nur aussergewöhnlich, bei Drehung um 90° aber der gewöhnliche nur aussergewöhnlich und der aussergewöhnliche nur gewöhnlich durch, während in allen Zwischenlagen beide in beider Weise, aber geschwächt durchpassiren. Bezeichnen g und a die durch den ersten Doppelspath gesehenen Bilder eines Punctes, so erhält man für die verschiedenen Stellungen des zweiten die in beistehender Figur angedeuteten Varietäten. — Gerade durch diese Erschei-







nungen am Doppelspathe wurde schon **Hugens** auf die Polarisation des Lichtes aufmerksam; aber ihre Gesetze traten erst zu Tage, als **Malus** in der 297 erwähnten Abhandlung die Polarisation durch Spiegel lehrte, und **Brewster** bald darauf in seiner Abhandlung „Laws which regulate the polarization of light by reflection (Phil. Trans. 1815)" unter Anderm nachwies, dass die Tangente des Polarisationswinkels dem Brechungsexponenten des Mittels gleich sei, oder also, da aus

$$\text{Tg}\,p = n \quad \text{und} \quad \frac{\text{Sin}\,p}{\text{Sin}\,b} = n \quad \text{sofort} \quad b = 90^\circ - p$$

folgt, der unter dem Polarisationswinkel reflectirte Strahl (bc in Fig. 2) zu dem gebrochenen Strahle (bd) senkrecht stehe. Seither ist die Polarisation des Lichtes sehr eingehend studirt worden, so z. B. von **Arago** in seinen Abhandlungen „Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leurs passages à travers certains corps diaphanes et sur quelques autres nouv. phénomènes d'optique (Mém. de l'Inst. 1811)" und „Sur l'action que les rayons de lumière polarisés exercent les uns sur les autres (Ann. de phys. 1819)", — von **Biot** in zahlreichen Abhandlungen, von denen besonders diejenige „Sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux (Mém. de l'Acad. 1819)" hervorzuheben sein dürfte, — von **Fresnel**, dessen wichtigste Abhandlungen schon in 296 und 297 angeführt wurden, — von **Herschel**, neben dessen in 283 citirter Theorie des Lichtes beispielsweise noch die Abhandlung „On the action of crystallized bodies on homogeneous light (Phil. Trans. 1820)" angeführt, und zugleich bemerkt werden mag, dass ihm (s. Gehler VII 786) die Einführung der aus zwei parallel zur Axe geschnittenen Turmalinplatten bestehenden **Turmalinzange** zur Untersuchung von Krystallplatten zugeschrieben wird, — von Karl Michael **Marx** (Carlsruhe 1794; erst Lehrer bei Pestalozzi in Yverdon, dann Professor der Physik und Chemie zu Braunschweig), dem ebenfalls Manche die Erfindung des letzt-erwähnten Polarisationsapparates zuschreiben, — von William **Nicol** (1768? — Edinburgh 1851; Lehrer der Physik in Edinburgh), in dessen Abhandlung „A method of increasing the divergence of the two rays in calcareous spar, so as to produce a single image (Jameson's Journ. 1828)" das nach ihm benannte, aus einem nach $da_1 \parallel cb_1$ (vergl. 297 Fig.) abgeschliffenen, senkrecht zum Hauptschnitte und zu da_1 zerschnittenen, und mit einer Schichte von dem stark brechenden Canada-Balsam wieder gekitteten Kalkspathe bestehende, den gewöhnlichen Strahl an der Schnittfläche ablenkende Prisma beschrieben ist, das jetzt bei keinem Polarisationsapparate fehlen darf, — von Ludwig Friedrich Wilhelm August **Seebeck** (Jena 1805 — Dresden 1849; Sohn von Thomas Johann in 317; Lehrer der Physik zu Berlin, dann Director der technischen Bildungsanstalt zu Dresden), vergl. dessen „Observationes circa nexam intercedentem inter corporum lucem simpliciter refringentium vim refringentem et angulos incidentiæ sub quibus luminis ab illorum superficiebus reflexi polarisatio fit perfectissima. Berol. 1830 in 4., — von Franz Ernst **Neumann** (Ukermark 1798; Professor der Physik und Mineralogie in Königsberg), der unter Anderm eine „Theorie der elliptischen Polarisation durch Metalle (Pogg. Annal. 1832) schrieb, — von Joh Gottlieb Christian **Nörremberg** (Putzenbach in Rheinpreussen 1787 — Stuttgart 1862; Professor der Mathematik und Physik zu Darmstadt und Tübingen), der namentlich den Polarisationsapparat vervollkommnete, — etc.

XXX. Die Wärmelehre.

299. Das Wesen der Wärme. Die sog. Wärme ist mit dem Lichte verwandt und häufig verbunden, strahlt wie dasselbe, wird nach denselben Gesetzen reflectirt und gebrochen, — ja in neuerer Zeit ebenfalls nicht mehr als Stoff, sondern als eine Bewegungsform betrachtet. Das Ausstrahlungsvermögen warmer Körper hängt von ihrer Beschaffenheit ab, und nimmt namentlich mit der Rauhigkeit ihrer Oberfläche zu.

Für die Wärmelehre vergleiche: „**Lambert**, Pyrometrie. Berlin 1779 in 4., — Benjamin Thompson, Graf von **Rumford** (Rumford in Massachusetts 1753 — Auteuil bei Paris 1814; erst Schulmeister, dann Militär, zuletzt Privatgelehrter und Mitglied der Academie in Paris; vergl. Cuvier, Eloges II), Mémoires sur la chaleur. Paris 1804 in 8., — John **Leslie** (Largo in Schottland 1766 — Coates bei Largo 1832; Professor der Mathematik und Physik zu Edinburgh), Experimental inquiry into the nature and properties of heat. London 1804 in 8., — Pierre **Prevost** (Genf 1751 — Genf 1839; Professor der Philosophie und Physik in Berlin und Genf), Du calorique rayonnant. Genève 1809 in 8. (Suppl. 1832), und: Deux traités de physique mécanique, comme simple éditeur du premier (par G. L. Lesage) et comme auteur du second. Genève 1818 in 8., — **Fourier**, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822 in 4., — Sadi **Carnot** (Paris 1796 — Paris 1832; Sohn des ältern Carnot in 4., etc.; Ingenieurhauptmann), Reflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance. Paris 1824 in 8., — Jean-Claude-Eugène **Péclet** (Besançon 1793 — Paris 1857; Professor der Physik zu Marseille und Paris), Traité de la chaleur considérée dans ses applications aux arts et manufactures. Paris 1828, 2 Vol. in 8. (3 éd. 1860), — **Poisson**, Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835 in 4. (Suppl. 1837), — J. R. **Mayer** (s. 4), Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme. Heilbronn 1851 in 8., und: Die Mechanik der Wärme. Stuttgart 1867 in 8., — **Zeuner**, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Freiberg 1860 in 8. (2. A. 1866; franz. durch Arnthal und Cazin, Paris 1869), — Gustav Adolf **Hirn** (Logelbach bei Colmar 1815; Civilingenieur zu Logelbach), Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur. Paris 1862 in 8. (2 éd. in 2 Vol. 1865—1868), — **Tyndall**, Heat considered as a mode of motion. London 1863 in 8. (2. ed. 1865; franz. von Moigno, Paris 1864; deutsch von Helmholtz und Wiedemann, Braunschweig 1867), — **Clausius**, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig 1864—1867, 2 Abth. in 8., — Charles-Pierre-Mathieu **Combes** (Cahors 1802; Professor an der École des mines und Mitglied der Academie zu Paris), Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur et de ses applications principales. Paris 1867 in 8., — **Briot**, Théorie mécanique de la chaleur. Paris 1869 in 8., — etc.“ — Für die Geschichte und die ersten Principien der mechanischen Wärmetheorie vergleiche die folgenden Sätze und namentlich 306.

300. Die Wärmeleitung. Das Verhalten der Körper gegen das Durchlassen der Wärmestrahlen weicht von dem gegen die Licht-

strahlen bedeutend ab. Ein sehr **diathermaner** Körper ist z. B. das Steinsalz, während der fast gleich durchsichtige Alaun schon bei sehr geringer Dicke alle Wärme absorbirt, d. h. sehr **atherman** ist. — In Beziehung auf das durch innere Strahlung bewirkte Verbreiten der absorbirten Wärme in einem Körper, theilen sich die Körper in gute und schlechte Wärmeleiter. Zu den erstern gehören Metalle und Steine, zu den letztern Glas, Kohle, Wolle, Erden, etc. Von unten erwärmte Flüssigkeiten und Gase scheinen bessere Wärmeleiter zu sein, als sie wirklich sind, — es entstehen nämlich Strömungen, auf denen z. B. die Luft- und Wasserheizungen beruhen.

Die Luftheizung soll zuerst in der jetzt gebräuchlichen Weise 1792 der englische Industrielle **Strutt** zu Belper in seiner mechanischen Spinnerei eingeführt haben, — in gewisser Art scheint sie aber schon bei den Römern gebräuchlich gewesen zu sein; sehr empfohlen wurde sie durch „Paul Traugott **Meissner** (Medias in Siebenbürgen 1778; Professor der Chemie in Wien), Die Heizung mit erwärmter Luft. Wien 1821 in 8. (3. A. 1827)". Die Einführung der Wasserheizung wird Jakob **Perkins** (1766? — London 1849; erst Kupferstecher in Philadelphia, dann Civilingenieur in London) zugeschrieben.

301. Die Ausdehnung. Da für ein kleines d sehr nahe $(1+d)^n = 1+nd$, so kann die Volumenausdehnung eines Körpers durch die Wärme gleich dem Dreifachen, die Flächenausdehnung gleich dem Doppelten der Längenausdehnung gesetzt werden. Um Letztere zu messen, kann man z. B. nach dem Vorschlage von Lavoisier und Laplace das freie Ende des zu untersuchenden, in einem Oelbade erwärmten Stabes auf einen Hebel wirken lassen, mit dem zugleich ein Fernrohr verbunden ist, dessen Stellung an einer entfernten Scale abgelesen werden kann. — Hat ein Originalmaass seine gesetzliche Länge l bei t^0 C., so ist, wenn a die Ausdehnung der Längeneinheit für 1^0 C. bezeichnet, seine Länge bei T^0. C.

$$L = l\,[1 + a\,(T - t)] \qquad 1$$

Wenn man somit diess Maass, anstatt bei t^0, bei T^0 anwendet, so findet man die Entfernung X statt x, so dass

$$x \,.\, l = X \,.\, L \quad \text{oder} \quad x = X\,[1 + a\,(T - t)] \qquad 2$$

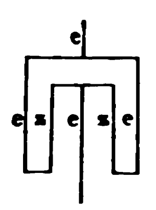
Um eine Uhr gegen die (nach 255) schädliche Einwirkung der Wärme auf die Pendellänge zu compensiren, ersetzt man entweder nach Graham die Linse durch ein Gefäss mit Quecksilber, oder unterbricht nach Harrison die Pendelstange durch einen Rost (s. Fig.), bei dem die nach oben wirkenden Stäbe z aus einem Metalle (z. B. Zink) bestehen, das sich bedeutend stärker als das Metall der Pendelstange (meist Eisen) ausdehnt. — Bezeichnen v und v'

die Volumina eines Gases bei b und b′ Zollen **Barometerstand**, t und t′ Centesimalgraden Erwärmung, so ist sein Volumen bei 28″ und 0°

$$x = \frac{b\,v}{28\,(1+\alpha t)} = \frac{b'\,v'}{28\,(1+\alpha t')} \quad \text{so dass} \quad \frac{b\,v}{b'\,v'} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} \qquad 3$$

das auf verschiedene Temperaturen erweiterte **Mariotte'sche Gesetz** ist. Da $\alpha = 0{,}003665$ oder nahe $= 1:273$, so muss nach 3 für $t = -273°$ C. nothwendig $v = 0$ werden, und man kann daher den um 273° C. unter dem Eispuncte liegenden Punct unbedenklich als einen jeder Wärme baaren **absoluten Nullpunct** betrachten.

Die Rost-Compensation soll George **Graham** (Horsgills in Cumberland 1675 — London 1751; Uhrmacher und Mechaniker in London) schon um 1715 erfunden, dann aber zu Gunsten der Quecksilber-Compensation, von welcher er in der Abhandlung „A contrivance to avoid the irregularities in a clock's motion occasioned by the action of heat and cold on a pendulum rod (Phil. Trans. 1726)" Nachricht gab, wieder verlassen haben. Sie wurde sodann von John **Harrison** (Foulby 1693 — London 1776; Uhrmacher in London), muthmasslich ohne von Graham's früherer Idee zu wissen, aufgenommen, und in der jetzt gebräuchlichen Form etwa 1725 in die Pendeluhren eingeführt, — von dem gleichen Manne, dem es auch zuerst gelang, durch die Krümmung einer aus Stahl und Messing zusammengesetzten Feder die Unruhe der tragbaren Uhren zu compensiren, und sie so zu wirklichen Chronometern zu erheben. — Bezeichnen p und v Expansivkraft und Volumen eines Gases bei 0° Wärme und soll dasselbe entweder bei gleichem Volumen doppelte Expansivkraft oder bei gleicher Expansivkraft doppeltes Volumen erhalten, so muss entsprechend 3



$$p\,(1+\alpha t) = 2p \qquad \text{oder} \qquad v\,(1+\alpha t) = 2v$$

werden, also in beiden Fällen $\alpha t = 1$ oder $t = 1/\alpha = 273° = a$ sein, wofür 3 in

$$b \cdot v : b' \cdot v' = (a+t) : (a+t') \qquad 4$$

übergeht, so dass das Product aus Druck und Volumen der absoluten Temperatur proportional ist. — Anhangsweise mag noch der von Josiah **Wedgwood** (Burslem in Staffordshire 1730 — Etruria bei Newcastle 1795; Töpfer) zur Messung sehr hoher Temperaturen erfundene **Pyrometer** erwähnt werden, der auf der Annahme beruht, dass Thon proportional der Hitze schwinde; **Dulong** und Alexis-Thérèse **Petit** (Vesoul 1791 — Paris 1820; Professor der Physik in Paris) haben ihn durch den sog. **Gewichtsthermometer**, ein z. B. bei 0 und 100° mit Quecksilber gefülltes, und beide Male, sowie sodann bei jeder Temperaturbestimmung genau abgewogenes Gefäss mit engem Halse, — **Pouillet** aber durch eine Art **Luftthermometer** (vergl. dasjenige von Galilei in 247) mit Platinkugel zu ersetzen gesucht, — und Leonhard **Elsner** (Neustadt in Oberschlesien 1802; Lehrer der Chemie und Arcanist der k. Porzellanfabrik in Berlin) soll auf ähnliche Weise gefunden haben, dass während des zwölfstündigen Gutofenfeuers schon bei einer Temperatur von 2000 bis 2500 Graden die meisten Gesteine und Metalle sich vollständig verflüchtigen, so dass man vielleicht (s. 294) etwa diese Temperatur auf der Sonne vermuthen dürfte.

ifische Wärme. Die Wärmemenge, welche die Ge-
ser von 0° (ein Kilogramm) erfordert, damit die
steige, nimmt man als Wärmeeinheit oder **Ca-**
sodann die in dieser Einheit ausgedrückte
gend ein anderer Körper erfordert, damit
chtseinheit desselben um 1° steige, seine
Eigenwärme. — Taucht man einen
s, des Gewichts g und der Tem-
er der Temperatur t_2, so hat man,
nd τ die durch die Ausgleichung

$$\text{oder} \qquad s = \frac{\tau - t_2}{g\,(t_1 - \tau)}$$

uch strenge genommen bei allen Körpern,
ische Wärme bei **constantem Volumen** und
antem Drucke zu unterscheiden, je nachdem man
Wärmezuführung das Volumen der Masse constant erhält,
indem man zwar dem Körper eine Ausdehnung gestattet, dabei
aber den von aussen stattfindenden Druck constant erhält. Für
atmosphärische Luft ist z. B. die specifische Wärme bei constantem
Volumen 0,1687, und die bei constantem Drucke 0,2377.

Bei Bestimmung der specifischen Wärme einer Reihe fester Körper fanden **Dulong** und **Petit** das merkwürdige Gesetz, dass das Product der specifischen Wärme eines Körpers in sein Atomgewicht nahezu eine constante Grösse ist; vergl. ihre Abhandlung „Recherches sur quelques points importans de la théorie de la chaleur (Annal. de phys. 1819)".

303. Die gebundene Wärme. Während ein Körper in einen höhern Aggregationszustand übergeht, wird alle ihm zufliessende, gewöhnlich in Calorieen ausgedrückte Wärme zu dieser Formänderung verbraucht, d. h., wie man sagt, **gebunden** oder **latent,** — eine Vermehrung des Wärmezuflusses hat keine Temperaturerhöhung, sondern eine Beschleunigung des Processes zur Folge. Umgekehrt wird bei Erniedrigung des Aggregationszustandes eine entsprechende Wärmemenge **frei,** worauf z. B. die Anwendung des Dampfes zum Heizen, Kochen, Waschen, etc. beruht. — Wenn ein Körper während der Wärmezuführung sich ausdehnt, und unter einem äussern Drucke steht, so wird während der Ausdehnung Arbeit, sog. **äussere Arbeit,** verrichtet, und dieser Arbeit entspricht, nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie, eine gewisse Wärmemenge, welche **verschwindet.** Die einer Calorie entsprechende Arbeit, ein sog. mechanisches **Wärme-Equivalent,** beträgt nahezu 424 Kilogrammeter.

Den Begriff der latenten Wärme scheint Joseph **Black** (Bordeaux 1728 bis Edinburgh 1799; Professor der Chemie zu Glasgow und Edinburgh) etwa 1763 zuerst aufgestellt zu haben. Um die Benutzung der beim Niederschlagen des Dampfes frei werdenden Wärme zum Heizen, Kochen, etc. machte sich neben **Rumford** (vergl. 299) besonders Thomas **Tredgold** (Brandon bei Durham 1788 — London 1829; zuerst Tischler, zuletzt Civilingenieur in London) verdient, dem man, neben einschlagenden Versuchen, auch „Principles of warming and ventilating public buildings. London 1824 in 8. (3. ed. with appendix of T. Bramah 1836; deutsch von O. B. Kühn, Leipzig 1826 und 1837) verdankt. — Wenn sich in einem Cylinder von 1 Quadratmeter Grundfläche ein Kubikmeter Luft von 0° unter dem Drucke einer Atmosphäre befindet, so muss die (nach 278) 1,293 Kilogramme wiegende Luft, um doppelte Expansivkraft zu erhalten, nach 301 um 273° erwärmt werden, und für jeden Grad und jedes Kilogramm bedarf es (302) 0,1687 Calorieen, also im Ganzen die Wärmemenge $w = 0,1687 \times 273 \times 1,293 = 59,55$ Calorieen. Soll dagegen die Luft auf das doppelte Volumen ausgedehnt werden, so bedarf es zwar (301) noch 273°, aber für jeden Grad und jedes Kilogramm (302) bis auf 0,2377 Calorieen, also die Wärmemenge $w' = 0,2377 \times 273 \times 1,293 = 83,90$ Calorieen. Der Unterschied $w' - w = 24,35$ Calorieen ist demnach nothwendig, um die Ausdehnung ohne Verminderung der Temperatur zu bewirken, und dabei ist, weil der Kolben um ein Meter vorwärts geschoben wurde und der Druck der Luft auf einen Quadratmeter (273) 10334 Kilogramme beträgt, die Arbeit gleich 10334 Kilogrammeter zu setzen, — oder es ist also das Arbeitsequivalent von einer Calorie gleich $10334 : 24,35 = 424$ Kilogrammeter, wie diess **Joule** (vergl. Phil. Mag. 1845, 1847) auch durch directe Versuche dargethan hat.

304. Die Verdunstung. Die Flüssigkeiten gehen schon unter der Siedehitze in den expansibeln Zustand über, jedoch nur an der Oberfläche, — sie **verdunsten**; dabei wird auf Kosten der umgebenden Körper ebenfalls Wärme gebunden, — es entsteht die sog. **Verdunstungskälte.** Auf ähnliche Weise entsteht beim Mischen von Schnee mit Salz, — beim Auflösen von 5 Th. Salmiak und 15 Th. Salpeter in 16 Th. Wasser, — etc., eine sog. **künstliche Kälte.** — Um die Spannkraft des Wasserdampfes zu messen, lässt man in den einen zweier Barometer einen Wassertropfen steigen, und beobachtet die verschiedenen Temperaturen entsprechenden Verkürzungen seiner Säule; für höhere Temperaturen lässt man den Dampf auf ein Manometer (274) wirken. [XI.]

Durch Mischung von 1 Theil Salmiak und 2 Theilen Wasser erhält man nach **Wüllner** eine Abkühlung von + 10 auf — 10° C., — bei Mischung von 1 Kilogramm Schnee und $\frac{1}{3}$ Kilogramm Kochsalz eine flüssige Masse der Temperatur — 21° C., — etc.

305. August's Psychrometer und das Hutton'sche Princip. Bezeichnen t_1 und t_2 die Angaben eines trockenen und eines benetzten Thermometers bei b^{mm} Barometerstand, e_1 und e_2 aber die diesen

Temperaturen entsprechenden Spannkräfte, so gibt nach August

$$E = e_2 - \begin{Bmatrix} 0{,}000804 \\ 0{,}000748 \end{Bmatrix} (t_1 - t_2)\, b \qquad 1$$

die Spannkraft des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, wobei der untere Factor anzuwenden ist, wenn sich das benetzte Thermometer mit einer Eisrinde überzieht; E heisst **absolute**, das gewöhnlich in Procenten gegebene Verhältniss $E : e_1$ aber **relative Feuchtigkeit**. — Wenn zwei mit Feuchtigkeit gesättigte Luftmassen von ungleicher Temperatur t_1 und t_2, also auch ungleicher Spannkraft s_1 und s_2, zusammentreffen, so entspricht, wie Hutton lehrte (vergl. XI), ihrer Mischungstemperatur $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ eine Spannkraft $S < \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$, und es findet daher ein Niederschlag, sei es in Form einer Wolke, sei es als Regen, Schnee, etc., statt; sind sie nicht gesättigt, so werden sie zum mindesten feuchter. Aehnliche Vorgänge haben statt, wenn eine feuchte Luftschichte über einer Nachts durch Strahlung erkalteten Stelle der Erde liegt, und dann Thau oder Reif absetzt, — oder wenn über warmem feuchtem Boden oder Gewässern aufsteigende Dämpfe auf feuchte Luftschichten treffen, und Nebel entsteht, — etc.

Die Hygrometrie kann man als durch den von **Lambert** gegebenen „Essai d'hygrométrie (Mém. de Berl. 1769, 1772; deutsch, Augsburg 1774—1775 in 8.)" begründet, und als durch **Saussure** (vergl. 280) wesentlich vervollkommnet, bezeichnen. — Das von John Frederic **Daniell** (London 1790 — London 1845; Professor der Chemie in London) in seiner Abhandlung „On a new Hygrometer (Quart. Journ. of Science 1820)" beschriebene, nach ihm benannte, und später von **Regnault**, vergl. dessen „Etudes sur l'hygrométrie (Annal. de chim. 1845)", verbesserte Hygrometer bestimmt die Temperatur, bei welcher sich jeweilen Thau niederschlägt, und daraus (XI) die Spannkraft des gleichzeitig in der Luft vorhandenen Wasserdampfes, — ist aber leider fast nur in eigentlichen Observatorien verwendbar, während der von Ernst Ferdinand **August** (Prenzlau 1795; Professor der Mathematik in Berlin), vergl. dessen Schriften „Ueber die Anwendung des Psychrometers zur Hygrometrie. Berlin 1828 in 4., und: Ueber die Fortschritte der Hygrometrie. Berlin 1830 in 4.", eingeführte und im Texte beschriebene Psychrometer, sich zwar allerdings eher für meteorologische Stationen eignet, dafür aber bei raschen Temperaturwechseln in der Nähe des Nullpunctes zuweilen überschnappt. — Beispielsweise mag angeführt werden, dass sich 1861 VIII 15 zu Interlaken um 2^h bei $b = 712{,}8^{mm}$ die Ablesungen $t_1 = 30^0{,}4$ und $t_2 = 20^0{,}5$ ergaben, welchen (IX) $e_1 = 32{,}29^{mm}$ und $e_2 = 18{,}52^{mm}$ entsprechen; also hat man nach 1

$$E = 18{,}52 - 0{,}000804 \times 9{,}9 \times 712{,}8 = 12{,}85^{mm} \qquad \frac{E}{e_1} = \frac{12{,}85}{32{,}29} = 40\%$$

und dasselbe würden wir erhalten haben, wenn wir 1, gestützt auf die Regnault'schen Versuche, die Formel

$$E = e_2 - \begin{Bmatrix} 0{,}000800 \\ 0{,}000691 \end{Bmatrix} (t_1 - t_2) \,.\, b \qquad 2$$

substituirt hätten. — Ausser den von **August** in seiner bereits citirten Schrift gegebenen Tafeln kann man zur Abkürzung der Rechnung auch „**Hermann Suhle** (Potsdam 1830), Psychrometertafeln, welche den Dunstdruck und die relative Feuchtigkeit für Zehntelgrade beider Thermometer des Psychrometer's enthalten. Cöthen 1866 in 4., — Ludwig Friedrich **Kämtz** (Treptow in Pommern 1801 — Petersburg 1867; Professor der Physik in Halle und Dorpat, zuletzt Director des physikalischen Centralobservatoriums in Petersburg), Tafeln zur Berechnung und Reduction meteorologischer Beobachtungen. Dorpat 1868 in 4., — etc.“ benutzen. — Will man nur die relative Feuchtigkeit in Procenten berechnen, und ist der Barometerstand $b = 760 - \Delta b$, so kann man nach 1 oder 2 dieselbe

$$e = 100 . \frac{e_2 - \alpha (t_1 - t_2)(760 - \Delta b)}{e_1} = A + B . \frac{\Delta b}{100} \qquad 3$$

setzen, wo α den 8 oder 7 Zehntausendstel betragenden Erfahrungsfactor bezeichnet, A die Feuchtigkeit bei 760^{mm} und B den Zuschlag, welchen sie für 100^{mm} Abnahme des Barometerstandes erleidet. Die Tafel XI^b gibt in einer für die meisten Fälle hinreichenden Ausdehnung für die Argumente t_2 und $t_1 - t_2$ diese A (in grösserer) und B (in kleinerer Schrift), und man erhält z. B. nach derselben für

$t_1 = 1°.3$ $t_2 = -1°.5$ $b = 677.9^{mm}$ also $t_1 - t_2 = 2,8$ $\Delta b = 82$

ohne Mühe

$$e = 52.0 + 4 . 0.82 = 55°,$$

Für weitere Ausführung der zweiten Abtheilung des Textes vergl. 391.

306. Der Dampfdruck. Wenn bei verdunstenden oder siedenden Flüssigkeiten die entstehenden Dünste oder Dämpfe nicht weggeschafft werden, so entsteht nach kurzer Zeit ein Gleichgewicht zwischen der Expansivkraft der Dünste oder Dämpfe und dem auf der Flüssigkeit ruhenden Drucke: Solche Dämpfe sind gesättigt oder saturirt. Bei vermehrtem Wärmezufluss nimmt dann einerseits die Flüssigkeit eine höhere Temperatur an, und anderseits erreichen die Dünste oder Dämpfe eine höhere Expansivkraft, — so bei dem sog. Papinianischen Topfe. — Wenn 1 Kil. Wasser von 0° Temperatur unter dem der Temperatur t entsprechenden Dampfdrucke erhalten und erwärmt wird, so geht seine Temperatur, ehe die Dampfbildung beginnt, auf t über. Die Wärmemenge, welche hiebei dem Wasser zuzuführen ist (Flüssigkeitswärme), beträgt nach Regnault

$$q = t + 0.00002\, t^2 + 0.0000003\, t^3 \qquad 1$$

Bei weiterer Wärmezuführung geht das Wasser in Dampf über und hiebei überwindet die Masse während der Volumenvergrösserung einen äussern Druck, verrichtet also Arbeit. Ist dieser Druck constant, so ist die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge L (äussere latente Wärme), die nach der mechanischen Wärmetheorie hiebei verschwindet, nach Zeuner pro 1 Kil. verdampftes Wasser

$$L = 31.10 - 1.096 . t - q \qquad 2$$

Diejenige Wärmemenge ϱ, welche 1 Kil. gesättigter Wasserdampf **mehr** enthält als 1 Kil. Wasser von gleicher Temperatur t (innere latente Wärme nach Zeuner) ist

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791 \,.\, t \qquad 3$$

Die beiden Werthe L und ϱ zusammen geben den Werth, den man gewöhnlich (vergl. 303) kurzweg **latente Wärme** (Verdampfungswärme nach Clausius) nennt. Die Summe $q + L + \varrho$ ist die sog. **Gesammtwärme** H, welche man 1 Kil. Wasser von 0^0 zuführen muss, um es unter constantem Drucke in gesättigten Dampf von t^0 zu verwandeln, und für welche man auch (nach Regnault)

$$H = 606{,}5 + 0{,}305 \,.\, t \qquad 4$$

hat. Das Volumen v der Gewichtseinheit (1 Kil.) gesättigten Wasserdampfes findet sich, wenn p den Druck des Dampfes pro Quadratmeter bedeutet,

$$v = 424 \frac{L}{p} + 0{,}001 \text{ Cubikmeter} \qquad 5$$

oder einfacher nach der Formel von Zeuner, die zugleich für **überhitzten** Wasserdampf gilt,

$$p\,v = B\,T - C \sqrt[4]{p} \qquad 6$$

wo $T = 273 + t$ und p in Atmosphären einzusetzen ist, die Constanten aber $B = 0{,}0049287$, $C = 0{,}187815$ sind. Die Dichtigkeit γ des Dampfes oder das Gewicht von einem Cubikmeter ist endlich $\gamma = 1 : v$. [XI.]

Die 299 vorläufig berührte mechanische Wärmetheorie beruht auf zwei Hauptsätzen, dem Satze von der **Aequivalenz von Wärme und Arbeit**, und dem Satze von der **Aequivalenz der Verwandlungen**: Der erste dieser Sätze, der sich schon in 303 angedeutet findet, und den **Mayer** (vergl. 299) in seinen „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur (Liebigs' Annalen 1842)" zuerst deutlich ausgesprochen hat, lässt sich analytisch durch die Gleichung

$$dQ = dU + A \,.\, dW = dU + A \,.\, p \,.\, dv \qquad 7$$

ausdrücken, wo Q die einem Körper während seiner Zustandsänderung mitgetheilte Wärmemenge bezeichnet, — U die von **Clausius** in seiner Abhandlung „Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen (Pogg. Annal. 1850)" eingeführte Summe der vom Körper aufgenommenen freien und der zu innerer Arbeit in demselben verbrauchten Wärme, für welche W. **Thomsen** (Phil. Mag. 1855) den Namen **Energie** des Körpers vorgeschlagen hat, — A das Wärmeequivalent eines Kilogrammeters, oder das (vergl. 303) $^1/_{424}$ einer Calorie betragende sog. **calorische Aequivalent der Arbeit**, — und W endlich die während der Zustandsänderung gethane äussere Arbeit, deren Element man bei sog. umkehrbarem Processe auch gleich dem Producte aus dem Drucke p auf die Flächeneinheit und dem entsprechenden Elemente dv der Volumenvermehrung gleich setzen kann. — Der zweite der angeführten Sätze findet sich schon bei **Carnot** in der 299 citirten Schrift, sowie darauf

gestützt in der Abhandlung „Bénoit-Pierre-Emile **Clapeyron** (Paris 1799: Professor an der École des ponts-et-chaussées in Paris), Mémoire sur la puissance motrice du feu (Journ. de l'éc. polyt. Nr. 23, 1834) angedeutet: namentlich aber hat ihn **Clausius** in seiner Abhandlung „Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie (Pogg. Annal. 1854)" deutlich ausgesprochen: Er beruht auf der Annahme, dass die Wärme die kleinsten Theile der Körper von einander zu entfernen, ihre sog. **Disgregation** zu vermehren suche, und dass sie dabei, v und p proportionale, innere und äussere Widerstände zu überwinden habe, also Wärme in **Werk** umgewandelt werden müsse, — besagt, dass bei einem auch umkehrbaren Kreisprocesse die algebraische Summe aller dieser Verwandlungen gleich Null sei, — und lässt sich analytisch durch die Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \qquad \text{oder} \qquad dQ = T \, . \, dS \qquad 8$$

ausdrücken, wo Q die frühere Bedeutung hat, — $T = 273^\circ + t$ die (nach 301) dem Producte $p \, . \, v$ proportionale absolute Temperatur des Körpers zu der Zeit bezeichnet, wo er das Wärmeelement dQ aufnimmt, — das Integral jedes Mal Null werden muss, so oft der Körper, dessen Veränderungen von irgend einem Anfangszustand beginnen, nach Durchlaufung beliebiger anderer Zustände wieder in den Anfangszustand zurückgelangt, — und S eine nur von dem augenblicklichen Zustande des Körpers abhängige, **Entropie** genannte Grösse ist, so dass $\int dS$ ebenfalls je nach Vollendung des Kreisprocesses Null wird. — Betrachtet man U, S und t als Functionen von v und p, und setzt zur Abkürzung

$$\frac{dU}{dp} = A \, . \, X \qquad \frac{dU}{dv} + Ap = A \, . \, Y \qquad 9$$

folglich

$$\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = \frac{1}{A}\left(\frac{d^2U}{dv \, . \, dp} + A - \frac{d^2U}{dp \, . \, dv}\right) = 1 \qquad 10$$

so erhält man aus 7

$$dQ = \frac{dU}{dp} \, . \, dp + \frac{dU}{dv} \, . \, dv + Apdv = A\,(Xdp + Ydv) \qquad 11$$

während aus 8

$$dQ = T\left(\frac{dS}{dp}\,dp + \frac{dS}{dv}\,dv\right)$$

folgt, so dass in Vergleichung mit 11

$$AX = T \, . \, \frac{dS}{dp} \qquad AY = T \, . \, \frac{dS}{dv}$$

sein muss, und somit nach 10

$$T = T\left(\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}\right) = \frac{T}{A}\left(T \, . \, \frac{d^2S}{dv \, . \, dp} + \frac{dS}{dv} \, . \, \frac{dt}{dp} - T \, . \, \frac{d^2S}{dp \, . \, dv} - \frac{dS}{dp} \, . \, \frac{dt}{dv}\right) =$$
$$= Y \, . \, \frac{dt}{dp} - X \, . \, \frac{dt}{dv} \qquad 12$$

Es können also 7 und 8 durch 11 und 12 ersetzt werden, und es sind auch diese letztern Gleichungen, sowie die aus ihnen durch Elimination von Y oder X hervorgehenden Gleichungen

$$dQ = A\left[X\,dp + dv\left(Y - X\,\frac{dt}{dv}\right) : \frac{dt}{dp}\right] = A\,[X \, . \, dt + Y \, . \, dv] : \frac{dt}{dp} \qquad 13$$

$$dQ = A\left[dp\left(Y\,\frac{dt}{dp} - X\right) : \frac{dt}{dv} + Y\,dv\right] = A\,[Y \, . \, dt - X \, . \, dp] : \frac{dt}{dv} \qquad 14$$

durch **Zeuner** an die Spitze der mechanischen Wärmetheorie gestellt, und besonders 13 und 14 als sehr fruchtbar bezeichnet worden, wie diess auch wirklich aus folgender Anwendung auf das Verhalten der Gase hervorgeht: Für die permanenten Gase hat man nach 301 : 4, wenn R eine Constante bezeichnet,

$$p v = R (273^\circ + t) \qquad \text{also} \qquad \frac{dt}{dp} = \frac{v}{R} \qquad \frac{dt}{dv} = \frac{p}{R} \qquad \textbf{15}$$

und, wenn man sie bei constantem Druck oder Volumen erwärmt, und mit c_p und c_v die specifische Wärme bei constantem Druck oder constantem Volumen bezeichnet, so wird im ersten Falle mit Hülfe von 14

$$c_p . dt = dQ = AY dt : \frac{dt}{dv} = \frac{ARY}{p} dt \qquad \text{oder} \qquad Y = \frac{c_p}{AR} . p \qquad \textbf{16}$$

und im zweiten Falle mit Hülfe von 13

$$c_v . dt = dQ = AX dt : \frac{dt}{dp} = \frac{ARX}{v} dt \qquad \text{oder} \qquad X = \frac{c_v}{AR} . v \qquad \textbf{17}$$

Da man bei Gasen c_p und c_v als constant ansehen kann, so ergibt sich somit nach 10

$$\frac{c_p}{AR} - \frac{c_v}{AR} = 1 \qquad \text{oder} \qquad c_p - c_v = AR \qquad \textbf{18}$$

welche Gleichung für A auf denselben Werth führt, welchen die Versuche ergaben (vergl. 303). — Setzt man

$$\frac{c_p}{c_v} = k \qquad \text{und somit nach 18} \qquad c_v (k - 1) = AR \qquad \textbf{19}$$

wo sich für permanente Gase aus verschiedenartigen Versuchen $k = 1{,}410$ ergeben hat, so gehen mit Hülfe von 15—17 für solche Gase 11, 13 und 14 nach leichter Reduction in

$$dQ = \frac{A}{k-1} . (v . dp + k . p . dv) \qquad \textbf{20}$$

$$dQ = c_v . \left[dT + (k-1) \frac{T}{v} . dv \right] \qquad \textbf{21}$$

$$dQ = c_p . \left[dT - \frac{k-1}{k} . \frac{T}{p} . dp \right] \qquad \textbf{22}$$

über, in welcher Form sie **Zeuner** nicht nur für Gase, sondern auch für überhitzte oder ungesättigte Dämpfe gibt, nur dass er für solche den Werth von c_v als variabel ansieht und als eine Function des Druckes und der Temperatur entwickelt. — Dehnt sich ein Gas ohne Zuführung und Entziehung von Wärme aus, so ist $dQ = 0$, also nach 20

$$\frac{dp}{p} + k . \frac{dv}{v} = 0 \qquad \text{oder} \qquad p . v^k = \text{Const.} \qquad \textbf{23}$$

Die graphische Darstellung des durch diese Gleichung ausgesprochenen Aenderungsgesetzes von p und v nennt man nach dem Vorgange von William John Macquorn **Rankine** (Edinburgh 1820; Civilingenieur in Glasgow) die **adiabatische Curve.** — Hat die Ausdehnung bei constanter Temperatur statt, oder ist $dT = 0$, so ergeben sich nach 21 und 22

$$Q = - c_p \frac{k-1}{k} T \log p + \text{Const.} = c_v (k-1) T . \log v + \text{Const.}$$

oder, wenn p_1 und v_1 die Anfangswerthe von p und v bezeichnen,

$$Q = \frac{k-1}{k} . T . \log \frac{p_1}{p} = (k-1) . T . \log \frac{v}{v_1} \qquad \textbf{24}$$

und zugleich ist nach 15

$$p \cdot v = R T = \text{Const.} \qquad 95$$

so dass in diesem Falle die graphische Darstellung des Aenderungsgesetzes von p und v nach 147 eine gleichseitige Hyperbel ergibt, welche Rankine **isothermische Curve** geheissen hat. — Noch im Vorbeiweg bemerkend, dass man die Hauptgleichung für Gase (immer aber nur unter der alten Voraussetzung umkehrbarer Processe) nach 21, 19, 15 auch auf die Form

$$dQ = c_v \cdot dt + A \cdot p \cdot dv \qquad 96$$

bringen kann, muss hier für weitere Deductionen und Anwendungen auf die in 299 aufgezählten Specialwerke verwiesen werden. Einige der für Wasserdampf erhaltenen Resultate sind neben empirischen Formeln im Texte aufgeführt worden. — Zum Schlusse mag noch auf die Schriften „**Papin**, La manière d'amolir les os. Amsterdam 1688 in 12., — Joh. Heinrich **Ziegler** (Winterthur 1738 — Winterthur 1818; Arzt und Rathsherr in Winterthur). De digestore Papini, ejus structura, effectu et usu. Basil. 1769 in 4., — **Kämtz**, Untersuchungen über die Expansivkraft der Dämpfe. Halle 1826 in 8., — **Regnault**, Relation des expériences entreprises pour déterminer les principales lois et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur (Mém. de Par. Vol. 21 et 26), Paris 1847—1862, 2 Vol. in 4., — etc.“ hingewiesen werden.

307. Die Dampfmaschine. Die doppelte Eigenschaft der Wasserdämpfe, einerseits einer grossen Expansivkraft fähig zu sein, anderseits dem Volumen nach durch Erkältung plötzlich fast ganz vernichtet zu werden (1 Vol. Dampf von 1 Atm. Spannkraft gibt 0,00059 Wasser) begründet ihre technisch so wichtige Anwendung auf die **Dampfmaschine,** bei welcher die im **Dampfkessel** (mit Sicherheitsventil) erzeugten Dämpfe mittelst der **Steuerung** abwechselnd über und unter den **Kolben** im **Dampfzylinder** und von da in den **Condensator** geführt werden, und dadurch eine **va et vient** genannte Bewegung des Kolbens hervorbringen, die durch **Watt'sches Parallelogramm** und **Balancier** in eine rotirende Bewegung verwandelt, und durch **Schwungrad** und **Regulator** gleichmässig erhalten wird. Dampfmaschinen, welche mit Dampf von mehreren Atmosphären Spannkraft arbeiten, können den Condensator entbehren und heissen dann **Hochdruckmaschinen.** Da der Druck einer Atmosphäre auf 1^{qcm} nahe 1,033 Kil. beträgt, so stellt (264)

$$A = 1{,}033 \cdot n \cdot v \cdot f \text{ Kilogrammeter}$$

für eine Druckfläche von f^{qcm} und eine Geschwindigkeit von v^m die mechanische Arbeit von n Atmosphären in 1^s vor.

Ohne über die Dampfkanone von **Archimed**, die Dampfkugeln von **Hero** und **Vitruv**, und die überhaupt schon der ältesten Zeit angehörende Idee „Wasser durch Feuer in Luft zu verwandeln“, näher einzutreten, — oder die durch die neueste Kritik beseitigten Ansprüche des Franzosen Salomon de **Caus** (1576—1626; Ingenieur Friedrich V. von der Pfalz) und des Engländers

Edward Somerset Marquis of **Worcester** (16.. — 1667; reicher Edelmann) zu besprechen, welche man früher aus des Erstern Schrift „Les raisons des forces mouvantes. Francfort 1615" und des Letztern „A Century of Inventions. London 1663" begründen wollte, — ist hervorzuheben, dass man wohl mit Recht die erste Idee einer wirklichen Dampfmaschine **Papin** (s. 4) zuschreibt. Nachdem dieser ausgezeichnete Mann 1681, wo er sich bei Boyle in London aufhielt, den nach ihm benannten Topf (s. 306) erfunden hatte, entdeckte er 1690 die capitale Eigenschaft des Dampfes, sich durch Abkühlung niederschlagen zu lassen (s. Acta Erudit. 1690), und damit die sog. atmosphärische Dampfmaschine, die nun allerdings nachträglich durch den englischen Capitän Thomas **Savery**, den Schmid Thomas **Newcomen** in Darmouth, etc., und den Knaben H. **Potter**, welcher, um der ihm langweiligen Handhabung der Hähne zu entgehen, dieselben durch Schnüre mit bewegten Theilen verband, und so eine erste selbstthätige Steuerung erstellte, — noch viele Verbesserungen erhielt, um dann freilich später durch die von **Watt** (s. 4) im Jahre 1765 durch Beigabe eines eigenen Condensators ermöglichte, 1784 mit dem nach ihm benannten Parallelogramme, und 1799 durch den von Leeds gebürtigen **Murray** mit der sog. Schiebersteuerung versehenen Maschine von doppelter Wirkung verdrängt zu werden. Auch die Anwendung der Dampfmaschine auf die Schifffahrt wurde schon 1707 durch **Papin**, 1736 durch den Engländer Jonathan **Hull** und 1775 durch den Franzosen Marquis de **Jouffroy** versucht, doch mit durchschlagendem Erfolge erst 1807 durch **Fulton** (s. 4), — ebenso diejenige auf Wagen 1770 durch Nicolas-Joseph **Cugnot** (Void im Dép. Meuse 1725 — Paris 1804; Genie-Officier) und 1803 durch Oliver **Evans** (Philadelphia? 1755 — New-York 1819; Mechaniker in New-York), doch eigentlich aber mit vollem Erfolge und zum Betriebe der Eisenbahnen erst von 1814 an durch **Stephenson** (s. 4), als er die, allerdings schon 1724 durch Jakob **Leupold** (Planitz bei Zwickau 1674 — Leipzig 1727; Mechaniker in Leipzig) in seinem „Theatrum machinarum generale. Leipzig 1723—1739, 9 Vol. in fol." vorgeschlagene, aber bald wieder vergessene Hochdruckmaschine dafür anwenden, und später (1829) noch die für hinlängliche Dampflieferung nothwendige Erfindung der Heizröhren von **Séguin** (s. 4 und Arago Oeuvres V) benutzen konnte. — Vergleiche für weitern Detail „**Arago**, Notice historique sur les machines à vapeur (Annuaire 1829, 1830, 1837; oeuvres V), — Jean-Nicolas-Pierre **Hachette** (Mésières 1769 — Paris 1834; Professor der darstellenden Geometrie in Paris), Histoire des machines à vapeur. Paris 1830 in 8., — **Stuart**, History of the Steam-Engine. London 1831 in 8., — Christ. **Bernoulli**, Dampfmaschinenlehre. Basel 1833 in 8. (5. A. von Böttcher, Stuttgart 1865), — François-Marie Guyonneau Comte de **Pambour** (Noyen 1795; Artillerie-Officier), Traité théorique et pratique des machines locomotives. Paris 1835 in 8. (2. éd. 1840; deutsch von Schnuse, Braunschweig 1840), und: Théorie analytique des machines à vapeur. 2 éd. Paris 1844 in 4., — **Tredgold**, On the Steam-Engine and on Steam-Navigation. London 1839, 2 Vol. in 4., — **Bataille** et **Jullien**, Traité des machines à vapeur. Paris 1847—1849 in 4., — **Zeuner**, Vortrag über die Dampfmaschine, das Dampfschiff und die Locomotive, nebst deren Geschichte (Zürch. Blätter für Kunst und Literatur 1857), und: Die Schiebersteuerungen. Freiberg 1858 in 8. (3. A. Leipzig 1868; franz. durch A. Debize et E. Mérijot, Paris 1869; engl. durch M. Müller, London 1869), — **Rankine**, A Manual of the Steam-Engine and other Prime-Movers. London 1859 in 8., —

Reuleaux. Kurzgefasste Geschichte der Dampfmaschine (Anhang zur 5. Aufl. von Scholl's Führer des Maschinisten, Braunschweig 1860), — **F. Jacqmin**, Professor an der École des ponts-et-chaussées in Paris: Des machines à vapeur. Paris 1870, 2 Vol. in 8., — etc.“

308. Die Wärmeerzeugung. Ausser dem Erzeugen der Wärme durch mechanische Arbeit (pneumatisches Feuerzeug, Feuermachen der Indianer), und ihrem Freiwerden bei Erniedrigung des Aggregationszustandes (303) wird bei Concentration und Absorption der Sonnenstrahlen (Brennpunct, schwarze Tücher, etc.), bei chemischen Processen (Zündlampe, etc.), etc., Wärme erhalten. Besonders wichtig ist jedoch die Erzeugung der Wärme beim Verbrennen; damit dasselbe aber fortdauern kann, müssen nicht nur Brennstoff und Zündstoff hinlänglich vorhanden sein, sondern auch der Erstere durch das Verbrennen hinlänglich erwärmt werden.

Die Beleuchtung und Beheizung mit Gas soll Philippe **Lebon** (Brachay en Haute-Marne 1768 — Paris 1804) erfunden, und darauf 1798 ein Patent erhalten haben, nachdem er zuerst als Narr behandelt worden war. — Die nach Joh. Wolfgang **Döbereiner** (Bug bei Hof 1780 — Jena 1849; Professor der Chemie in Jena) benannte Zündlampe beruht auf der Eigenschaft des Platinschwammes, von einem durch Luft auffallenden Strom von Wasserstoffgas bis zum Glühen erhitzt zu werden, und dann diesen zu entzünden, — die von **Davy** zu Gunsten der Grubenarbeiter erfundene Sicherheitslampe dagegen auf dem Umstande, dass eine Flamme durch umgebendes Drahtgeflecht verhindert wird, dem äussern Raume hinlängliche Wärme zu geben, um durchschlagen zu können. — Zum Schlusse mag auch noch der Lampen mit doppeltem Luftzuge gedacht werden, welche den Namen ihres Erfinders **Argand** tragen; vergl. dessen Schrift „Découverte des lampes à courant d'air et à cylindre. Genève 1785.“

XXXI. Der Magnetismus.

309. Die magnetischen Körper. Manche Körper, besonders der sog. Magneteisenstein, besitzen die Eigenschaft, kleine Stücke Eisen, Stahl, Kobalt, etc. anzuziehen, und bei freier Beweglichkeit eine bestimmte Richtung gegen die Weltgegenden anzunehmen, — sie heissen **magnetisch**. An jedem Magnete sind Paare von Stellen vorhanden, in denen sich diese Anziehungskraft concentrirt, die sog. **Pole**, von denen der Eine, entsprechend den sofort zu entwickelnden Eigenschaften, **Nordpol**, der andere **Südpol** heisst, — und wenn man einen Magnet zerbricht, so zeigt jedes Bruchstück wieder beide Pole.

Den Namen Magnet-Eisenstein leitet man von der Stadt Magnesia in Lydien, unweit dem heutigen Smyrna, ab, bei der dieses Mineral zuerst gefunden worden sein soll. Schon Cajus Secundus **Plinius** (Como oder Verona 23 — 79 VIII 25 bei Untersuchung des furchtbaren Vesuv-Ausbruches, der

Herculanum und Pompeji verschüttete; römischer Rechtsgelehrter, Präfekt und Admiral) spricht in seinem berühmten Sammelwerke „Historia naturalis s. historia mundi libri XXXVII (Parma 1481 in fol., und später wiederholt lat. und übers., so z. B. franz. von Poinsinet de Sivry, Paris 1771—1782, 12 Vol. in 4.)“ ausdrücklich davon, dass dieses Mineral aus Distanz Eisen anziehe und festhalte, — die polaren Eigenschaften scheinen dagegen erst wesentlich später, und vielleicht (vergl. 314) zuerst in China entdeckt worden zu sein. — Vergl. für die Lehre vom Magnetismus ausser der in 245 gegebenen allgemeinen Literatur und den in 313 aufgezählten Specialschriften: „William **Gilbert** (Colchester 1540 — London 1603; Leibarzt von Elisabeth und Jakob I.), De magnete, magneticisque corporibus et de magno magnete tellure, physiologia nova. Londini 1600 in 4. (Auch Stettin 1628 und 1633), — **Kircher**, Magnes sive de arte magnetica opus tripartitum. Romae 1654 in fol., — **Musschenbroek**, Dissertatio physica de magnete. Viennae 1754 in 4., — Antoine-César **Becquerel** (Châtillon-sur-Loing im Dép. Loiret 1788; Professor und Mitglied der Academie in Paris), Traité de l'électricité et du magnétisme. Paris 1834 bis 1840, 7 Vol. in 8., — **Mousson**, Bemerkungen über die richtende Kraft der Magnete. Zürich 1846 in 4., — **Matteucci**, Cours spécial sur l'induction, le magnétisme de rotation, le diamagnétisme, et sur les relations entre la force magnétique et les actions moléculaires. Paris 1854 in 8., — **Beer**, Einleitung in die Electrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik. (Herausg. von Plücker). Braunschweig 1865 in 8., — etc.“

310. Die Grundeigenschaften. Nähert man dem einen Pole eines Magneten den einen Pol eines andern Magneten, so findet Anziehung oder Abstossung statt, je nachdem die beiden Pole ungleichnamig oder gleichnamig sind; nähert man ihm dagegen das eine Ende eines des Magnetismus fähigen Stabes, so findet nicht nur immer Anziehung statt, sondern das andere Ende zeigt sofort gleichnamigen Magnetismus mit dem diese sog. **Vertheilung** bewirkenden Pole, — wenn man aber den Stab zurückzieht, so behält oder verliert er seine magnetischen Eigenschaften, je nachdem er aus Stahl oder weichem Eisen besteht. Man ist hiedurch auf die Idee gekommen, dass jeder des Magnetismus fähige Körper aus kleinen Magneten bestehe, bei denen aber ursprünglich die Pole nach den verschiedensten Richtungen hin liegen und sich neutralisiren, — dass ein solcher Körper sodann zum Magnete werde, wenn man durch äussern Einfluss die Theilchen so drehen könne, dass die gleichnamigen Pole wenigstens annähernd nach derselben Richtung hin liegen, — dass diess (aber sodann auch das Rückdrehen nach Entfernung der Ursache) um so leichter gehe, je weniger Widerstand gegen solche Drehungen vorhanden oder je kleiner die sog. **Coercitivkraft** sei, — etc.

Weiches Eisen wird beim Annähern an einen Magneten augenblicklich magnetisch, während Stahl eine geraume Zeit braucht, um eine Spur, eine noch grössere, um ein Maximum von Magnetismus zu erhalten.

311. Die künstlichen Magnete. Künstliche Magnete werden aus Stahlstäben durch Streichen mit einem Magnete erzeugt: Beim sog. **einfachen Striche** wird der Magnet wiederholt mit dem einen Pole auf die Mitte des zu magnetisirenden Stabes aufgesetzt, und dann bis an's Ende fortgeführt, wodurch diess Ende den ungleichnamigen Pol erhält. Beim sog. **Doppelstriche** setzt man dagegen die beiden Pole eines Hufeisenmagneten in der Mitte des zu magnetisirenden Stabes auf, bewegt beide Pole bis an das eine Ende des Stabes, führt sie dann, ohne die Lage zu verändern, über den ganzen Stab bis an das andere Ende, und dann wieder bis zur Mitte zurück, wodurch jedes Ende in Vergleich mit dem ihm zunächst gekommenen Pol einen ungleichnamigen Pol erhält. Verbindet man die beiden Pole durch ein Stück weiches Eisen, einen sog. **Anker**, und belastet letztern von Zeit zu Zeit etwas mehr (oder speist den Magneten), so steigert sich die magnetische Kraft, während das Abreissen des Ankers sie schwächt.

Das Erzeugen künstlicher Magnete durch Streichen kannte Georg **Hartmann** schon um 1543. Die Hufeisen-Magnete und deren Armirung führte spätestens um die Mitte des vorigen Jahrhunderts Johannes **Dietrich** (Basel 17.. — Basel 1758; Mechaniker in Basel) ein; inwieweit ihn dazu Daniel **Bernoulli** veranlasste, weiss man nicht, dagegen ist es gewiss, dass Letzterer durch Versuche mit solchen Dietrich'schen Magneten das Gesetz fand: Die Tragkraft der Hufeisen-Magnete ist proportional ihren Oberflächen oder den dritten Wurzeln aus den Quadraten ihrer Gewichte.

312. Der Diamagnetismus. Während sich ein zwischen die Pole eines Hufeisen-Magneten gebrachter magnetischer Körper **axial** stellt, so nehmen dagegen manche andere Körper (Wismuth, Holz, etc.), wie wenn der Magnet sie ebenfalls polar erregen, aber dabei jeder seiner Pole sich in ihnen gleichnamige Pole gegenüberstellen würde, eine dazu senkrechte **equatoriale** Lage an, und heissen **diamagnetisch**.

Faraday wies in einer vom November 1845 datirenden Abhandlung „On new magnetic actions and on the magnetic condition of all matter" (Phil. Trans. 1846) zuerst nach, dass es wohl keinen gegen den Magnet ganz indifferenten Körper gebe, und theilte die Körper in paramagnetische (voran Eisen) und diamagnetische (voran Wismuth) ein. Das Weitere siehe im Texte.

313. Der Erdmagnetismus. Hängt man eine Stahlnadel in ihrem Schwerpunkte an einem ungedrehten Coconfaden auf, und macht sie sodann magnetisch, so nimmt sie nach einer Reihe von Schwingungen nicht mehr eine Ruhelage an, welche eine bestimmte Abweichung vom Meridian oder eine sog. **Declination**, und eine Abweichung von der Horizontalen oder eine sog. **Incli-**

nation zeigt, sondern setzt auch einen von bestimmter **Intensität** zeugenden Widerstand entgegen, wenn man sie aus dieser Lage entfernen will. — Bezeichnet I die Intensität des Erdmagnetismus, H ihre horizontale, V ihre verticale Componente, K das Trägheitsmoment, m die Masse und d die Entfernung eines Poles der Magnetnadel von ihrer Drehaxe, also d . m = M das sog. **magnetische Moment** der Nadel, so hat man, da eine Magnetnadel offenbar wie ein Pendel schwingt,

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{K}{M \cdot H}} \qquad t_2 = \pi \sqrt{\frac{K}{M \cdot I}} \qquad t_3 = \pi \sqrt{\frac{K}{M \cdot V}} \qquad 1$$

wo t_1 die Schwungzeit einer horizontal, t_2 die einer im magnetischen Meridiane, und t_3 die einer senkrecht zu demselben schwingenden Nadel ist. Für die Inclination i hat man sodann

$$\text{Sin}\, i = V : I = t_2^2 : t_3^2 \qquad 2$$

und wenn ein Magnetstäbchen von a^{mm} Länge, b^{mm} Breite und p^{mgr} Gewicht zu einer einfachen Schwingung t^s braucht, und in einer zum magnetischen Meridiane senkrechten Lage eine in der Entfernung r befindliche Nadel um den Winkel v ablenkt, so setzt man nach Gauss

$$H = \frac{\pi}{rt} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6r\, \text{Tg}\, v}}\, p \qquad V = H \cdot \text{Tg}\, i \qquad I = \frac{H}{\text{Cos}\, i} \qquad 3$$

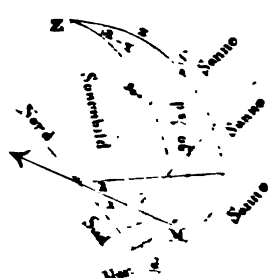
Declination, Inclination und Intensität sind aber verschiedenen, an längere und kürzere Perioden gebundenen Variationen unterworfen (s. 392), und um diese zu bestimmen, hat Gauss eigene Magnetometer construirt: Das zur Bestimmung der Declinationsvariationen bestimmte **Unifilar-Magnetometer** besteht aus einem, an einem ungedrehten Coconfaden aufgehängten Magnetstabe, an dessen einem Ende ein verticaler Spiegel sitzt; an einem 6—8′ vom Spiegel entfernten Pfeiler ist ein Fernrohr, und unter demselben eine Scale festgemacht; die Beobachtung besteht darin, dass man die im Spiegel sichtbare Scale mit einem fixen Striche vergleicht, den man an einer doppelt so fernen Wand hinter dem Magnetometer gemacht hat. Das zur Bestimmung der Variationen der Horizontalintensität bestimmte **Bifilar-Magnetometer** besteht dagegen aus einem Magnetstabe, der an zwei von seinem Schwerpuncte gleich weit entfernten und gleich langen Drähten aufgehängt ist, die hinwieder an einer drehbaren Scheibe befestigt sind; Letztere wird sodann gedreht, bis der Magnetstab senkrecht zum magnetischen Meridiane steht; die von Länge und Abstand der Drähte und dem Gewichte des Stabes abhängige und also constante Torsion steht nun augenblicklich mit der horizontalen Intensität im Gleichgewichte; wie

sich aber Letztere verändert, so verändert sich auch die Lage des Stabes, und diese wird analog wie beim Unifilar beobachtet.

Die Declination der Magnetnadel war schon vor Christoph **Columbus** (Genua 1436 — Valladolid 1506), dem berühmten Entdecker von Amerika, bekannt, dagegen scheint ihm die Entdeckung der örtlichen Verschiedenheit derselben (s. 392) zugeschrieben werden zu müssen. Die Inclination erkannte **Hartmann** um 1544, und sodann wahrscheinlich unabhängig von ihm etwas später auch der englische Compassmacher Robert **Normann** zu Ratcliff, der mit einem von ihm construirten Inclinatorium 1576 die magnetische Neigung in London zu 71° 50′ bestimmte. — Schon Daniel **Bernoulli** bemühte sich mit Erfolg, die Instrumente zur Bestimmung der Declination und Inclination zu verbessern, — seine Abhandlung „Sur la meilleure manière de construire les boussoles d'inclinaison (Mém. de Par. 1743)" wurde von der Pariser-Academie gekrönt, — und die von **Dietrich** nach seinen Ideen construirten Instrumente fanden vielen Beifall; aber erst **Gauss** gelang es auf die im Texte angegebene Weise in Theorie und Praxis feste Ordnung und, zum Theil allerdings mit Benutzung schon früher ausgesprochener Ideen, wie z. B. von „**Poggendorf**, Neues Instrument zum Messen der magnetischen Abweichung (Pogg. Annal. 1827)", gute Hülfsmittel einzuführen, vergl. seine Schrift „Intensitas vis magneticæ terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gotting. 1833 in 4. (Auch Comm. Gott. VIII und deutsch in Bd. 28 von Pogg. Annal.)" und mehrere Abhandlungen, welche er in die von ihm und Wilh. **Weber** herausgegebenen „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereines. Göttingen 1837—1841, 5 Hefte in 8." einrückte. — Zum Schlusse mag noch einerseits angeführt werden, dass, wenn i die Neigung der Magnetnadel im magnetischen Meridian, i′ diejenige in einer mit demselben den Winkel d bildenden Ebene bezeichnet, nach Daniel **Bernoulli**

$$\mathrm{Tg}\, i' = \mathrm{Tg}\, i \,.\, \mathrm{Sec}\, d \qquad 4$$

also die Inclination im magnetischen Meridian am kleinsten ist, — anderseits, dass Jwan Michailowitsch **Simonoff** (Astrachan 1785 — Kasan 1855; Professor der Astronomie in Kasan) 1842 in Grunerts Archiv (III 215—217) zeigte, dass, wenn man am Südende einer prismatischen Magnetnadel ein Spiegelchen, am Nordende ein den horizontalen Stand bewirkendes Gegengewicht anbringe, — mit einem Sextanten die Distanz d der Sonne von ihrem Spiegelbilde messe, — endlich für die Beobachtungszeit Azimuth a und Zenithdistanz z der Sonne berechne, aus der Formel



$$\mathrm{Sin}\,\frac{d}{2} = \mathrm{Sin}\, z \,.\, \mathrm{Cos}\,(a - \alpha) \qquad 5$$

oder, wenn man auch noch nach der Culmination der Sonne eine correspondirende Beobachtung δ mache, ohne vollkommene Horizontalität der Nadel voraussetzen zu müssen, aus der Formel

$$\mathrm{Sin}\,\alpha \,.\, \mathrm{Sin}\, z \,.\, \mathrm{Sin}\, a = \mathrm{Sin}\,\frac{d-\delta}{4} \,.\, \mathrm{Cos}\,\frac{d+\delta}{4} \qquad 6$$

das Azimuth α der Nadel gefunden werden könne, — endlich, dass Johann **Lamont** (Braemar in Schottland 1805; Conservator der Sternwarte Bogenhausen bei München) für Reisende unter dem Namen eines magnetischen

Theodoliten eine Art betreffendes Universalinstrument erstellt und in seinem „Handbuch des Erdmagnetismus. Berlin 1849 in 8." beschrieben hat.

314. Die Boussole. Eine über einem horizontal gestellten, getheilten, mit einem Diopterlineal oder Fernrohr verbundenen Kreise schwingende, gegen die Inclination equilibrirte Magnetnadel heisst **Boussole** oder **Compass,** und kann theils bei Kenntniss der Declination dazu dienen, die Weltgegenden oder die Orientirung irgend eines Punctes aufzufinden, — theils, unter Annahme einer während der Messung unveränderlichen Declination, und wenn etwa Fehler von 10′ übersehen werden können, zum Winkelmessen, indem man am Kreise die Differenz des Standes der Nadel abliest, welche entsteht, wenn man Diopter oder Fernrohr successive auf zwei Winkelobjecte einstellt.

Der Compass wurde muthmasslich durch den berühmten venetianischen Reisenden **Marco Polo** (1250? — 1323?) aus China nach Europa gebracht, und jedenfalls nicht erst, wie früher vielfach gelehrt wurde, um 1302 durch den neapolitanischen Lootsen Flavio **Gioja** erfunden. Seinen früher sehr verbreiteten Gebrauch zum Winkelmessen verdankte er hauptsächlich dem Umstande, dass bei ihm jede Richtung im Vergleiche mit derselben Grundrichtung gegeben, und somit z. B. beim Polygonisiren (vergl. 215) je das Winkelmessen an der zweiten Ecke überflüssig wird.

XXXII. Elektricität und Galvanismus.

315. Die elektrische Anziehung. Manche Körper erhalten durch Reiben, namentlich Glas und Harze durch Reiben mit Seide und Wolle, eine Anziehungskraft, welche sich von der magnetischen dadurch unterscheidet, dass sie auf jeden leichten Körper wirkt und nicht an Pole gebunden ist, — man heisst sie elektrische Anziehung. Andere Körper werden dagegen durch Reiben, wenigstens scheinbar, nicht elektrisch; nähert man ihnen aber einen elektrischen Körper, so theilt sich die Elektricität ihrer ganzen Oberfläche mit. Solche Körper, wie Metalle, Kohle, lebende oder feuchte Gegenstände, etc., heissen **Leiter** oder **Conductoren,** — Körper der ersten Art dagegen, wie, ausser Glas und Harzen, Seide, trockene Luft, etc. **Nichtleiter** oder **Isolatoren.**

Die elektrische Anziehung wurde schon von den Alten beim Bernstein (ἤλεκτρον) bemerkt, und so z. B. von **Plinius** in seiner Naturgeschichte erwähnt. Nach und nach wurden dann auch noch andere derselben fähige Körper entdeckt, und schon Will. **Gilbert** führt in seiner Schrift „De magnete (vergl. 309)" an, dass man dieselbe durch Reiben bei Glas, Schwefel, Siegellack, etc. hervorrufen könne. Otto von **Guericke** construirte sich etwa 1672 aus einer Schwefelkugel eine erste Elektrisirmaschine, bemerkte das elektrische

Licht, den Wechsel von Anziehen und Abstossen, etc., — **Boyle** fand um dieselbe Zeit, dass Trockenheit und Wärme der Elektricität günstig seien, — **Newton** rieb etwa 1675 eine, auf einem messingenen Ringe ruhende Glasplatte, sah darunter liegende Papierchen hüpfen, und überzeugte sich, dass der Versuch besser gelang, wenn er mit seinem Rocke (Wolle), als wenn er mit einer Serviette rieb, — Francis **Hawksbee** (16..—1713?; Curator of experiments bei der Roy. Society) bemerkte im Anfange des 18. Jahrhunderts das Geräusch des Ausströmens, das Gefühl von Spinnewebe, etc., — Stephen **Gray** machte um 1727 zuerst in deutlicher Weise auf den im Texte berührten Unterschied zwischen Conductoren und Isolatoren aufmerksam, und sprach schon 1734 aus, dass die elektrische Kraft mit Donner und Blitz von gleicher Natur sein möchte, — **Dufay** wiederholte fast gleichzeitig Gray's Versuche, zog Funken aus dem menschlichen Körper, wies den Unterschied von Glas- und Harz-Elektricität nach, — etc. So bildete sich im Laufe der Zeit eine neue physikalische Disciplin aus, für deren weitere Geschichte auf die folgenden Nummern verwiesen werden mag, während hier vorläufig noch eine kurze, übrigens auch in 316 u. f. ergänzte Literatur angehängt werden soll: „**Hawksbee**, Physico-mechanical experiments on various subjects touching light and electricity. London 1709 in 4., — **Nollet**, Essai sur l'électricité des corps. Paris 1747 in 12. (Auch 1750, 1764, 1771), und: Lettres sur l'électricité des corps. Paris 1753, 3 Vol. in 12. (Auch 1760), — Jean **Jallabert** (Genf 1712 — Nyon 1768; Professor der Physik und später Syndic in Genf; vergl. Bd. 4 meiner Biographieen), Expériences sur l'électricité. Genève 1748 in 8. (Paris 1749; deutsch Basel 1750 und 1771), — **Priestley**, History and present state of Electricity. London 1765, 2 Vol. in 8. (1767 in 4.; deutsch von Krünitz, Berlin 1772), — Ami **Lullin** (Genf 1748 — Genf 1816; Syndic von Genf) et **Saussure**, Dissertatio physica de electricitate. Genevæ 1766 in 8., — **Galvani**, De viribus electricitatis in motu musculari Commentarius (Comm. Bonon. 1791 und „cum Jo. Aldini dissertatione et notis", Mutinæ 1792 in 4.), — P. **Sue** (aîné; Professor der Medicin in Paris), Histoire du galvanisme. Paris 1802, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1805, 4 Vol.), — Charles-Bernard **Desormes** (Dijon 1777 — Verberie in Oise 1862; technischer Chemiker in Verberie) et **Hachette**, Mémoires pour servir à l'histoire de cette partie de l'électricité qu'on nomme galvanisme (Annal. de Chim. 44), — **Volta** (angeblich Configliachi), L'identità del fluido elettrico col cosi'detto fluido galvanico vittoriosamente dimostrata. Pavia 1814 in 4., — Giuseppe **Zamboni** (Verona 1776 — Verona 1846; Professor der Physik zu Verona), L'elettromotore perpetuo. Verona 1820—1822, 2 Vol. in 8., — **Oersted**, Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam. Hafniæ 1820 in 4. (Deutsch in Gilbert's Annalen 66), — **Poggendorf**, Physisch-chemische Untersuchungen zur nähern Kenntniss des Magnetismus der Volta'schen Säule (Oken's Isis 1821), — Félix **Savary** (Paris 1797 — Estagel 1841; Professor der Astronomie zu Paris), Mémoire sur l'application du calcul aux phénomènes électrodynamiques. Paris 1823 in 4., — Georg Simon **Ohm** (Erlangen 1787 — München 1854; älterer Bruder des Berliner-Mathematikers Martin Ohm; Lehrer der Mathematik zu Nidau, Neuenburg, etc., zuletzt Professor der Physik zu München), Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Berlin 1827 in 8., — **Faraday**, Experimental researches in Electricity. Ser. 1—30 (Phil. Trans. 1831—1855), — Johann Heinrich Jakob **Müller** (Cassel 1809; Professor der Physik zu Freiburg; vergl. Pouillet 245), Kurze Darstellung

des Galvanismus. Darmstadt 1836 in 8., und: Ueber den Sättigungspunct der Elektromagnete (Pogg. Annalen 1851—1852), — Moritz Hermann **Jacobi** (Potsdam 1801; älterer Bruder des Mathematikers in 4.; erst Baumeister in Königsberg, dann Professor der Baukunst zu Dorpat, jetzt Academiker in Petersburg), Die Galvanoplastik. Petersburg 1840 in 8., — Giovanni Antonio Amedeo **Plana** (Voghera 1781 — Turin 1864; Neffe von Lagrange; Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Turin, auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie), Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices. Turin 1845 in 4., — **Neumann**, Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme (Berl. Abh. 1847), — Otto Ernst Julius **Seyffer** (Stuttgart 1823; Professor der Physik in Stuttgart), Geschichtliche Darstellung des Galvanismus. Stuttgart 1848 in 8., — **Schellen**, Der elektromagnetische Telegraph in den Hauptstadien seiner Entwicklung. Braunschweig 1850 in 8. (4. A. 1867), — Peter Theophyl **Riess** (Berlin 1805; Professor und Academiker in Berlin), Die Lehre von der Reibungselektricität. Berlin 1853, 2 Bde. in 8., — und: Abhandlungen zu der Lehre von der Reibungselektricität. Berlin 1867 in 8., — **De la Rive**, Traité de l'électricité théorique et appliquée. Paris 1854—1858, 3 Vol. in 8. (Engl. London 1858—1863), — Elvin Bruno **Christoffel** (Montjoie 1829; Professor der Mathematik in Zürich und Berlin), De motu permanenti electricitatis in corporibus homogenis. Berolini 1856 in 4., — Ernst Christian Julius **Schering** (Sandbergen bei Lüneburg 1833; Professor der Mathematik zu Göttingen), Zur mathematischen Theorie elektrischer Ströme. Göttingen 1857 in 8., — J. **Gavarret**, Professor der Physik in Paris: Traité de l'électricité. Paris 1857, 2 Vol. in 8. (Deutsch von Arendt, Leipzig 1860), — **Briggs**, Story of the Telegraph. London 1858 in 4., — Taliaferro P. **Shaffner** of Kentucky: The Telegraph Manual. New-York 1859 in 8., — Gustav Heinrich **Wiedemann** (Berlin 1826; Professor der Physik in Basel und Karlsruhe), Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Braunschweig 1861—1863, 2 Bde. in 8., — Christoph Julius **Dub** (Berlin 1817; Lehrer in Berlin), Die Anwendung des Elektromagnetismus mit besonderer Berücksichtigung der Telegraphie. Berlin 1863 in 8., — etc."

316. Grundeigenschaften. Um diese Erscheinungen zu erklären, nimmt man gewöhnlich zwei Flüssigkeiten, die **positive** oder **Glas-Elektricität**, und die **negative** oder **Harz-Elektricität** an, deren Trennung den elektrischen Zustand begründet; dabei stösst sich gleichnamige Elektricität ab, während sich ungleichnamige anzieht, wie sich diess z. B. bei den sog. **Elektroskopen** aus Hollundermarkkügelchen, dem elektrischen Glockenspiele, Tanze und Hagel, etc. zeigt. — Nähert man einem elektrischen Körper einen isolirten Leiter, so wird Letzterer durch Vertheilung ebenfalls elektrisch, — die ungleichnamige Elektricität wird angezogen, die gleichnamige abgestossen. Bei grösserer Annäherung wächst die elektrische Spannung, und wird am Ende stark genug, um die schlechtleitende Luft zu durchbrechen, — es entsteht ein Funke, und der Leiter ist nun ganz mit derselben Elektricität bedeckt, wie

der elektrische Körper. Hätte man aber vor dem Ueberschlagen den Leiter zurückgezogen, so hätte er keine Spur von Elektricität gezeigt, — dagegen die dem elektrischen Körper entgegengesetzte, wenn man ihm vor dem Zurückziehen durch Berührung des abgewandten Theiles die abgestossene Flüssigkeit entzogen hätte. Hierauf beruht das sog. **Laden** des einer, z. B. durch Lederkissen mit Mussivgold geriebenen Glastafel gegenüberstehenden Conductors, oder die sog. **Elektrisirmaschine,** — einer beidseitig metallisch belegten sog. **Franklin'schen Tafel** oder der **Leydnerflasche,** — des auf einen, mit einem Fuchsschwanz gepeitschten Harzkuchen aufgesetzten Metalldeckels oder der sog. **Elektropher,** etc.

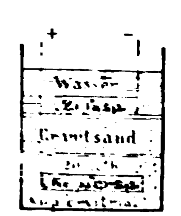
Franklin schlug vor, die Glaselektricität **positive** Elektricität zu nennen, die Harzelektricität **negative,** da er in der erstern einen Ueberschuss, in der zweiten einen Mangel an Elektricität zu erkennen glaubte; Georg Christoph **Lichtenberg** (Ober-Ramstädt bei Darmstadt 1744 — Göttingen 1799; Professor der Physik in Göttingen; vergl. sein Elogium durch Kästner in Comm. Gott. 14) führte dagegen in seinen Abhandlungen „Super nova methodo motum ac naturam fluidi electrici investigandi (Comm. Gott. 1777—1778)" den gegenwärtigen Gebrauch ein, durch die Bezeichnungen positiv und negativ nur schlechtweg den Gegensatz anzudeuten, und machte zugleich Letztern durch die nach ihm benannten strahligen oder aus concentrischen Ringen bestehenden Figuren sichtbar, welche man beim Aufstreuen von Harzstaub auf einen Harzkuchen erhält, je nachdem man in denselben mittelst eines aufgesetzten Metallringes einen positiven oder negativen Funken überschlagen lässt. — Den sog. Conductor der Elektrisirmaschine soll Georg Matthias **Bose** (Leipzig 1710 — Magdeburg 1761; Professor der Physik in Wittenberg), einer der eifrigsten und namentlich durch seine „Tentamina electrica. Viteberga 1746 in 4." bekannt gewordene Elektriker seiner Zeit, um 1741 erfunden haben. Die erste Elektrisirmaschine in neuerer Gestalt construirte Christian August **Hausen** (Dresden 1693 — Leipzig 1743; Professor der Mathematik zu Leipzig) um 1743, die erste Scheibenmaschine Martin **Planta** (Süs 1727 — Marschlins 1777; Lehrer am Seminar in Haldenstein und Marschlins; vergl. Bd. 2 meiner Biographieen) um 1755; in den letzten Jahren sind aber allerdings diese Apparate durch die von A. **Töpler** und W. **Holtz** construirten, äusserst kräftigen Influenzmaschinen (vergl. für sie Pogg. Annal. 125—127) so ziemlich in den Hintergrund gestellt worden. — Die Verstärkungsflasche wurde im Herbst 1745 durch Ewald Georg von **Kleist** (17..—1748; Hofgerichtspräsident zu Cösslin in Hinterpommern), bald darauf auch von einem Privatmanne in Leyden, des Namens **Cunaeus,** erfunden, und von **Nollet,** der sie von Leyden her kennen lernte, mit dem Namen der Leydner-Flasche, von John **Bevis** (Old Sarum 1695 — London 1771; praktischer Arzt in London) aber zuerst mit Zinnfolie belegt. Die ungefähr gleichzeitig von **Franklin,** vergl. dessen „New experiments and observations on electricity made at Philadelphia and communicated in several letters to Mr. Collinson in London. London 1751 in 4. (Suppl. 1754, 5. ed. 1774; deutsch von Wilke, Leipzig 1758)", benutzte und nach ihm benannte, belegte Tafel, ist wesentlich mit der Verstärkungsflasche ein- und dasselbe; wichtiger sind seine Versuche über die Luft-

elektricität, welche ihn zur Erfindung des elektrischen Glockenspieles und der Blitzableiter führten, und durch welche er den von **Gray** (s. 815) noch nicht gegebenen wirklichen Nachweis für die Identität des elektrischen Funkens und des Blitzes leistete, — leider allerdings auch Georg Wilhelm **Richmann** (Pernau in Lifland 1711 — Petersburg 1753; Academiker in Petersburg) zu den Versuchen veranlasste, welche ihm bei einem Gewitter am 26. Juli (a. St.) 1753 den jähen Tod brachten. — Der im Texte beschriebene Elektrophor wurde 1775 durch **Volta** eingeführt, siehe dessen „Lettere diverse sull' elettroforo perpetuo (Scelta di opuscoli di Milano 1775—1776; auch Rozier 1776)". Der ebenfalls von ihm eingeführte **Eudiometer**, vergl. seine „Descrizione dell' Eudiometro ad aria infiammabile (Brugnatelli's Annal. chim. 1790)", beruht darauf, dass, wenn man atmosphärischer Luft mehr als das Doppelte ihres Sauerstoffgehaltes an Wasserstoff zufügt, und durch das Gemenge einen kräftigen elektrischen Funken durchschlagen lässt, sich sämmtlicher Sauerstoff mit dem nöthigen Wasserstoff (vergl. 250) zu Wasser verbindet.

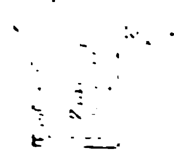
817. Die galvanischen Ströme und Batterieen. Wie in demselben Augenblicke, wo entgegengesetzt elektrische Körper durch einen Leiter, so z. B. die beiden Belegungen einer Leydnerflasche durch einen sog. Auslader, verbunden werden, ein momentaner elektrischer Strom entsteht, so können auch dauernde elektrische, oder nach ihrem Entdecker sog. **Galvani**'sche Ströme durch chemische Wirkung erregt werden: Taucht man nämlich eine Zinkplatte in verdünnte Schwefelsäure, so entwickelt sich Wasserstoffgas, das zunächst an der Platte aufsteigt, — amalgamirt zeigt sie sich fast unempfindlich gegen die Säure, — setzt man aber noch eine Kupferplatte (—) in die Säure und verbindet sie metallisch mit der Zinkplatte (+), so entsteht ein elektrischer Strom, der durch das nunmehrige Aufsteigen des Wasserstoffgases am Kupfer sichtbar wird. — Einen kräftigern Strom erhält man durch Vereinigung mehrerer Elementenpaare zu einer Kette: Entweder baut man eine Säule, bei welcher in gleicher Folge Zink, Kupfer und eine mit einem Leiter (Salzwasser oder stark verdünnte Säure) befeuchtete Tuchscheibe wechseln, eine sog. **Volta'sche Säule**, — oder man taucht in eine Reihe mit verdünnter Schwefelsäure gefüllter Zellen je ein Zink- und ein Kupferelement, und verbindet die Zinkplatte einer Zelle metallisch mit der Kupferplatte der folgenden Zelle, — oder man theilt nach Daniell's Vorschlage, um eine Batterie von etwas constanterer Wirkung zu erhalten, jede Zelle durch eine poröse Scheidewand ab, setzt in den einen Theil ein Zinkelement in eine Lösung von Kochsalz, in den andern ein Kupferelement in eine Lösung von Kupfervitriol, — etc. In allen Fällen entsteht der Strom, sobald die äussersten Elemente durch den sog. **Polardraht** mit einander verbunden werden. — Ebenso entstehen elektrische Ströme, wenn man,

wie bei der sog. **Erdbatterie,** in die feuchte Erde eine Zinkplatte, an einer andern Stelle eine Kupferplatte eingräbt, und beide Platten durch einen Draht verbindet, — oder, wenn man, wie bei der sog. **thermo-elektrischen Säule,** aus zwei Streifen verschiedener Metalle einen Ring zusammenlöthet, und den Löthstellen verschiedene Temperaturen gibt, — etc.

Der von Joh. Georg **Sulzer** (Winterthur 1720 — Berlin 1779; Professor der Mathematik und Philosophie zu Berlin, auch Mitglied der Academie; vergl. Bd. 3 meiner Biographieen) im November 1752 an seinen Freund Albrecht von **Haller** (Bern 1708 — Bern 1777; Professor der Medicin in Göttingen, Präsident der dortigen und auswärtiges Mitglied der Pariser-Academie; vergl. Bd. 2 meiner Biographieen) mit den Worten „Un morceau de plomb ou d'argent, appliqué à la langue n'y excite aucun goût; si on les joint ensemble, de manière que les deux métaux se touchent, alors on sent un goût approchant à l'aigre du vitriol de fer“ beschriebene merkwürdige, von ihm als Beweis einer entstehenden Vibration angesehene Versuch (vergl. Biogr. III 309; ferner die 1754 erschienenen Mém. de Berl. 1752, etc.) war schon längst wieder vergessen, als **Galvani** 1790 die Entdeckung machte, dass entblösste Froschschenkel, welche man bald nach eingetretenem Tode mit zwei verschiedenen Metallen berührt, jedesmal heftig zucken, wenn man Letztere zusammenbringt. **Galvani** suchte (s. seine Schrift von 1791 in 315) den Grund dieser Erscheinungen in einer besondern thierischen Elektricität, — während alsbald **Volta** (s. seine „Memoria sull' Ellettricita animale; discorso recitato il die 5 Maggio 1792, — deutsch, Prag 1793“ und die eigentlich schon 1806 geschriebene Abhandlung von 1814 in 315) zu beweisen suchte, dass die Elektricität durch die Berührung der Metalle hervorgerufen werde und der Froschschenkel nur die untergeordnete Rolle eines Leiters spiele, ja 1799 die Richtigkeit seiner Ansicht durch den Bau der nach ihm benannten Säule belegen konnte. — Zum Bau einer Batterie, welche während längerer Zeit constant wirken soll, sind die durch beistehende Figur erläuterten sog. Minotto-Elemente zu empfehlen. Bezeichnet man die Ausschläge an einer Tangentenboussole (vergl. 320) von 1 und 32 Windungen mit B_1 und B_{32}, so ergab mir ein solches Element unmittelbar nach der Füllung (ohne einige Tropfen Schwefelsäure beizufügen, oder vorher constanten Schluss anzuwenden, — durch welche beide Hülfsverfahren der Process sehr befördert werden kann) $B_{32} = 30°$, — einen Tag später 40°, — nach 2^d : 48° oder $B_1 = 4°$, — nach 3^d : 8°, — nach 4^d : 10°, — nach 5^d (von 4—5 während 24^h constanten Schluss gebend) : 20°, was etwa zu erlangen ist; bei continuirlichem Gebrauche gibt ein solches Element sodann bei einem Monat, — bei nur zeitweisem Gebrauche viele Monate lang constanten Strom.



Um dagegen für kurze Zeit einen kräftigen Linien-Strom zu erhalten, sind in Dutzend-Kistchen zusammengestellte zweizellige Elemente von **Daniell** zu empfehlen, bei denen eine Thonzelle als Diaphragma wirkt, ein Kupferdraht zugleich als Element und Verbindungsdrath dient. Ein Dutzend-Kistchen gab unmittelbar nach Füllung



$B_{31} = 65^\circ$, — nach zehntägigem Gebrauche aber nur noch 4°, — bei Speisung mit pulverisirtem Kupfervitriol sofort wieder 44°; zehn solche Kistchen gaben bei kurzem Schlusse 70°, bei 60 Kil. Widerstand (vergl. 318) noch 60°, bei 500 Kil. noch 40°. — Für die von William Robert **Grove** (Svansea 1811; Professor der Physik in London) vorgeschlagene Zink-Platin-Batterie vergl. dessen Abhandlung „On a new voltaic battery of great energy (Phil. Mag. 1839)", — für die von **Bunsen** beliebte Zink-Kohlen-Batterie dessen Notiz „Bereitung einer Kohle als Ersatz des Platin's in der Grove'schen Kette (Pogg. Annal. 1842)", — etc. — Für Erdbatterieen vergl. z. B. meine „Beobachtungen an einer Erdbatterie (Bern. Mitth. 1855)". — Die thermoelektrischen Ströme entdeckte 1822 Thomas Johann **Seebeck** (Reval 1770 — Berlin 1831; Mitglied der Berliner-Academie), vergl. seine Abhandlung „Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz (Berl. Abh. 1822—1823)". Ueber ihre Anwendung zur Messung der strahlenden Wärme durch den sog. **Thermomultiplicator**, der in der neuern Zeit das ursprünglich von Joh. Christoph **Sturm** (Hippoltstein 1635 — Altdorf 1703; Professor der Mathematik und Physik zu Altdorf) in seinem „Collegium experimentale curiosum. Norimb. 1676—1685, 2 Vol. in 4." zu gleichem Zwecke vorgeschlagene, und dann wieder von **Leslie** (s. seine Schrift in 299) neuerfundene **Differentialthermometer** mit Nutzen ersetzt hat, vergl. die von seinem Erfinder Leopoldo **Nobili** (Trassilico in Modena 1784 — Florenz 1835; Professor der Physik zu Florenz) gegebene „Description d'un thermomultiplicateur ou thermoscope électrique (Bibl. univers. 1830)", und die von ihm mit Macedonio **Melloni** (Parma 1798 — Portici 1854; Professor der Physik zu Parma, und später Director des meteorologischen Observatoriums am Vesuv) angestellten „Recherches sur plusieurs phénomènes calorifiques entreprises au moyen du thermo-multiplicateur (Bibl. univ. 1831)", etc.

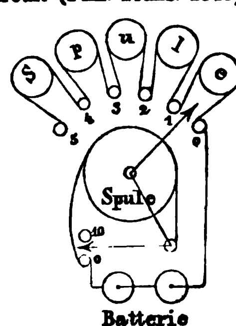
318. Das Ohm'sche Gesetz. Bezeichnet s die Stärke eines elektrischen Stromes, e die elektromotorische Kraft der verwendeten Elemente, die um so grösser ist, je weiter die dazu gebrauchten Stoffe in der Spannungsreihe (+ Zink, Blei, Zinn, Eisen, Wismuth, Kupfer, Platin, Gold, Silber, Kohle, Graphit —) von einander abstehen, m die Anzahl der Elemente, f ihre in Quadratdecimetern gegebene Oberfläche, w_1 den (für Wasser sehr grossen, durch Zusatz von Säuren, Salzen, etc. zu vermindernden) Widerstand eines Elementes der Oberfläche 1, l die Länge des Schliessungsdrahtes in Metern, d die Dicke desselben in Millimetern, und w_2 den (für Eisen 6, Platin 7, Quecksilber 39 mal so gross als für Kupfer gefundenen) Widerstand eines Schliessungsdrahtes der Dimensionen 1, so ist nach Ohm

$$s = \frac{m\,d^2\,e\,f}{m\,d^2\,w_1 + f\,l\,w_2} = \frac{\text{Summe der elektromot. Kräfte}}{\text{Summe der Widerstände.}}$$

Für Elemente bestimmter Art ist, je nachdem l klein oder gross, das erste oder das zweite Glied im Nenner von überwiegender Bedeutung, und somit im erstern Falle s nahe proportional der Grösse, in letzterm aber der Anzahl der Elemente, so dass man z. B. für

Localbatterieen wenige grosse, für Linienbatterieen dagegen viele kleine Elemente verwendet.

Für **Ohm** und seine classische Schrift vergl. 315. — Zu betreffenden Untersuchungen dient der von **Wheatstone**, vergl. seinen „Account of several new instruments and processes for determining the constants of a voltaic circuit (Phil. Trans. 1843)“ erfundene **Rheostat**, von dessen für das schweizerische Telegraphennetz benutzter specieller Einrichtung das beistehende Schema einen Begriff gibt: Die grosse Spule hat 10, jede der kleinen 1 Kilometer Draht, und werden somit die beiden Zeiger erst auf Null, dann z. B. auf 2 und 10 gestellt, so hat ein durchgeführter Strom in letzterm Falle 12 Kilometer mehr Widerstand zu überwältigen als im ersten. Der von Gustav **Hasler** (Aarau 1830; Director der Telegraphenwerkstätte in Bern) für mich construirte Rheostat geht bis auf 200 Kil., und seine Widerstandsspulen sind für Eisendraht von 4^{mm} berechnet: Ich erhielt mit demselben bei zwei Minotto-Elementen für



Kil.	0	2	5	10	25	50	100	200
B_1 =	10°	6	4	2	1			
B_{32} =	62°				27	14	5	2

Da die eidgenössischen Linien nur 3^{mm} Drahtdicke haben, so hat man somit nach dem Ohm'schen Gesetze, wenn 1 Kilometer des Apparates x Kilometern der eidgenössischen Linien entsprechen,

$$\frac{m \cdot 3^2 \cdot e \cdot f}{m \cdot 3^2 \cdot w_1 + f \cdot x \cdot w_2} = \frac{m \cdot 4^2 \cdot e \cdot f}{m \cdot 4^2 \cdot w_1 + f \cdot 1 \cdot w_2} \quad \text{oder} \quad x = 0{,}56 \cdot 1$$

so dass obige 200 Kilometer nur etwa 100 Kilometern eidgenössischer Linien entsprechen. — Um den Widerstand eines Apparates, z. B. der Spulen des Tasterschreibers (vergl. 341), mit dem Rheostaten zu bestimmen, steckt man in dem Kettenwechsel erst bei a und c Stifte, und liest bei vorher auf Null gestelltem Rheostaten an der Boussole ab; dann steckt man den Stift von a nach b über, d. h. schaltet den Tasterschreiber aus, und führt mittelst des Rheostaten die Boussole auf den vorigen Stand zurück; die nunmehrige Ablesung am Rheostaten gibt nun den Widerstand des Apparates in Kilometern.

319. Weitere Eigenschaften. Der galvanische Strom erhitzt dünne Leitungsdrähte, durchläuft sie mit einer von Wheatstone zu 60000 Meilen angeschlagenen Geschwindigkeit, — erregt beim Schliessen oder Oeffnen in einem benachbarten Leiter einen sog. **inducirten** Strom, der z. B. in den zur Zeit vielfach medicinisch verwendeten Erschütterungsapparaten benutzt werden konnte, weil er fortwährend seine Richtung ändert, nämlich als Oeffnungsstrom gleiche, als Schliessungsstrom entgegengesetzte Richtung wie der erregende Strom besitzt, — etc. Auch ist der galvanische Strom

als chemische Kraft thätig, kann Wasser zersetzen, — Kupfer aus Kupfervitriollösung in Wasser, Gold aus Goldchloridlösung in Wasser mit unreinem Cyankalium, etc. metallisch niederschlagen, und so zur sog. **Galvanoplastik** behülflich sein, — etc. Zwei parallele Polardrähte ziehen sich nach Ampère's Entdeckung an oder stossen sich ab, je nachdem der Strom sie in gleichem oder entgegengesetztem Sinne durchläuft.

Für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Elektricität durch **Wheatstone** vergl. dessen Abhandlung „An account of some experiments to measure the velocity of electricity and the duration of electric light (Phil. Trans. 1834)". Hat der Strom noch Hindernisse zu überwinden, z. B. durch Apparate zu gehen, so nimmt seine durchschnittliche Geschwindigkeit ab; für die circa 28 Meilen lange Linie Neuenburg-Bern-Zürich brauchte er an $0^s,015$, ging also nur mit einer Geschwindigkeit von circa 1800 g. Meilen. — Auf die Inductionserscheinungen machte zuerst **Faradey** in der 1832 publicirten zweiten Reihe seiner „Researches (s. 315)" aufmerksam; dann wurden sie auch durch **Jacobi**, vergl. seine Abhandlung „Ueber die Inductionsphänomene beim Oeffnen und Schliessen einer Volta'schen Kette (Bull. Pet. 1838)", — Elie-François **Wartmann** (Genf 1817; Professor der Physik zu Lausanne und Genf), vergl. seine „Mémoires I—VIII sur l'induction (Arch. de l'électr. und Arch. des scienc. phys. 1844—1850)", — etc., untersucht. Die inducirten Ströme sind muthmasslich Schuld, dass sich ein zwischen den Polen eines starken Elektromagneten rasch drehender Metallzylinder über die Siedehitze hinaus erwärmt. — Die schon in 317 angedeutete Wasserzersetzung durch den galvanischen Strom, bei der man beide Gase erhalten kann, wenn man wenigstens den positiven, den Sauerstoff liefernden Pol des Schliessungsdrahtes in ein edles (nicht oxidirbares) Metall, z. B. Platin, auslaufen lässt, und über beide Pole mit Wasser gefüllte Auffangszylinder stellt, entdeckte Anthony **Carlisle** (Stillington 1768 — London 1840; Chirurg in London) im Jahre 1800, als er gemeinschaftlich mit **Nicholson** (s. dessen Journal of nat. philos. IV) experimentirte, und dabei den von der untersten Platte der Volta'schen Säule kommenden Draht in einen auf der obersten Platte liegenden Wassertropfen tauchte. — Für die von **Jacobi** 1838 erfundene Galvanoplastik vergl. dessen Schrift in 315. — **Faradey** hat in der 1834 erschienenen 7. Reihe seiner „Researches (s. 315)" folgendes höchst interessante Gesetz nachgewiesen: Dieselbe Elektricitätsmenge, welche aus 9 Kilogr. Wasser 1 Kil. Wasserstoff ausscheidet, scheidet auch aus Kupferoxyden 32 Kil. Kupfer, aus Bleioxyden 103 Kil. Blei, etc., ab, — d. h. die Lösung chemischer Equivalente (vergl. 250 und VIII) bedarf dieselbe Elektricitätsmenge. — Für die Entdeckung von **Ampère** vergl. sein „Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Paris 1826 in 4."

320. Der Elektromagnetismus und die Telegraphie. Der Polardraht hat auch magnetische Kraft: Bringt man ihn in den magnetischen Meridian, so wird das Nordende einer über demselben schwebenden Magnetnadel für einen nach ihr sehenden, Kopf voran im Strome sich schwimmend denkenden Beobachter links abgelenkt. Wird ein

weiches Eisen mit einem isolirten, mit Seide umsponnenen Polardrahte umwunden, so wird es zum **Elektromagnete**, verliert aber beim Oeffnen der Kette seinen Magnetismus augenblicklich wieder, — während ein Stahlstab, den man (analog 311) durch eine solche Drahtspirale zieht, dauernde magnetische Sättigung erhält. Umgekehrt entsteht, wenn einem Hufeisenmagnete gegenüber ein mit einem isolirten Kupferdrahte umwundener hufeisenförmiger Anker rotirt, eine **Magneto-Elektrisirmaschine**. — Die Ablenkung der Magnetnadel durch galvanische Ströme wird zum Messen der Letztern verwendet: Bei der sog. **Tangenten-Boussole** wird der Strom durch einen in die Ebene des magnetischen Meridianes fallenden Kreis geführt, in dessen Mittelpunct eine verhältnissmässig kurze Nadel hängt; bei der **Sinus-Boussole** ist dieser Stromkreis beweglich und wird der Nadel nachgedreht, bis sie wieder in seine Ebene fällt. — Da der Strom auch den längsten Polardraht fast augenblicklich durchläuft, und dieser überdiess nach Steinheil's folgenschwerer Entdeckung zur Hälfte durch die Erde ersetzt werden kann, so wird es möglich, in kürzester Zeit auf beliebige Distanzen Zeichen zu geben oder **elektrische Telegraphen** einzurichten, indem man an der einen Station den Strom mit Hülfe eines sog. **Taster's** abwechselnd herstellt und unterbricht, dadurch auf der zweiten Station einen Elektromagneten befähigt, einen Anker abwechselnd anzuziehen und loszulassen, folglich auch jeden mit Letzterm in geeigneter Verbindung stehenden Apparat, sei es ein Schreibapparat, ein Läutwerk, eine sympathische Uhr, ein Chronoskop oder Chronograph, etc., in Thätigkeit zu setzen.

Nachdem **Oersted** 1820 (s. seine Schrift in 315) Kenntniss von dem Einflusse des galvanischen Stromes auf die Magnetnadel gegeben und damit den Elektromagnetismus entdeckt, sodann **Ampère** in seiner Abhandlung „Sur l'action des courans voltaïques (Annal. de chim. et de phys. 1820)" die im Eingange des Textes mitgetheilte Regel ausgesprochen, und **Poggendorf** (s. seine 315 erwähnte Abhandlung) den elektromagnetischen **Multiplicator**, von welchem die im Texte beschriebenen Boussolen als Abarten anzusehen sind, erfunden hatte, fand **Faradey** 1831, s. seine erste Serie der „Researches (vergl. 315)", auch die Magnetoelektricität, und bald entstanden durch den Pariser-Mechaniker **Pixii** (vergl. Annal. de chim. et de phys. 1832), durch **Ettingshausen** (spätestens 1837; vergl. Gehler IX), durch Emil **Stöhrer** (Delitsch in Sachsen 1813; Mechanikus in Leipzig und Dresden), vergl. seine Mittheilung „Ueber die Construction magneto-elektrischer Maschinen (Pogg. Annal. 1844)", etc. kräftige Magnetoelektrisirmaschinen nach dem im Texte angegebenen Principe. — Eine der wichtigsten Anwendungen des Elektromagnetismus bilden entschieden die elektrischen Telegraphen: Schon lange ehe die beiden Brüder, der französische Finanzbeamte Ignace-Urbain-Jean

Chappe (1760—1828) und der Abbé Claude **Chappe** (1763—1805) im Jahre 1792, vergl. des Erstern „Histoire de la télégraphie. Paris 1824, 2 Vol. in 8.“, der französischen Nationalversammlung zu belieben wussten, den seit alten Zeiten für Zeichen in die Ferne gebräuchlichen Feuersignalen die schon von **Hooke** (s. Phil. Trans. 1684) empfohlenen optischen Telegraphen mit beweglichen Gliedern zu substituiren, nämlich schon 1774, hatte **Lesage** (vergl. das Werk von Schellen in 315 : 4 A., pag. 294) die Idee, zwei Puncte mit 24 isolirten, den einzelnen Buchstaben entsprechenden Drähten zu verbinden, an deren Enden Paare von Hollunderkügelchen angehängt waren, welche am einen Ende auseinander gingen, sobald das andere Ende mit dem Conductor einer Elektrisirmaschine verbunden wurde, — und nach Entdeckung der Wasserzersetzung durch den galvanischen Strom brachte Samuel Thomas **Sömmering** (Thorn 1755 — Frankfurt 1830; erst Professor der Medicin in Cassel und Mainz, dann Mitglied der Münchner-Academie, und zuletzt Arzt in Frankfurt) durch seine Abhandlung „Ueber einen elektrischen Telegraphen (Münchn. Denkschr. 1809—1810) in Vorschlag, die Enden der Drähte zu vergolden und in Wassergläschen ausmünden zu lassen. Nach Entdeckung des Elektromagnetismus lag es nahe, die Sömmering'schen Gläschen durch Magnetnadeln zu ersetzen; dagegen war es ein wesentlicher Fortschritt, als 1832 einerseits Pavel Lwowitsch **Schilling** von Canstadt (Reval 1786 — Petersburg 1837; russischer Staatsrath), und anderseits **Gauss** und **Weber** zeigten, dass man mit zwei Drähten, einem Hülfsapparate zur Umkehrung des Stromes, und der Combination von Nadelausschlägen nach rechts und links für alle Zeichen ausreiche, — und als sodann 1838 **Steinheil**, vergl. seine Abhandlung „Ueber Telegraphie, insbesondere durch galvanische Kräfte. München 1838 in 4.“, noch die brillante Entdeckung machte, dass der zweite Draht durch die Erde ersetzt werden könne, so war der praktische Betrieb auf weiten Strecken ermöglicht, und damit auch die Erfindung aller Arten von Zeiger-, Schreib- und Druck-Apparaten der Mühe werth. — Von den Schreibapparaten ist der von Samuel Finlay Breese **Morse** (Charlestown in Massachusetts 1791; früher Maler, später Professor der Naturgeschichte in New-Haven) 1835 Erfundene, mit den aus . (di) und — (doo) combinirten Buchstaben: a .—, ä .—.—, b —..., c —.—., d —.., e ., f ..—., g ——., h ...., i .., j .———, k —.—, l .—.., m ——, n —., o ———, ö ———., p .——., q ——.—, r .—., s ..., t —, u ..—, ü ..——, v ...—, w .——, x —..—, y —.——, z ——.., ch ————, und Ziffern: 0 —————, 1 .————, 2 ..———, 3 ...——, 4 ....—, 5 ....., 6 —...., 7 ——..., 8 ———.., 9 ————., immer noch am gebräuchlichsten. — Für den Chronographen vergl. 341, — für das von **Wheatstone** um 1840 erfundene und sodann von **Hipp** wesentlich verbesserte Chronoscop, sowie überhaupt für weiteren Detail die in 315 verzeichnete Literatur.

Einige Zusätze.

Zu 4. Vergleiche „Didion, Notice sur la vie et les ouvrages du Général J. V. **Poncelet.** Paris 1869 in 8., — Bence Jones, The life and letters of **Faraday.** London 1870, 2 Vol. in 8.“

Zu 12. Nach „Franz **Woepcke** (Dessau 1826 — Paris 1864; meist in Paris und Rom lebend), Mémoire sur la propagation des chiffres indiens (Journ. asiat.)“ sind muthmasslich etwa im 3. Jahrhundert mit den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter des Sanscrit übereinstimmende Zahlzeichen durch die Neu-Pythagoräer in den Westen gekommen, von den Römern statt ihrer unbequemen Kerbenschrift bald in Gebrauch genommen, und sodann nach Spanien, etc., verbreitet worden; im 8. Jahrhundert kamen über Bagdad nochmals neue Zeichen, von denen dann aber nur das bisdahin fehlende, und zur Zeit des Gebrauches der Rechentafel (Abacus) auch noch nicht so nothwendige Stellenzeichen Null (arabisch: cifron, leer, — italienisch: zephiro oder abgekürzt zero) Eingang fand.

Zu 40. Die Schrift von **Zeuner** ist seither unter dem Titel „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig 1869 in 8.“ erschienen. Ferner mag noch „**Wiegand,** Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherungsinstitute. Halle 1854 in 8.“ nachgetragen werden.

Zu 78. Hier ist noch „Friedrich Ludwig **Stegmann** (Frankfurt 1813; Professor der Mathematik zu Marburg), Lehrbuch der Variationsrechnung. Cassel 1854 in 8.“ zu erwähnen.

Zu 116. Seither ist „**Geiser,** Einleitung in die synthetische Geometrie. Leipzig 1869 in 8.“ erschienen.

Zu 121. Hier mögen „Jacques-Philippe-Marie **Binet** (Rennes 1786 — Paris 1856; Professor der Astronomie und Mitglied der Academie zu Paris), Sur la courbure des lignes considerées comme provenant de l'intersection mutuelle de deux surfaces données (Compt. rend. 1844, Vol. 19)“, und „**Lamé,** Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris 1859 in 8.“ nachgetragen werden.

Zu 206. Vergleiche auch „Jean-Baptiste **Brasseur** (Esch in Luxemburg 1802 bis Liège 1868; Professor der Mathematik zu Lüttich; vergl. Boncompagni 1869 VI), Mémoire sur une nouvelle methode d'application de la géometrie descriptive à la recherche des propriétés de l'etendue (Mém. de Brux. XXIX, 1855)“.

Zu 212. Soeben ist „**Tyndall,** Researches on Diamagnetism and magnecrystallic Action. London 1870 in 8.“ erschienen.

Einleitung zu den Tafeln.

I. Reductionstafel für Maasse, Gewichte und Münzen. Nach ihr findet man z. B., dass

per Kilometer
1 fl. ($^{15}/_{7}$) per deutsche Meile . . = 0,2888 fr.
1 thlr ($^{15}/_{4}$) per preussische Meile = 0,4978 „
1 fr. per Schweizerstunde . . . = 0,2083 „
1 Dollar ($^{37}/_{3}$) per Mile . . . . = 3,3554 „

Die in kleinerer Schrift gedruckten Zahlen sind bei Längenmaass und Gewicht Logarithmen der Reductionszahlen, — bei Flächenmaass geben sie die Anzahl Pfunde, welche einen Quadratzoll eben so belasten, wie ein Kilogramm einen Quadratcentimeter.

II^{a}. Factorentafel. Nach ihr ist z. B.

663 = 3 . 221 und 221 = 13 . 17 also 663 = 3 . 13 . 17.

II^{b}. Tafel der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge, Kreisflächen, Radien und Reciproken. In der erweiterten Quadrattafel gehören die fetten Ziffern zu allen Columnen, sind jedoch für jeden Punct um eine Einheit zu vermehren, so dass z. B. $838^2 = 702244$; sie ist auch zum Ausziehen der Quadratwurzeln auf drei Stellen zu gebrauchen.

III. Mortalitätstafel und Hülfstafel für Zinsrechnung. Von den Mortalitätstafeln ist die erste diejenige der schweizerischen Rentenanstalt, die zweite die von Gysi 1867 für die Schweiz construirte, die dritte die in England accreditirte der sog. 17 Gesellschaften. Vergl. für die Mortalitätstafel 40, — für die Tafel zur Erleichterung der Zins- und Renten-Rechnung 27.

IV. Logarithmentafel. Die zwei ersten Seiten der Tafel geben die natürlichen und gemeinen Logarithmen aller Primzahlen von 1 bis 1000 auf 10 Stellen, und lassen mit Hülfe von 11 oder einer Interpolationsformel (49 oder 54) verhältnissmässig leicht auch andere Logarithmen eben so genau berechnen, zumal sie von log. nat. 10 und log. e = 1 : log. nat. 10, mit welchen man gemeine oder natürliche Logarithmen multipliciren muss, um natürliche oder gemeine Logarithmen zu erhalten, die Vielfachen geben. Die zwei folgenden Seiten enthalten eine Tafel vierstelliger gemeiner Logarithmen, und geben z. B.

log 237,2 = 2,3747	Num log 5,2482 = 1771 . . , .
18 . 0,2 4	2480
2,3751	2 : 25 = 0,1.

V. Trigonometrische Tafel. Die sechs ersten Seiten enthalten die gewöhnlichen trigonometrischen Logarithmen, und geben z. B.

log Sin $34^\circ\ 23' = 9{,}7513$ $\qquad 31 - 13 = +18$

$+5$ . . . . . $3 . 1{,}8$

$9{,}7518$

Arc log Ctg $9{,}6933 = 90^\circ - (26^\circ\ 10' + 6') = 63^\circ\ 44'$

14

$19 . 10 : +32 = 46 - 14$

$+6$

Bei den drei ersten Seiten ist die Charakteristik immer zu streichen. Die siebente Seite gibt die trigonometrischen Linien für den Radius Eins.

VI. Sehnentafel. Sollen z. B. für den Radius 24,0 zu der Sehne 31,6 Mittelpunctswinkel und Pfeil gefunden werden, so hat man

$31{,}6 . 10000 : 24{,}0 = 13167 = 82^\circ\ 21'$

121

$252 - 121 = 131$ . . . . $46 . 60 : 131 = 21$

Pfeil $82^\circ\ 21' = 2453$ $\qquad 510 - 453 = 57$

20 . . . . $21 . 57 : 60$

$2473 . 24{,}0 : 10000 = 5{,}9352$

VII^a. Tafel der Bogenlängen für den Radius 1. Nach ihr ist

Arc $63^\circ\ 24'\ 17'' = 1.047198$ . . . . . . 60°

52360 . . . . . . 3°

5818 . . . . . . $20'$

1164 . . . . . . $4'$

48 . . . . . . $10''$

34 . . . . . . $7''$

1.106622

VII^b. Tafel der Logarithmen von a . Arc 1" = Sin a".

VII^c. Reductionstafel für Zeit und Bogen. Sie gibt z. B.

$127^\circ\ 24'\ 39'' = 8^h\ 29^m\ 38{,}6^s = 0.353919^d$

und somit auch, da $4 \times 0.353919 = 1.415676$ ist,

$127^\circ\ 24'\ 39''$ Sex. $= 141^\circ\ 56'\ 76''$ Cent.

VIII. Chemische Tafel.

IX. Physikalische Tafel.

X. Festigkeitstafel nach Culmann und Zeuner.

XI^a. Tafel für Wasserdampf nach Regnault und Zeuner.

XI^b. Psychrometer-Tafel. (Vergl. 306.)

XII. Hypsometrische Tafel. (Vergl. 273 und 275.)

Länder.	Längenmaasse in Mètres.	Längenmaasse in Kilomètres, 1 = 1000 m = 0,1 lieue.	Flächenmaasse in Hectares, 1 = 10000 qm	Hohlmaasse in Litres, 1 = 0,001 cm	Gewichte in Grammes, 100000 = 1 Quintal.	Münzen in Francs.
Baden	Fuss . . . . 0,30000 (10 Zoll) 9.47712	Meile . . . . 8,88889 (29630′) 0.94885	Morgen . . 0,36000 (40000 q′) 18.000	Maass . . . 1,50000 100 = 1 Malter	Pfund . . . 500,000 (32 Loth) 2.69897	Gulden 2,12 = 15/7 24,5 = 1 Mark
Bayern . . .	Fuss . . . . 0,29186 (10 Zoll) 9.46517	Meile, geogr. 7,42044 (15 = 1°) 0.87043	Juchart . . 0,34073 (40000 q′) 15.211	Kanne . . . 1,06903 208 = 1 Scheffel	Pfund . . . 560,000 (32 Loth) 2.74819	Gulden 2,12 = 15/7 60 Kreuzer à 4 Pf.
England . . .	Feet . . . . 0,30479 (12 Inches) 9.48401	Mile . . . . 1,60931 (5280′) 0.20664	Acre . . . . 0,40467 (43560 q′) 14.223	Gallon . . . 4,54346 8 = 1 Bushel	Pound . . . 453,598 (16 ounces) 2.65667	Shilling 1,26 = 21/17 20 = 1 Pound St.
Frankreich . (altes Maass)	Pied . . . . 0,32484 (12 pouces) 9.51167	Lieue . . . . 4,44444 (25 = 1°) 0.64782	Arpent . . 0,34189 (32400 q′) 14.970	Pinte . . . . 0,93132 288 = 1 Muid	Livre . . . 489,506 (9216 grains) 2.68976	Livre 0,99 = 80/81 20 Sous à 12 Den.
Griechenland (altes Maass)	ποῦς . . . . 0,30828 (4 παλαισταί)	στάδιον . . . 0,18497 (600 πόδες)	πλέθρον . . 0,09504 (10000 q′)	μετρητής . . 38,844 μέδιμν. = 4/3 μετρ.	τάλαντον . . 26196 (6000 δραχμαί)	τάλαντον . . . 5625 36000 ὄβολοι
Oesterreich .	Fuss . . . . 0,31611 (12 Zoll) 9.49984	Meile . . . . 7,58666 (24000′) 0.88005	Joch . . . . 0,57557 (57600 q′) 12.391	Maass . . . 1,41513 43,462 = 1 Metze	Pfund . . . 560,012 (32 Loth) 2.74820	Gulden 2,47 = 5/2 20 = 1 Mark
Preussen . .	Fuss . . . . 0,31385 (12 Zoll) 9.49673	Meile . . . . 7,53248 (24000′) 0.87694	Morgen . . 0,25532 (25920 q′) 14.626	Quart . . . . 1,14503 48 = 1 Scheffel	Pfund . . . 467,711 (32 Loth) 2.66998	Thaler 3,70 = 15/4 30 Silbergr.
Rom . . . . . (altes Maass)	Pes . . . . 0,29586 (4 palmi à 4 digiti)	Mile passus 1,47930 (5000 pedes)	Iugerum . . 0,25209 (240.120=28800 q′)	Amphora . . 25,896 Modius = 1/3 amph.	Libra . . . . 327,45 (12 unciæ)	Denarius 0,87 = 6/7 10 as = 4 sestertii
Russland . .	Fuss . . . . 0,30479 (12 Zoll) 9.48401	Werst . . . 1,06678 (3500′) 0.02808	Dessätine . 1,09250 (117600 q′) 15.754	Stoof . . . . 1,22896 64 = 3 Tschetwerik	Pfund . . . 409,520 (40=1 Pud) 2.61228	Rubel 4,00 100 Kopeken
Schweiz . . .	Fuss . . . . 0,30000 (10 Zoll) 9.47712	Stunde . . . 4,80000 (16000′) 0.68124	Juchart . . 0,36000 (40000 q′) 18.000	Maass . . . 1,50000 100 = 1 Malter	Pfund . . . 500,000 (32 Loth) 2.69897	Franken 1,00 10 Batzen à 10 Rp.
Vereinigte Staaten . .	Yard . . . . 0,91438 (36 Inches) 9.96113	Mile . . . . 1,60931 (1760 Y.) 0.20664	Acre . . . . 0,40467 (43560 q′) 14.223	Gallon . . . 4,54346 8 = 1 Bushel	Pound . . . 453,598 (16 ounces) 2.65667	Dollar 5,41 = 27/5 100 Cents à 10 Mills
Würtemberg	Fuss . . . . 0,28649 (10 Zoll) 9.45711	Meile . . . . 9,27570 (12 = 1°) 0.96732	Morgen . . 0,31517 (38400 q′) 17.548	Helleichm. . 1,83705 96,474 = 1 Scheffel	Pfund . . . 467,728 (32 Loth) 2.66999	Gulden 2,12 = 15/7 60 Kreuz. à 4 Heller

Nach der deutschen Münz-Convention von 1857 sind: 27 nordd. Thaler = $40\frac{1}{2}$ österr. Gulden = $47\frac{1}{4}$ südd. Gulden = 100 Francs.
Paris $4''' = 9^{mm}$; $1'' = 27{,}1^{mm}$; $27'' = 730{,}9^{mm}$. — Klafter = Faden = Lachter = 6′. — Seemeile = $1/60°$ = 120 Knoten.

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0		2.50	2.100	2.150	2.200	2.250	2.300	2.350	2.400	2.450
1	*	*	3.67	7.43	*	3.167	*	*	3.267	17.53
2	*	2.51	2.101	2.151	2.201	2.251	2.301	2.351	2.401	2.451
3	*	*	7.29	3.101	13.31	*	3.201	19.37	11.73	3.301
4	2.2	2.52	2.102	2.152	2.202	2.252	2.302	2.352	2.402	2.452
5	*	3.35	5.41	5.61	3.135	5.101	5.121	3.235	5.161	5.181
6	2.3	2.53	2.103	2.153	2.203	2.253	2.303	2.353	2.403	2.453
7	*	*	3.69	*	11.37	3.169	*	7.101	3.269	*
8	2.4	2.54	2.104	2.154	2.204	2.254	2.304	2.354	2.404	2.454
9	3.3	*	11.19	3.103	*	*	3.203	*	*	3.303
10	2.5	2.55	2.105	2.155	2.205	2.255	2.305	2.355	2.405	2.455
11	*	3.37	*	*	3.137	7.73	13.47	3.237	*	*
12	2.6	2.56	2.106	2.156	2.206	2.256	2.306	2.356	2.406	2.456
13	*	*	3.71	*	7.59	3.171	*	23.31	3.271	11.83
14	2.7	2.57	2.107	2.157	2.207	2.257	2.307	2.357	2.407	2.457
15	3.5	5.23	5.43	3.105	5.83	5.103	3.205	5.143	5.163	3.305
16	2.8	2.58	2.108	2.158	2.208	2.258	2.308	2.358	2.408	2.458
17	*	3.39	7.31	*	3.139	11.47	*	3.239	19.43	7.131
18	2.9	2.59	2.109	2.159	2.209	2.259	2.309	2.359	2.409	2.459
19	*	7.17	3.73	11.29	*	3.173	*	*	3.273	*
20	2.10	2.60	2.110	2.160	2.210	2.260	2.310	2.360	2.410	2.460
21	3.7	11.11	13.17	3.107	*	*	3.207	7.103	*	3.307
22	2.11	2.61	2.111	2.161	2.211	2.261	2.311	2.361	2.411	2.461
23	*	3.41	*	17.19	3.141	*	7.89	3.241	*	13.71
24	2.12	2.62	2.112	2.162	2.212	2.262	2.312	2.362	2.412	2.462
25	5.5	5.25	3.75	5.65	5.85	3.175	5.125	5.145	3.275	5.185
26	2.13	2.63	2.113	2.163	2.213	2.263	2.313	2.363	2.413	2.463
27	3.9	*	*	3.109	7.61	17.31	3.209	*	*	3.309
28	2.14	2.64	2.114	2.164	2.214	2.264	2.314	2.364	2.414	2.464
29	*	3.43	*	7.47	3.143	23.23	17.37	3.243	*	*
30	2.15	2.65	2.115	2.165	2.215	2.265	2.315	2.365	2.415	2.465
31	*	*	3.77	*	*	3.177	*	17.43	3.277	7.133
32	2.16	2.66	2.116	2.166	2.216	2.266	2.316	2.366	2.416	2.466
33	3.11	7.19	*	3.111	*	13.41	3.211	*	7.119	3.311
34	2.17	2.67	2.117	2.167	2.217	2.267	2.317	2.367	2.417	2.467
35	5.7	3.45	5.47	5.67	3.145	5.107	5.127	3.245	5.167	5.187
36	2.18	2.68	2.118	2.168	2.218	2.268	2.318	2.368	2.418	2.468
37	*	*	3.79	*	19.23	3.179	7.91	11.67	3.279	*
38	2.19	2.69	2.119	2.169	2.219	2.269	2.319	2.369	2.419	2.469
39	3.13	*	*	3.113	*	7.77	3.213	*	*	3.313
40	2.20	2.70	2.120	2.170	2.220	2.270	2.320	2.370	2.420	2.470
41	*	3.47	*	11.31	3.147	*	*	3.247	29.29	*
42	2.21	2.71	2.121	2.171	2.221	2.271	2.321	2.371	2.421	2.471
43	*	11.13	3.81	7.49	*	3.181	*	*	3.281	23.41
44	2.22	2.72	2.122	2.172	2.222	2.272	2.322	2.372	2.422	2.472
45	3.15	5.29	5.49	3.115	5.89	5.109	3.215	5.149	5.169	3.315
46	2.23	2.73	2.123	2.173	2.223	2.273	2.323	2.373	2.423	2.473
47	*	3.49	13.19	*	3.149	*	*	3.249	7.121	*
48	2.24	2.74	2.124	2.174	2.224	2.274	2.324	2.374	2.424	2.474
49	7.7	*	3.83	*	*	3.183	11.59	7.107	3.283	13.73

* bezeichnet Primzahl.

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
50	2.25	2.75	2.125	2.175	2.225	2.275	2.325	2.375	2.425	2.475
51	3.17	*	*	3.117	11.41	19.29	3.217	*	23.37	3.317
52	2.26	2.76	2.126	2.176	2.226	2.276	2.326	2.376	2.426	2.476
53	*	3.51	11.23	*	3.151	7.79	*	3.251	*	*
54	2.27	2.77	2.127	2.177	2.227	2.277	2.327	2.377	2.427	2.477
55	5.11	5.31	3.85	5.71	5.91	3.185	5.131	5.151	3.285	5.191
56	2.28	2.78	2.128	2.178	2.228	2.278	2.328	2.378	2.428	2.478
57	3.19	*	*	3.119	*	*	3.219	*	*	3.319
58	2.29	2.79	2.129	2.179	2.229	2.279	2.329	2.379	2.429	2.479
59	*	3.53	7.37	*	3.153	13.43	*	3.253	*	7.137
60	2.30	2.80	2.130	2.180	2.230	2.280	2.330	2.380	2.430	2.480
61	*	7.23	3.87	19.19	*	3.187	*	*	3.287	31.31
62	2.31	2.81	2.131	2.181	2.231	2.281	2.331	2.381	2.431	2.481
63	3.21	*	*	3.121	*	*	3.221	7.109	*	3.321
64	2.32	2.82	2.132	2.182	2.232	2.282	2.332	2.382	2.432	2.482
65	5.13	3.55	5.53	5.73	3.155	5.113	5.133	3.255	5.173	5.193
66	2.33	2.83	2.133	2.183	2.233	2.283	2.333	2.383	2.433	2.483
67	*	*	3.89	*	*	3.189	23.29	13.59	3.289	*
68	2.34	2.84	2.134	2.184	2.234	2.284	2.334	2.384	2.434	2.484
69	3.23	13.13	*	3.123	7.67	*	3.223	*	11.79	3.323
70	2.35	2.85	2.135	2.185	2.235	2.285	2.335	2.385	2.435	2.485
71	*	3.57	*	7.53	3.157	*	11.61	3.257	13.67	*
72	2.36	2.86	2.136	2.186	2.236	2.286	2.336	2.386	2.436	2.486
73	*	*	3.91	*	11.43	3.191	*	*	3.291	7.139
74	2.37	2.87	2.137	2.187	2.237	2.287	2.337	2.387	2.437	2.487
75	3.25	5.35	5.55	3.125	5.95	5.115	3.225	5.155	5.175	3.325
76	2.38	2.88	2.138	2.188	2.238	2.288	2.338	2.388	2.438	2.488
77	7.11	3.59	*	13.29	3.159	*	*	3.259	*	*
78	2.39	2.89	2.139	2.189	2.239	2.289	2.339	2.389	2.439	2.489
79	*	*	3.93	*	*	3.193	7.97	19.41	3.293	11.89
80	2.40	2.90	2.140	2.190	2.240	2.290	2.340	2.390	2.440	2.490
81	3.27	*	*	3.127	13.37	7.83	3.227	11.71	*	3.327
82	2.41	2.91	2.141	2.191	2.241	2.291	2.341	2.391	2.441	2.491
83	*	3.61	*	*	3.161	11.53	*	3.261	*	*
84	2.42	2.92	2.142	2.192	2.242	2.292	2.342	2.392	2.442	2.492
85	5.17	5.37	3.95	5.77	5.97	3.195	5.137	5.157	3.295	5.197
86	2.43	2.93	2.143	2.193	2.243	2.293	2.343	2.393	2.443	2.493
87	3.29	11.17	7.41	3.129	*	*	3.229	*	*	3.329
88	2.44	2.94	2.144	2.194	2.244	2.294	2.344	2.394	2.444	2.494
89	*	3.63	17.17	*	3.163	19.31	13.53	3.263	7.127	23.43
90	2.45	2.95	2.145	2.195	2.245	2.295	2.345	2.395	2.445	2.495
91	7.13	*	3.97	17.23	*	3.197	*	7.113	3.297	*
92	2.46	2.96	2.146	2.196	2.246	2.296	2.346	2.396	2.446	2.496
93	3.31	*	*	3.131	17.29	*	3.231	13.61	19.47	3.331
94	2.47	2.97	2.147	2.197	2.247	2.297	2.347	2.397	2.447	2.497
95	5.19	3.65	5.59	5.79	3.165	5.119	5.139	3.265	5.179	5.199
96	2.48	2.98	2.148	2.198	2.248	2.298	2.348	2.398	2.448	2.498
97	*	*	3.99	*	7.71	3.199	17.41	*	3.299	*
98	2.49	2.99	2.149	2.199	2.249	2.299	2.349	2.399	2.449	2.499
99	3.33	*	13.23	3.133	*	*	3.233	17.47	29.31	3.333

* bezeichnet Primzahl.

II^b. Tafel der Potenzen, Kreisumfänge, Kreisflächen und Reciproken.

a	a^2	a^3	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$2a\pi$	$a^2\pi$	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{1}{a}$
1	1	1	1,000	1,000	6,28	3,142	0,159	1,0000
2	4	8	1,414	1,260	12,57	12,566	0,318	0,5000
3	9	27	1,732	1,442	18,85	28,274	0,477	0,3333
4	16	64	2,000	1,587	25,13	50,265	0,637	0,2500
5	25	125	2,236	1,710	31,42	78,540	0,796	0,2000
6	36	216	2,449	1,817	37,70	113,10	0,955	0,1667
7	49	343	2,646	1,913	43,98	153,94	1,114	0,1429
8	64	512	2,828	2,000	50,26	201,06	1,273	0,1250
9	81	729	3,000	2,080	56,55	254,47	1,432	0,1111
10	100	1000	3,162	2,154	62,83	314,16	1,592	0,1000
11	121	1331	3,317	2,224	69,11	380,13	1,751	0,0909
12	144	1728	3,464	2,289	75,40	452,39	1,910	0,0833
13	169	2197	3,606	2,351	81,68	530,93	2,069	0,0769
14	196	2744	3,742	2,410	87,96	615,75	2,228	0,0714
15	225	3375	3,873	2,466	94,25	706,86	2,387	0,0667
16	256	4096	4,000	2,520	100,53	804,25	2,564	0,0625
17	289	4913	4,123	2,571	106,81	907,92	2,706	0,0588
18	324	5832	4,243	2,621	113,10	1017,9	2,865	0,0556
19	361	6859	4,359	2,668	119,38	1134,1	3,024	0,0526
20	400	8000	4,472	2,714	125,66	1256,6	3,183	0,0500
21	441	9261	4,583	2,759	131,95	1385,4	3,324	0,0476
22	484	10648	4,690	2,802	138,23	1520,5	3,501	0,0455
23	529	12167	4,796	2,844	144,51	1661,9	3,660	0,0435
24	576	13824	4,899	2,884	150,80	1809,6	3,820	0,0417
25	625	15625	5,000	2,924	157,08	1963,5	3,979	0,0400
26	676	17576	5,099	2,962	163,36	2123,7	4,138	0,0385
27	729	19683	5,196	3,000	169,65	2290,2	4,297	0,0370
28	784	21952	5,292	3,037	175,93	2463,0	4,456	0,0357
29	841	24389	5,385	3,072	182,21	2642,1	4,615	0,0345
30	900	27000	5,477	3,107	188,50	2827,4	4,774	0,0333
31	961	29791	5,568	3,141	194,78	3019,1	4,934	0,0323
32	1024	32768	5,657	3,175	201,06	3217,0	5,093	0,0313
33	1089	35937	5,745	3,208	207,35	3421,2	5,252	0,0303
34	1156	39304	5,831	3,240	213,63	3631,7	5,411	0,0294
35	1225	42875	5,916	3,271	219,91	3848,5	5,570	0,0286
36	1296	46656	6,000	3,302	226,19	4071,5	5,729	0,0278
37	1369	50653	6,083	3,332	232,48	4300,8	5,889	0,0270
38	1444	54872	6,164	3,362	238,76	4536,5	6,048	0,0263
39	1521	59319	6,245	3,391	245,04	4778,4	6,207	0,0256
40	1600	64000	6,325	3,420	251,33	5026,6	6,366	0,0250
41	1681	68921	6,403	3,448	257,61	5281,0	6,525	0,0244
42	1764	74088	6,481	3,476	263,89	5541,8	6,684	0,0238
43	1849	79507	6,557	3,503	270,18	5808,8	6,843	0,0233
44	1936	85184	6,633	3,530	276,46	6082,1	7,003	0,0227
45	2025	91125	6,708	3,557	282,74	6361,7	7,162	0,0222
46	2116	97336	6,782	3,583	289,03	6647,6	7,321	0,0217
47	2209	103823	6,856	3,609	295,31	6939,8	7,480	0,0213
48	2304	110592	6,928	3,634	301,59	7238,2	7,639	0,0208
49	2401	117649	7,000	3,659	307,88	7543,0	7,798	0,0204
50	2500	125000	7,071	3,684	314,16	7854,0	7,958	0,0200

a	a^2	a^3	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$2a\pi$	$a^2\pi$	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{1}{a}$
51	2601	132651	7,141	3,708	320,44	8171	8,12	0,0196
52	2704	140608	7,211	3,733	326,73	8495	8,28	0,0192
53	2809	148877	7,280	3,756	333,01	8825	8,43	0,0189
54	2916	157464	7,348	3,780	339,29	9161	8,59	0,0185
55	3025	166375	7,416	3,803	345,58	9503	8,75	0,0182
56	3136	175616	7,483	3,826	351,86	9852	8,91	0,0179
57	3249	185193	7,550	3,849	358,14	10207	9,07	0,0175
58	3364	195112	7,616	3,871	364,42	10568	9,23	0,0172
59	3481	205379	7,681	3,893	370,71	10936	9,39	0,0169
60	3600	216000	7,746	3,915	376,99	11310	9,55	0,0167
61	3721	226981	7,810	3,936	383,27	11690	9,71	0,0164
62	3844	238328	7,874	3,958	389,56	12076	9,87	0,0161
63	3969	250047	7,937	3,979	395,84	12469	10,03	0,0159
64	4096	262144	8,000	4,000	402,12	12868	10,19	0,0156
65	4225	274625	8,062	4,021	408,41	13273	10,34	0,0154
66	4356	287496	8,124	4,041	414,69	13685	10,50	0,0152
67	4489	300763	8,185	4,062	420,97	14103	10,66	0,0149
68	4624	314432	8,246	4,082	427,26	14527	10,82	0,0147
69	4761	328509	8,307	4,102	433,54	14957	10,98	0,0145
70	4900	343000	8,367	4,121	439,82	15394	11,14	0,0143
71	5041	357911	8,426	4,141	446,11	15837	11,30	0,0141
72	5184	373248	8,485	4,160	452,39	16286	11,46	0,0139
73	5329	389017	8,544	4,179	458,67	16742	11,62	0,0137
74	5476	405224	8,602	4,198	464,96	17203	11,78	0,0135
75	5625	421875	8,660	4,217	471,24	17671	11,94	0,0133
76	5776	438976	8,718	4,236	477,52	18146	12,10	0,0132
77	5929	456533	8,775	4,254	483,81	18627	12,25	0,0130
78	6084	474552	8,832	4,273	490,09	19113	12,41	0,0128
79	6241	493039	8,888	4,291	496,37	19607	12,57	0,0127
80	6400	512000	8,944	4,309	502,65	20106	12,73	0,0125
81	6561	531441	9,000	4,327	508,94	20612	12,89	0,0123
82	6724	551368	9,055	4,344	515,22	21124	13,05	0,0122
83	6889	571787	9,110	4,362	521,50	21642	13,21	0,0120
84	7056	592704	9,165	4,380	527,79	22167	13,37	0,0119
85	7225	614125	9,220	4,397	534,07	22698	13,53	0,0118
86	7396	636056	9,274	4,414	540,35	23235	13,69	0,0116
87	7569	658503	9,327	4,431	546,64	23779	13,85	0,0115
88	7744	681472	9,381	4,448	552,92	24328	14,01	0,0114
89	7921	704969	9,434	4,465	559,20	24885	14,16	0,0112
90	8100	729000	9,487	4,481	565,49	25447	14,32	0,0111
91	8281	753571	9,539	4,498	571,77	26016	14,48	0,0110
92	8464	778688	9,592	4,514	578,05	26590	14,64	0,0109
93	8649	804357	9,644	4,531	584,34	27172	14,80	0,0108
94	8836	830584	9,695	4,547	590,62	27759	14,96	0,0106
95	9025	857375	9,747	4,563	596,90	28353	15,12	0,0105
96	9216	884736	9,798	4,579	603,19	28953	15,28	0,0104
97	9409	912673	9,849	4,595	609,47	29559	15,44	0,0103
98	9604	941192	9,899	4,610	615,75	30172	15,60	0,0102
99	9801	970299	9,950	4,626	622,04	30791	15,76	0,0101
100	10000	1000000	10,000	4,642	628,32	31416	15,92	0,0100

Erweiterung der Quadrattafel.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	**1** 0000	0201	0404	0609	0816	1025	1236	1449	1664	1881
11	2100	2321	2544	2769	2996	3225	3456	3689	3924	4161
12	4400	4641	4884	5129	5376	5625	5876	6129	6384	6641
13	6900	7161	7424	7689	7956	8225	8496	8769	9044	9321
14	9600	9881	.0164	.0449	.0736	.1025	.1316	.1609	.1904	.2201
15	**2** 2500	2801	3104	3409	3716	4025	4336	4649	4964	5281
16	5600	5921	6244	6569	6896	7225	7556	7889	8224	8561
17	8900	9241	9584	9929	.0276	.0625	.0976	.1329	.1684	.2041
18	**3** 2400	2761	3124	3489	3856	4225	4596	4969	5344	5721
19	6100	6481	6864	7249	7636	8025	8416	8809	9204	9601
20	**4** 0000	0401	0804	1209	1616	2025	2436	2849	3264	3681
21	4100	4521	4944	5369	5796	6225	6656	7089	7524	7961
22	8400	8841	9284	9729	.0176	.0625	.1076	.1529	.1984	.2441
23	**5** 2900	3361	3824	4289	4756	5225	5696	6169	6644	7121
24	7600	8081	8564	9049	9536	.0025	.0516	.1009	.1504	.2001
25	**6** 2500	3001	3504	4009	4516	5025	5536	6049	6564	7081
26	7600	8121	8644	9169	9696	.0225	.0756	.1289	.1824	.2361
27	**7** 2900	3441	3984	4529	5076	5625	6176	6729	7284	7841
28	8400	8961	9524	.0089	.0656	.1225	.1796	.2369	.2944	.3521
29	**8** 4100	4681	5264	5849	6436	7025	7616	8209	8804	9401
30	**9** 0000	0601	1204	1809	2416	3025	3636	4249	4864	5481
31	6100	6721	7344	7969	8596	9225	9856	.0489	.1124	.1761
32	**10** 2400	3041	3684	4329	4976	5625	6276	6929	7584	8241
33	8900	9561	.0224	.0889	.1556	.2225	.2896	.3569	.4244	.4921
34	**11** 5600	6281	6964	7649	8336	9025	9716	.0409	.1104	.1801
35	**12** 2500	3201	3904	4609	5316	6025	6736	7449	8164	8881
36	9600	.0321	.1044	.1769	.2496	.3225	.3956	.4689	.5424	.6161
37	**13** 6900	7641	8384	9129	9876	.0625	.1376	.2129	.2884	.3641
38	**14** 4400	5161	5924	6689	7456	8225	8996	9769	.0544	.1321
39	**15** 2100	2881	3664	4449	5236	6025	6816	7609	8404	9201
40	**16** 0000	0801	1604	2409	3216	4025	4836	5649	6464	7281
41	8100	8921	9744	.0569	.1396	.2225	.3056	.3889	.4724	.5561
42	**17** 6400	7241	8084	8929	9776	.0625	.1476	.2329	.3184	.4041
43	**18** 4900	5761	6624	7489	8356	9225	.0096	.0969	.1844	.2721
44	**19** 3600	4481	5364	6249	7136	8025	8916	9809	.0704	.1601
45	**20** 2500	3401	4304	5209	6116	7025	7936	8849	9764	.0681
46	**21** 1600	2521	3444	4369	5296	6225	7156	8089	9024	9961
47	**22** 0900	1841	2784	3729	4676	5625	6576	7529	8484	9441
48	**23** 0400	1361	2324	3289	4256	5225	6196	7169	8144	9121
49	**24** 1000	1081	2064	3049	4036	5025	6016	7009	8004	9001

Erweiterung der Quadrattafel.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	**25** 0000	1001	2004	3009	4016	5025	6036	7049	8064	9081
51	**26** 0100	1121	2144	3169	4196	5225	6256	7289	8324	9361
52	**27** 0400	1441	2484	3529	4576	5625	6676	7729	8784	9841
53	**28** 0900	1961	3024	4089	5156	6225	7296	8369	9444	.0521
54	**29** 1600	2681	3764	4849	5936	7025	8116	9209	.0304	.1401
55	**30** 2500	3601	4704	5809	6916	8025	9136	.0249	.1364	.2481
56	**31** 3600	4721	5844	6969	8096	9225	.0356	.1489	.2624	.3761
57	**32** 4900	6041	7184	8329	9476	.0625	.1776	.2929	.4084	.5241
58	**33** 6400	7561	8724	9889	.1056	.2225	.3396	.4569	.5744	.6921
59	**34** 8100	9281	.0464	.1649	.2836	.4025	.5216	.6409	.7604	.8801
60	**36** 0000	1201	2404	3609	4816	6025	7236	8449	9664	.0881
61	**37** 2100	3321	4544	5769	6996	8225	9456	.0689	.1924	.3161
62	**38** 4400	5641	6884	8129	9376	.0625	.1876	.3129	.4384	.5641
63	**39** 6900	8161	9424	.0689	.1956	.3225	.4496	.5769	.7044	.8321
64	**40** 9600	.0881	.2164	.3449	.4736	.6025	.7316	.8609	.9904	:1201
65	**42** 2500	3801	5104	6409	7716	9025	.0336	.1649	.2964	.4281
66	**43** 5600	6921	8244	9569	.0896	.2225	.3556	.4889	.6224	.7561
67	**44** 8900	.0241	.1584	.2929	.4276	.5625	.6976	.8329	.9684	:1041
68	**46** 2400	3761	5124	6489	7856	9225	.0596	.1969	.3344	.4721
69	**47** 6100	7481	8864	.0249	.1636	.3025	.4416	.5809	.7204	.8601
70	**49** 0000	1401	2804	4209	5616	7025	8436	9849	.1264	.2681
71	**50** 4100	5521	6944	8369	9796	.1225	.2656	.4089	.5524	.6961
72	**51** 8400	9841	.1284	.2729	.4176	.5625	.7076	.8529	.9984	:1441
73	**53** 2900	4361	5824	7289	8756	.0225	.1696	.3169	.4644	.6121
74	**54** 7600	9081	.0564	.2049	.3536	.5025	.6516	.8009	.9504	:1001
75	**56** 2500	4001	5504	7009	8516	.0025	.1536	.3049	.4564	.6081
76	**57** 7600	9121	.0644	.2169	.3696	.5225	.6756	.8289	.9824	:1361
77	**59** 2900	4441	5984	7529	9076	.0625	.2176	.3729	.5284	.6841
78	**60** 8400	9961	.1524	.3089	.4656	.6225	.7796	.9369	:0944	:2521
79	**62** 4100	5681	7264	8849	.0436	.2025	.3616	.5209	.6804	.8401
80	**64** 0000	1601	3204	4809	6416	8025	9636	.1249	.2864	.4481
81	**65** 6100	7721	9344	.0969	.2596	.4225	.5856	.7489	.9124	:0761
82	**67** 2400	4041	5684	7329	8976	.0625	.2276	.3929	.5584	.7241
83	**68** 8900	.0561	.2224	.3889	.5556	.7225	.8896	:0569	:2244	:3921
84	**70** 5600	7281	8964	.0649	.2336	.4025	.5716	.7409	.9104	:0801
85	**72** 2500	4201	5904	7609	9316	.1025	.2736	.4449	.6164	.7881
86	**73** 9600	.1321	.3044	.4769	.6496	.8225	.9956	:1689	:3424	:5161
87	**75** 6900	8641	.0384	.2129	.3876	.5625	.7376	.9129	:0884	:2641
88	**77** 4400	6161	7924	9689	.1456	.3225	.4996	.6769	.8544	:0321
89	**79** 2100	3881	5664	7449	9236	.1025	.2816	.4609	.6404	.8201
90	**81** 0000	1801	3604	5409	7216	9025	.0836	.2649	.4464	.6281
91	**82** 8100	9921	.1744	.3569	.5396	.7225	.9056	:0889	:2724	:4561
92	**84** 6400	8241	.0084	.1929	.3776	.5625	.7476	.9329	:1184	:3041
93	**86** 4900	6761	8624	.0489	.2356	.4225	.6096	.7969	.9844	:1721
94	**88** 3600	5481	7364	9249	.1136	.3025	.4916	.6809	.8704	:0601
95	**90** 2500	4401	6304	8209	.0116	.2025	.3936	.5849	.7764	.9681
96	**92** 1600	3521	5444	7369	9296	.1225	.3156	.5089	.7024	.8961
97	**94** 0900	2841	4784	6729	8676	.0625	.2576	.4529	.6484	.8441
98	**96** 0400	2361	4324	6289	8256	.0225	.2196	.4169	.6144	.8121
99	**98** 0100	2081	4064	6049	8036	.0025	.2016	.4009	.6004	.8001

Alter	Schweiz		17 engl. Ges.		Alter	Schweiz		17 engl. Ges.	
	R. A. (m)	Gysi (m)	(m)	p_m		R. A. (m)	Gysi (m)	(m)	p_m
0[a]	10000	10000	—	—	50[a]	3835	5005	69517	0,98406
1	7500	7840	—	—	51	3755	4923	68409	8310
2	7000	7563	—	—	52	3675	4832	67253	8205
3	6700	7423	—	—	53	3595	4740	66046	8091
4	6500	7328	—	—	54	3510	4648	64785	7969
5	6400	7258	—	—	55	3425	4549	63469	7834
6	6310	7201	—	—	56	3340	4449	62094	7687
7	6230	7155	—	—	57	3250	4344	60658	7532
8	6160	7118	—	—	58	3160	4221	59161	7361
9	6100	7087	—	—	59	3065	4107	57600	7175
10	6050	7056	100000	0,99324	60	2970	3990	55973	6966
11	6010	7029	99324	9322	61	2870	3864	54275	6739
12	5975	7005	98650	9319	62	2760	3723	52505	6488
13	5945	6979	97978	9315	63	2640	3579	50661	6216
14	5910	6950	97307	9310	64	2510	3409	48744	5917
15	5875	6924	96636	9306	65	2375	3228	46754	5592
16	5835	6897	95965	9300	66	2235	3022	44693	5239
17	5795	6860	95293	9294	67	2085	2819	42565	4853
18	5750	6828	94620	9287	68	1925	2614	40374	4437
19	5705	6795	93945	9279	69	1755	2428	38128	3991
20	5655	6757	93268	9271	70	1575	2247	35837	3507
21	5605	6716	92588	9262	71	1405	2064	33510	2984
22	5550	6672	91905	9254	72	1245	1876	31159	2420
23	5495	6625	91219	9244	73	1095	1704	28797	1812
24	5435	6576	90529	9233	74	960	1523	26439	1153
25	5375	6533	89835	9223	75	840	1344	24100	0444
26	5315	6486	89137	9211	76	730	1199	21797	8 9682
27	5250	6438	88434	9199	77	630	1042	19548	8853
28	5185	6391	87726	9186	78	540	851	17369	7956
29	5120	6342	87012	9173	79	460	716	15277	6944
30	5055	6290	86292	9158	80	390	574	13290	5959
31	4995	6240	85565	9142	81	330	486	11424	4856
32	4940	6189	84831	9125	82	280	404	9694	3681
33	4890	6141	84089	9108	83	245	332	8112	2409
34	4840	6086	83339	9090	84	205	272	6685	1032
35	4790	6029	82581	9071	85	165	203	5417	7 9490
36	4740	5971	81814	9051	86	135	154	4306	7752
37	4690	5916	81038	9031	87	105	117	3348	5777
38	4640	5854	80253	9009	88	80	84	2537	3473
39	4590	5799	79458	8987	89	55	59	1864	0762
40	4540	5731	78653	8964	90	35	29	1319	6 7627
41	4485	5672	77838	8939	91	20	20	892	3901
42	4425	5611	77012	8911	92	10	12	570	5 9474
43	4360	5534	76173	8875	93	6	7	339	4277
44	4290	5451	75316	8830	94	3	5	184	4 8370
45	4220	5385	74435	8779	95	1	2	89	1573
46	4145	5321	73526	8716	96	—	1	37	3 5135
47	4070	5251	72582	8648	97	—	1	13	0769
48	3995	5166	71601	8574	98	—	1	4	2 5000
49	3915	5092	70580	8494	99	—	—	1	—
50	3835	5005	69517	8406	100	—	—	—	—

n	$1,03^n$	Σ	$1,04^n$	Σ	$1,05^n$	Σ
1	1,0300	—	1,0400	—	1,0500	—
2	1,0609	2,0909	1,0816	2,1216	1,1025	2,1525
3	1,0927	3,1836	1,1249	3,2465	1,1576	3,3101
4	1,1255	4,3091	1,1699	4,4163	1,2155	4,5256
5	1,1593	5,4684	1,2167	5,6330	1,2763	5,8019
6	1,1941	6,6625	1,2653	6,8983	1,3401	7,1420
7	1,2299	7,8923	1,3159	8,2142	1,4071	8,5491
8	1,2668	9,1591	1,3686	9,5828	1,4775	10,0266
9	1,3048	10,4639	1,4233	11,0061	1,5513	11,5779
10	1,3439	11,8078	1,4802	12,4864	1,6289	13,2068
12	1,4258	14,6178	1,6010	15,6268	1,7959	16,7130
14	1,5126	17,5989	1,7317	19,0236	1,9799	20,5786
16	1,6047	20,7616	1,8730	22,6975	2,1829	24,8404
18	1,7024	24,1169	2,0258	26,6712	2,4066	29,5390
20	1,8061	27,6765	2,1911	30,9692	2,6533	34,7193
30	2,4273	49,0027	3,2434	58,3283	4,3219	69,7608
40	3,2620	77,6633	4,8010	98,8265	7,0400	126,8400
50	4,3839	116,1808	7,1067	158,7738	11,4674	219,8154
60	5,8916	167,9450	10,5196	247,5103	18,6792	371,2629
70	7,9178	237,5119	15,5716	378,8621	30,4264	617,9549
80	10,6409	331,0039	23,0498	573,2948	49,5614	1019,7903
90	14,3005	456,6494	34,1193	861,1027	80,7304	1674,3377
100	19,2186	625,5064	50,5049	1287,1286	131,5013	2740,5264

n	$1,03^{-n}$	Σ'	$1,04^{-n}$	Σ'	$1,05^{-n}$	Σ'
1	0,97087	—	0,96154	—	0,95238	—
2	94260	1,9135	92456	1,8861	90703	1,8594
3	91514	2,8286	88900	2,7751	86384	2,7232
4	88849	3,7171	85480	3,6299	82270	3,5460
5	86261	4,5797	82193	4,4518	78353	4,3295
6	83748	5,4172	79031	5,2421	74622	5,0757
7	81309	6,2303	75992	6,0021	71068	5,7864
8	78941	7,0197	73069	6,7327	67684	6,4632
9	76642	7,7861	70259	7,4353	64461	7,1078
10	74409	8,5302	67556	8,1109	61391	7,7217
12	70138	9,9540	62460	9,3851	55684	8,8633
14	66112	11,2961	57748	10 5631	50507	9,8986
16	62317	12,5611	53391	11,6523	45811	10,8378
18	58739	13,7535	49363	12,6593	41552	11,6896
20	55368	14,8775	45639	13,5903	37689	12,4622
30	41199	19,6004	30832	17,2920	23138	15,3725
40	30656	23,1148	20829	19,7928	14205	17,1591
50	22811	25,7298	14071	21,4822	08720	18,2559
60	16973	27,6756	09506	22,6235	05354	18,9293
70	12630	29,1234	06422	23,3945	03287	19,3427
80	09398	30,2008	04338	23,9154	02018	19,5965
90	06993	31,0024	02931	24,2673	01239	19,7523
100	05203	31,5989	01980	24,5050	00760	19,8479

n	Natürliche Logarithmen.	Gemeine Logarithmen.	n	Natürliche Logarithmen.	Gemeine Logarithmen.
1	0,00000 00000	0,00000 00000	191	5,25227 34280	2,28103 33672
2	0,69314 71806	0,30102 99957	193	5,26269 01889	2,28555 73090
3	1,09861 22887	0,47712 12547	197	5,28320 37287	2,29446 62262
5	1,60943 79124	0,69897 00043	199	5,29330 48247	2,29885 30764
7	1,94591 01491	0,84509 80400	211	5,35185 81335	2,32428 24553
11	2,39789 52728	1,04139 26852	223	5,40717 17715	2,34830 48630
13	2,56494 93575	1,11394 33523	227	5,42495 00175	2,35602 58572
17	2,83321 33441	1,23044 89214	229	5,43372 20036	2,35983 54823
19	2,94443 89792	1,27875 36010	233	5,45103 84536	2,36735 59210
23	3,13549 42159	1,36172 78360	239	5,47646 35519	2,37839 79009
29	3,36729 58300	1,46239 79979	241	5,48479 69335	2,38201 70426
31	3,43398 72045	1,49136 16938	251	5,52545 29391	2,39967 37215
37	3,61091 79126	1,56820 17241	257	5,54907 60849	2,40993 31233
41	3,71357 20667	1,61278 38567	263	5,57215 40322	2,41995 57485
43	3,76120 01157	1,63346 84556	269	5,59471 13796	2,42975 22800
47	3,85014 76017	1,67209 78579	271	5,60211 88209	2,43296 92909
53	3,97029 19136	1,72427 58696	277	5,62401 75062	2,44247 97691
59	4,07753 74439	1,77085 20116	281	5,63835 46693	2,44870 63199
61	4,11087 38642	1,78532 98350	283	5,64544 68976	2,45178 64355
67	4,20469 26194	1,82607 48027	293	5,68017 26090	2,46686 76204
71	4,26267 98770	1,85125 83487	307	5,72684 77476	2,48713 83755
73	4,29045 94411	1,86332 28601	311	5,73979 29122	2,49276 03890
79	4,36944 78525	1,89762 70913	313	5,74620 31905	2,49554 43375
83	4,41884 06078	1,91907 80924	317	5,75890 17739	2,50105 92622
89	4,48863 63697	1,94939 00066	331	5,80211 83754	2,51982 79938
97	4,57471 09785	1,98677 17343	337	5,82008 29304	2,52762 99009
101	4,61512 05168	2,00432 13738	347	5,84932 47799	2,54032 94748
103	4,63472 89882	2,01283 72247	349	5,85507 19222	2,54282 54270
107	4,67282 88345	2,02938 37777	353	5,86646 80569	2,54777 47054
109	4,69134 78822	2,03742 64979	359	5,88332 23885	2,55509 44486
113	4,72738 78187	2,05307 84435	367	5,90536 18481	2,56466 60642
127	4,84418 70865	2,10380 37210	373	5,92157 84196	2,57170 88318
131	4,87519 73232	2,11727 12957	379	5,93753 62051	2,57863 92100
137	4,91998 09258	2,13672 05672	383	5,94803 49892	2,58319 87740
139	4,93447 39331	2,14301 48003	389	5,96357 93436	2,58994 96013
149	5,00394 63059	2,17318 62684	397	5,98393 62807	2,59879 05068
151	5,01727 98368	2,17897 69473	401	5,99396 14273	2,60314 43726
157	5,05624 58053	2,19589 96524	409	6,01371 51560	2,61172 33080
163	5,09375 02008	2,21218 76044	419	6,03787 09199	2,62221 40230
167	5,11799 38124	2,22271 64711	421	6,04263 28337	2,62428 20958
173	5,15329 15945	2,23804 61031	431	6,06610 80901	2,63447 72702
179	5,18738 58058	2,25285 30310	433	6,07073 77280	2,63648 78964
181	5,19849 70313	2,25767 85749	439	6,08449 94131	2,64246 45202

log 10 × 2 = 4,60517 01859 88091 36804
3 6,90775 52789 82137 05205
4 9,21034 03719 76182 73607
5 11,51292 54649 70228 42009

log 10 × 6 = 13,81551 05579 64274 10411
7 16,11809 56509 58319 78813
8 18,42068 07439 52365 47214
9 20,72326 58369 46411 15616

n	Natürliche Logarithmen.	Gemeine Logarithmen.	n	Natürliche Logarithmen.	Gemeine Logarithmen.
443	6,09356 97700	2,64640 37262	727	6,58892 64775	2,86153 44109
449	6,10702 28877	2,65224 63410	733	6,59714 57019	2,86510 39746
457	6,12468 33909	2,65991 62001	739	6,60529 79209	2,86864 44384
461	6,13339 80430	2,66370 09254	743	6,61069 60447	2,87098 88138
463	6,13772 70541	2,66558 09910	751	6,62140 56518	2,87563 99370
467	6,14632 92577	2,66931 68806	757	6,62936 32534	2,87909 58795
479	6,17170 05974	2,68033 55134	761	6,63463 33579	2,88138 46568
487	6,18826 41231	2,68752 89612	769	6,64509 09695	2,88592 63398
491	6,19644 41278	2,69108 14921	773	6,65027 90486	2,88817 94939
499	6,21260 60958	2,69810 05456	787	6,66822 82484	2,89597 47324
503	6,22059 01701	2,70156 79851	797	6,68085 46788	2,90145 83214
509	6,23244 80166	2,70671 77823	809	6,69579 89171	2,90794 85216
521	6,25575 00418	2,71683 77233	811	6,69826 80541	2,90902 08542
523	6,25958 14641	2,71850 16889	821	6,71052 31095	2,91434 31571
541	6,29341 92788	2,73319 72651	823	6,71295 62007	2,91539 98352
547	6,30444 88024	2,73798 73263	827	6,71780 46950	2,91750 55096
557	6,32256 52399	2,74585 51952	829	6,72022 01551	2,91855 45306
563	6,33327 96281	2,75050 83948	839	6,73221 07065	2,92376 19608
569	6,34388 04341	2,75511 22664	853	6,74875 95475	2,93094 90312
571	6,34738 92097	2,75663 61082	857	6,75343 79186	2,93298 08219
577	6,35784 22665	2,76117 58132	859	6,75576 89220	2,93399 31638
587	6,37502 48198	2,76863 81012	863	6,76041 46911	2,93601 07957
593	6,38519 43990	2,77305 46934	877	6,77650 69924	2,94299 95934
599	6,39526 15981	2,77742 68224	881	6,78105 76259	2,94497 59084
601	6,39859 49345	2,77887 44720	883	6,78332 52006	2,94596 07036
607	6,40852 87911	2,78318 86911	887	6,78784 49823	2,94792 86198
613	6,41836 49359	2,78746 04745	907	6,81014 24501	2,95760 72871
617	6,42486 90239	2,79028 51640	911	6,81454 28973	2,95951 83770
619	6,42810 52727	2,79169 06490	919	6,82328 61224	2,96331 55114
631	6,44730 58625	2,80002 93592	929	6,83410 87388	2,96801 57140
641	6,46302 94569	2,80685 80295	937	6,84268 32822	2,97173 95909
643	6,46614 47242	2,80821 09729	941	6,84694 31396	2,97358 96234
647	6,47234 62945	2,81090 42807	947	6,85329 90932	2,97634 99790
653	6,48157 71293	2,81491 31813	953	6,85961 49037	2,97909 29006
659	6,49072 35345	2,81888 54146	967	6,87419 84955	2,98542 64741
661	6,49375 38399	2,82020 14595	971	6,87832 64683	2,98721 92299
673	6,51174 53296	2,82801 50642	977	6,88448 66520	2,98989 45637
677	6,51767 12729	2,83058 86687	983	6,89060 91201	2,99255 35178
683	6,52649 48596	2,83442 07037	991	6,89871 45343	2,99607 36545
691	6,53813 98238	2,83947 80474	997	6,90475 07700	2,99869 51583
701	6,55250 78870	2,84571 80180			
709	6,56385 55265	2,85064 62352			
719	6,57786 13577	2,85672 88904			

e = 2,71828 18284 59045 23536
log e = 0,43429 44819 03251 82765
log 10 = 2,30258 50929 94045 68402

log e × 2 = 0,86858 89638 06503 65530
3 1,30288 34457 09755 48295
4 1,73717 79276 13007 31060
5 2,17147 24095 16259 13826

log e × 6 = 2,60576 68914 19510 96591
7 3,04006 13733 22762 79356
8 3,47435 58552 26014 62121
9 3,90865 03371 29266 44886

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6117
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6415	6425
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6513	6522
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6609	6618
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6702	6712
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6794	6803
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6875	6884	6893
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6964	6972	6981
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7016	7024	7033	7042	[illegible]	7050	7059	7067
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7101	7110	7118	7126	8	7135	7143	7152
[illegible]	[illegible]	[illegible]	7177	[illegible]	7185	7193	7202	7210	[illegible]	7218	7226	7235
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7267	7275	7284	7292	8	7300	7308	7316
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7348	7356	7364	7372	8	7380	7388	7396

n	0	1	2	D	3	4	5	6	D	7	8	9
55	7404	7412	7419	8	7427	7435	7443	7451	8	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	8	7505	7513	7520	7528	8	7536	7544	7551
57	7559	7566	7574	8	7582	7589	7597	7604	8	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	8	7657	7664	7672	7679	8	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	8	7731	7738	7745	7752	8	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7	7803	7810	7818	7825	7	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7	7875	7882	7889	7896	7	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7	7945	7952	7959	7966	7	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	7	8014	8021	8028	8035	7	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	7	8082	8089	8096	8102	7	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	7	8149	8156	8162	8169	7	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	6	8215	8222	8228	8235	6	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	6	8280	8287	8293	8299	6	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	6	8344	8351	8357	8363	6	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	6	8407	8414	8420	8426	6	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	6	8470	8476	8482	8488	6	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	6	8531	8537	8543	8549	6	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	6	8591	8597	8603	8609	6	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	6	8651	8657	8663	8669	6	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	6	8710	8716	8722	8727	6	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	6	8768	8774	8779	8785	6	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	6	8825	8831	8837	8842	6	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	6	8882	8887	8893	8899	6	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	6	8938	8943	8949	8954	6	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	6	8993	8998	9004	9009	6	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	6	9047	9053	9058	9063	6	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	5	9101	9106	9112	9117	5	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	5	9154	9159	9165	9170	5	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	5	9206	9212	9217	9222	5	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	5	9258	9263	9269	9274	5	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	5	9309	9315	9320	9325	5	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	5	9360	9365	9370	9375	5	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	5	9410	9415	9420	9425	5	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	5	9460	9465	9469	9474	5	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	5	9509	9513	9518	9523	5	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	5	9557	9562	9566	9571	5	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	5	9605	9609	9614	9619	5	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	5	9652	9657	9661	9666	5	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	5	9699	9703	9708	9713	4	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	4	9745	9750	9754	9759	4	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	4	9791	9795	9800	9805	4	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	4	9836	9841	9845	9850	4	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	4	9881	9886	9890	9894	4	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	4	9926	9930	9934	9939	4	9943	9948	9952
99	9956	9960	9965	4	9969	9974	9978	9983	4	9987	9991	9996

n	0	1	2	D	3	4	5	6	D	7	8	9
10	0000	0043	0086	42	0128	0170	0212	0253	41	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	39	0531	0569	0607	0645	37	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	35	0899	0934	0969	1004	34	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	33	1239	1271	1303	1335	32	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	30	1553	1584	1614	1644	29	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	29	1847	1875	1903	1931	28	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	27	2122	2148	2175	2201	26	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	25	2380	2405	2430	2455	25	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	24	2625	2648	2672	2695	23	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	23	2856	2878	2900	2923	22	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	21	3075	3096	3118	3139	21	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	21	3284	3304	3324	3345	20	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	19	3483	3502	3522	3541	19	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	19	3674	3692	3711	3729	18	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	18	3856	3874	3892	3909	18	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	17	4031	4048	4065	4082	17	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	17	4200	4216	4232	4249	16	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	16	4362	4378	4393	4409	16	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	16	4518	4533	4548	4564	15	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	15	4669	4683	4698	4713	15	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	14	4814	4829	4843	4857	14	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	14	4955	4969	4983	4997	14	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	13	5092	5105	5119	5132	13	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	13	5224	5237	5250	5263	13	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	13	5353	5366	5378	5391	13	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	13	5478	5490	5502	5514	13	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	12	5599	5611	5623	5635	12	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	12	5717	5729	5740	5752	11	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	11	5832	5843	5855	5866	11	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	11	5944	5955	5966	5977	11	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	11	6053	6064	6075	6085	11	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	11	6160	6170	6180	6191	10	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	10	6263	6274	6284	6294	10	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	10	6365	6375	6385	6395	10	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	10	6464	6474	6484	6493	10	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	10	6561	6571	6580	6590	9	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	9	6656	6665	6675	6684	9	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	9	6749	6758	6767	6776	9	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	9	6839	6848	6857	6866	9	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	9	6928	6937	6946	6955	9	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	9	7016	7024	7033	7042	8	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	8	7101	7110	7118	7126	8	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	8	7185	7193	7202	7210	8	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	8	7267	7275	7284	7292	8	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	8	7348	7356	7364	7372	8	7380	7388	7396

n	0	1	2	D	3	4	5	6	D	7	8	9
55	7404	7412	7419	8	7427	7435	7443	7451	8	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	8	7505	7513	7520	7528	8	7536	7544	7551
57	7559	7566	7574	8	7582	7589	7597	7604	8	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	8	7657	7664	7672	7679	8	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	8	7731	7738	7745	7752	8	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7	7803	7810	7818	7825	7	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7	7875	7882	7889	7896	7	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7	7945	7952	7959	7966	7	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	7	8014	8021	8028	8035	7	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	7	8082	8089	8096	8102	7	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	7	8149	8156	8162	8169	7	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	6	8215	8222	8228	8235	6	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	6	8280	8287	8293	8299	6	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	6	8344	8351	8357	8363	6	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	6	8407	8414	8420	8426	6	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	6	8470	8476	8482	8488	6	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	6	8531	8537	8543	8549	6	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	6	8591	8597	8603	8609	6	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	6	8651	8657	8663	8669	6	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	6	8710	8716	8722	8727	6	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	6	8768	8774	8779	8785	6	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	6	8825	8831	8837	8842	6	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	6	8882	8887	8893	8899	6	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	6	8938	8943	8949	8954	6	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	6	8993	8998	9004	9009	6	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	6	9047	9053	9058	9063	6	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	5	9101	9106	9112	9117	5	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	5	9154	9159	9165	9170	5	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	5	9206	9212	9217	9222	5	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	5	9258	9263	9269	9274	5	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	5	9309	9315	9320	9325	5	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	5	9360	9365	9370	9375	5	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	5	9410	9415	9420	9425	5	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	5	9460	9465	9469	9474	5	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	5	9509	9513	9518	9523	5	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	5	9557	9562	9566	9571	5	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	5	9605	9609	9614	9619	5	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	5	9652	9657	9661	9666	5	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	5	9699	9703	9708	9713	4	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	4	9745	9750	9754	9759	4	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	4	9791	9795	9800	9805	4	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	4	9836	9841	9845	9850	4	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	4	9881	9886	9890	9894	4	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	4	9926	9930	9934	9939	4	9943	9948	9952
99	9956	9960	9965	4	9969	9974	9978	9983	4	9987	9991	9996

Log. Sinus.

	0′	2′	4′	6′	8′	10′	12′	14′	16′	18′
0° 0′	n	6,7648	7,0658	7,2419	7,3668	7,4637	7,5429	7,6099	7,6678	7,7190
20	7,7648	7,8061	7,8439	7,8787	7,9109	7,9408	7,9689	7,9952	8,0200	8,0435
40	8,0658	8,0870	8,1072	8,1265	8,1450	8,1627	8,1797	8,1961	8,2119	8,2271
1 0	8,2419	8,2561	8,2699	8,2832	8,2962	8,3088	8,3210	8,3329	8,3445	8,3558
20	8,3668	8,3775	8,3880	8,3982	8,4082	8,4179	8,4275	8,4368	8,4459	8,4549
40	8,4637	8,4723	8,4807	8,4890	8,4971	8,5050	8,5129	8,5206	8,5281	8,5355
2 0	8,5428	8,5500	8,5571	8,5640	8,5708	8,5776	8,5842	8,5907	8,5972	8,6035
20	8,6097	8,6159	8,6220	8,6279	8,6339	8,6397	8,6454	8,6511	8,6567	8,6622
40	8,6677	8,6731	8,6784	8,6837	8,6889	8,6940	8,6991	8,7041	8,7090	8,7140
3 0	8,7188	8,7236	8,7283	8,7330	8,7377	8,7423	8,7468	8,7513	8,7557	8,7602
20	8,7645	8,7688	8,7731	8,7773	8,7815	8,7857	8,7898	8,7939	8,7979	8,8019
40	8,8059	8,8098	8,8137	8,8175	8,8213	8,8251	8,8289	8,8326	8,8363	8,8400
4 0	8,8436	8,8472	8,8508	8,8543	8,8578	8,8613	8,8647	8,8682	8,8716	8,8749
20	8,8783	8,8816	8,8849	8,8882	8,8914	8,8946	8,8978	8,9010	8,9042	8,9073
40	8,9104	8,9135	8,9165	8,9196	8,9226	8,9256	8,9286	8,9315	8,9345	8,9374
5 0	8,9403	8,9432	8,9460	8,9489	8,9517	8,9545	8,9573	8,9601	8,9628	8,9655
20	8,9682	8,9709	8,9736	8,9763	8,9789	8,9816	8,9842	8,9868	8,9894	8,9919
40	8,9945	8,9970	8,9996	9,0021	9,0046	9,0070	9,0095	9,0120	9,0144	9,0168
6 0	9,0192	9,0216	9,0240	9,0264	9,0287	9,0311	9,0334	9,0357	9,0380	9,0403
20	9,0426	9,0449	9,0472	9,0494	9,0516	9,0539	9,0561	9,0583	9,0605	9,0626
40	9,0648	9,0670	9,0691	9,0712	9,0734	9,0755	9,0776	9,0797	9,0818	9,0838
7 0	9,0859	9,0879	9,0900	9,0920	9,0940	9,0961	9,0981	9,1001	9,1020	9,1040
20	9,1060	9,1080	9,1099	9,1118	9,1138	9,1157	9,1176	9,1195	9,1214	9,1233
40	9,1252	9,1271	9,1289	9,1308	9,1326	9,1345	9,1363	9,1381	9,1399	9,1418
8 0	9,1436	9,1453	9,1471	9,1489	9,1507	9,1525	9,1542	9,1560	9,1577	9,1594
20	9,1612	9,1629	9,1646	9,1663	9,1680	9,1697	9,1714	9,1731	9,1747	9,1764
40	9,1781	9,1797	9,1814	9,1830	9,1847	9,1863	9,1879	9,1895	9,1911	9,1927
9 0	9,1943	9,1959	9,1975	9,1991	9,2007	9,2022	9,2038	9,2054	9,2069	9,2085
20	9,2100	9,2115	9,2131	9,2146	9,2161	9,2176	9,2191	9,2206	9,2221	9,2236
40	9,2251	9,2266	9,2280	9,2295	9,2310	9,2324	9,2339	9,2353	9,2368	9,2382
10 0	9,2397	9,2411	9,2425	9,2439	9,2454	9,2468	9,2482	9,2496	9,2510	9,2524

	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°
0′	9,2397	9,2806	9,3179	9,3521	9,3837	9,4130	9,4403	9,4659	9,4900	9,5126
4	2425	2832	3202	3543	3857	4149	4421	4676	4915	5141
8	2454	2858	3226	3564	3877	4168	4438	4692	4931	5156
12	2482	2883	3249	3586	3897	4186	4456	4709	4946	5170
16	2510	2909	3273	3608	3917	4205	4473	4725	4962	5185
20	2538	2934	3296	3629	3937	4223	4491	4741	4977	5199
24	2565	2959	3319	3650	3957	4242	4508	4757	4992	5213
28	2593	2984	3342	3671	3976	4260	4525	4773	5007	5228
32	2620	3009	3365	3692	3996	4278	4542	4789	5022	5242
36	2647	3034	3387	3713	4015	4296	4559	4805	5037	5256
40	2674	3058	3410	3734	4035	4314	4576	4821	5052	5270
44	2701	3083	3432	3755	4054	4332	4593	4837	5067	5285
48	2727	3107	3455	3775	4073	4350	4609	4853	5082	5299
52	2754	3131	3477	3796	4092	4368	4626	4869	5097	5313
56	2780	3155	3499	3816	4111	4386	4643	4884	5112	5327
60	2806	3179	3521	3837	4130	4403	4659	4900	5126	5341

Log. Sinus.

	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°
0′	9,5341	9,5543	9,5736	9,5919	9,6093	9,6259	9,6418	9,6570	9,6716	9,6856
10	5375	5576	5767	5948	6121	6286	6444	6595	6740	6878
20	5409	5609	5798	5978	6149	6313	6470	6620	6763	6901
30	5443	5641	5828	6007	6177	6340	6495	6644	6787	6923
40	5477	5673	5859	6036	6205	6366	6521	6668	6810	6946
50	5510	5704	5889	6065	6232	6392	6546	6692	6833	6968
	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°
0′	9,6990	9,7118	9,7242	9,7361	9,7476	9,7586	9,7692	9,7795	9,7893	9,7989
10	7012	7139	7262	7380	7494	7604	7710	7811	7910	8004
20	7033	7160	7282	7400	7513	7622	7727	7828	7926	8020
30	7055	7181	7302	7419	7531	7640	7744	7844	7941	8035
40	7076	7201	7322	7438	7550	7657	7761	7861	7957	8050
50	7097	7222	7342	7457	7568	7675	7778	7877	7973	8066
	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°	48°	49°
0′	9,8081	9,8169	9,8255	9,8338	9,8418	9,8495	9,8569	9,8641	9,8711	9,8778
10	8096	8184	8269	8351	8431	8507	8582	8653	8722	8789
20	8111	8198	8283	8365	8444	8520	8594	8665	8733	8800
30	8125	8213	8297	8378	8457	8532	8606	8676	8745	8810
40	8140	8227	8311	8391	8469	8545	8618	8688	8756	8821
50	8155	8241	8324	8405	8482	8557	8629	8699	8767	8832
	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°
0′	9,8843	9,8905	9,8965	9,9023	9,9080	9,9134	9,9186	9,9236	9,9284	9,9331
10	8853	8915	8975	9033	9089	9142	9194	9244	9292	9338
20	8864	8925	8985	9042	9098	9151	9203	9252	9300	9346
30	8874	8935	8995	9052	9107	9160	9211	9260	9308	9353
40	8884	8945	9004	9061	9116	9169	9219	9268	9315	9361
50	8895	8955	9014	9070	9125	9177	9228	9276	9323	9368
	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	68°	69°
0′	9,9375	9,9418	9,9459	9,9499	9,9537	9,9573	9,9607	9,9640	9,9672	9,9702
10	9383	9425	9466	9505	9543	9579	9613	9646	9677	9706
20	9390	9432	9473	9512	9549	9584	9618	9651	9682	9711
30	9397	9439	9479	9518	9555	9590	9624	9656	9687	9716
40	9404	9446	9486	9524	9561	9596	9629	9661	9692	9721
50	9411	9453	9492	9530	9567	9602	9635	9667	9697	9725
	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°
0′	9,9730	9,9757	9,9782	9,9806	9,9828	9,9849	9,9869	9,9887	9,9904	9,9919
10	9734	9761	9786	9810	9832	9853	9872	9890	9907	9922
20	9739	9765	9790	9814	9836	9856	9875	9893	9909	9924
30	9743	9770	9794	9817	9839	9859	9878	9896	9912	9927
40	9748	9774	9798	9821	9843	9863	9881	9899	9914	9929
50	9752	9778	9802	9825	9846	9866	9884	9901	9917	9931
	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°
0′	9,9934	9,9946	9,9958	9,9968	9,9976	9,9983	9,9989	9,9994	9,9997	9,9999
10	9936	9948	9959	9969	9977	9985	9990	9995	9998	0,0000
20	9938	9950	9961	9971	9979	9986	9991	9995	9998	0000
30	9940	9952	9963	9972	9980	9987	9992	9996	9999	0000
40	9942	9954	9964	9973	9981	9988	9993	9996	9999	0000
50	9944	9956	9966	9975	9982	9989	9993	9997	9999	0000

Log. Tangens.

		0′	2′	4′	6′	8′	10′	12′	14′	16′	18′
0°	0′	–	6.7648	7.0658	7.2419	7.3668	7.4637	7.5429	7.6099	7.6678	7.7190
	20	7,7648	7.8062	7.8439	7.8787	7.9109	7.9409	7.9689	7.9952	8.0200	8.0435
	40	8,0658	8,0870	8,1072	8,1265	8,1450	8,1627	8,1798	8,1962	8,2120	8,2272
1	0	8.2419	8.2562	8.2700	8.2833	8.2963	8.3089	8.3211	8.3330	8.3446	8.3559
	20	8.3669	8.3776	8.3881	8.3983	8.4083	8.4181	8.4276	8.4370	8.4461	8.4551
	40	8,4638	8,4725	8,4809	8,4892	8.4973	8.5053	8.5131	8.5208	8.5283	8.5358
2	0	8.5431	8.5503	8.5573	8.5643	8.5711	8.5779	8.5845	8.5911	8.5975	8.6038
	20	8.6101	8.6163	8.6223	8.6283	8.6343	8.6401	8.6459	8.6515	8.6571	8.6627
	40	8.6682	8.6736	8.6789	8.6842	8.6894	8.6945	8.6996	8.7046	8.7096	8.7145
3	0	8.7194	8.7242	8.7290	8.7337	8.7383	8.7429	8.7475	8.7520	8.7565	8.7609
	20	8.7652	8.7696	8.7739	8.7781	8.7823	8.7865	8.7906	8.7947	8.7988	8.8028
	40	8.8067	8.8107	8.8146	8.8185	8.8223	8.8261	8.8299	8.8336	8.8373	8.8410
4	0	8.8446	8.8483	8.8518	8.8554	8.8589	8.8624	8.8659	8.8694	8.8728	8.8762
	20	8.8795	8.8829	8.8862	8.8895	8.8927	8.8960	8.8992	8.9024	8.9056	8.9087
	40	8.9118	8.9150	8.9180	8.9211	8.9241	8.9272	8.9302	8.9331	8.9361	8.9390
5	0	8.9420	8.9449	8.9477	8.9506	8.9534	8.9563	8.9591	8.9619	8.9646	8.9674
	20	8.9701	8.9729	8.9756	8.9783	8.9809	8.9836	8.9862	8.9888	8.9915	8.9940
	40	8.9966	8.9992	9.0017	9.0043	9.0068	9.0093	9.0118	9.0143	9.0167	9.0192
6	0	9.0216	9.0240	9.0265	9.0289	9.0312	9.0336	9.0360	9.0383	9.0407	9.0430
	20	9.0453	9.0476	9.0499	9.0521	9.0544	9.0567	9.0589	9.0611	9.0633	9.0656
	40	9.0678	9.0699	9.0721	9.0743	9.0764	9.0786	9.0807	9.0828	9.0849	9.0870

	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°
0′	8.9420	9.0216	9.0891	9,1478	9.1997	9.2463	9.2887	9.3275	9.3634	9.3968
10	9563	0336	0995	1569	2078	2536	2953	3336	3691	4021
20	9701	0453	1096	1658	2158	2609	3020	3397	3748	4074
30	9836	0567	1194	1745	2236	2680	3085	3458	3804	4127
40	9966	0678	1291	1831	2313	2750	3149	3517	3859	4178
50	9.0093	0786	1385	1915	2389	2819	3212	3576	3914	4230

	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°
0′	9.4281	9.4575	9.4853	9.5118	9.5370	9.5611	9.5842	9.6064	9.6279	9.6486
10	4331	4622	4898	5161	5411	5650	5879	6100	6314	6520
20	4381	4669	4943	5203	5451	5689	5917	6136	6348	6553
30	4430	4716	4987	5245	5491	5727	5954	6172	6383	6587
40	4479	4762	5031	5287	5531	5766	5991	6208	6417	6620
50	4527	4808	5075	5329	5571	5804	6028	6243	6452	6654

	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°
0′	9,6687	9.6882	9.7072	9,7257	9.7438	9.7614	9.7788	9.7958	9.8125	9.8290
10	6720	6914	7103	7287	7467	7644	7816	7986	8153	8317
20	6752	6946	7134	7317	7497	7673	7845	8014	8180	8344
30	6785	6977	7165	7348	7526	7701	7873	8042	8208	8371
40	6817	7009	7196	7378	7556	7730	7902	8070	8235	8398
50	6850	7040	7226	7408	7585	7759	7930	8097	8263	8425

	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°
0′	9,8452	9,8613	9,8771	9,8928	9.9084	9.9238	9.9392	9.9544	9.9697	9.9848
10	8479	8639	8797	8954	9110	9264	9417	9570	9722	9874
20	8506	8666	8824	8980	9135	9289	9443	9595	9747	9899
30	8533	8692	8850	9006	9161	9315	9468	9621	9772	9924
40	8559	8718	8876	9032	9187	9341	9494	9646	9798	9949
50	8586	8745	8902	9058	9212	9366	9519	9671	9823	9975

Log. Tangens.

	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°
0′	0,0000	0,0152	0,0303	0,0456	0,0608	0,0762	0,0916	0,1072	0,1229	0,1387
10	0025	0177	0329	0481	0634	0788	0942	1098	1255	1414
20	0051	0202	0354	0506	0659	0813	0968	1124	1282	1441
30	0076	0227	0379	0532	0685	0839	0994	1150	1308	1467
40	0101	0253	0405	0557	0711	0865	1020	1176	1334	1494
50	0126	0278	0430	0583	0736	0890	1046	1203	1361	1521

	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°
0′	0,1548	0,1710	0,1875	0,2042	0,2212	0,2386	0,2562	0,2743	0,2928	0,3118
10	1575	1737	1903	2070	2241	2415	2592	2774	2960	3150
20	1602	1765	1930	2098	2270	2444	2622	2804	2991	3183
30	1629	1792	1958	2127	2299	2474	2652	2835	3023	3215
40	1656	1820	1986	2155	2327	2503	2683	2866	3054	3248
50	1683	1847	2014	2184	2356	2533	2713	2897	3086	3280

	65°	66°	67°	68°	69°	70°	71°	72°	73°	74°
0′	0,3313	0,3514	0,3721	0,3936	0,4158	0,4389	0.4630	0,4882	0,5147	0,5425
10	3346	3548	3757	3972	4196	4429	4671	4925	5192	5473
20	3380	3583	3792	4009	4234	4469	4713	4969	5238	5521
30	3413	3617	3828	4046	4273	4509	4755	5013	5284	5570
40	3447	3652	3864	4083	4311	4549	4797	5057	5331	5619
50	3480	3686	3900	4121	4350	4589	4839	5102	5378	5669

	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°
0′	0,5719	0,6032	0,6366	0,6725	0,7113	0,7537	0,8003	0,8522	0,9109	0,9784
10	5770	6086	6424	6788	7181	7611	8085	8615	9214	9907
20	5822	6141	6483	6851	7250	7687	8169	8709	9322	1,0034
30	5873	6196	6542	6915	7320	7764	8255	8806	9433	0164
40	5926	6252	6603	6980	7391	7842	8342	8904	9547	0299
50	5979	6309	6664	7047	7464	7922	8431	9005	9664	0437

	0′	2′	4′	6′	8′	10′	12′	14′	16′	18′
83° 0′	0,9109	0,9129	0,9151	0,9172	0,9193	0,9214	0,9236	0,9257	0,9279	0,9301
20	0,9322	0,9344	0,9367	0,9389	0,9411	0,9433	0,9456	0,9479	0,9501	0,9524
40	0,9547	0,9570	0,9593	0.9617	0,9640	0,9664	0,9688	0,9711	0,9735	0,9760
84 0	0,9784	0,9808	0,9833	0,9857	0,9882	0,9907	0,9932	0,9957	0.9983	1,0008
20	1,0034	1,0060	1,0085	1,0112	1,0138	1,0164	1.0191	1,0218	1,0244	1,0271
40	1,0299	1,0326	1,0354	1,0381	1,0409	1,0437	1,0466	1,0494	1,0523	1,0551
85 0	1,0580	1,0610	1,0639	1,0669	1,0698	1,0728	1,0759	1,0789	1,0820	1,0850
20	1,0882	1,0913	1,0944	1,0976	1.1008	1,1040	1,1073	1,1105	1,1138	1,1171
40	1,1205	1,1238	1,1272	1,1306	1,1341	1,1376	1,1411	1,1446	1,1482	1,1517
86 0	1,1554	1,1590	1,1627	1,1664	1,1701	1,1739	1,1777	1.1815	1,1854	1,1893
20	1,1933	1,1972	1,2012	1,2053	1,2094	1,2135	1,2177	1,2219	1,2261	1,2304
40	1,2318	1,2391	1,2435	1,2480	1,2525	1,2571	1,2617	1,2663	1,2710	1,2758
87 0	1,2806	1,2855	1,2904	1,2954	1,3004	1,3055	1,3106	1,3158	1,3211	1,3264
20	1,3318	1,3373	1,3429	1,3485	1,3541	1,3599	1,3657	1,3717	1,3777	1,3837
40	1,3899	1,3962	1,4025	1.4089	1,4155	1,4221	1,4289	1,4357	1,4427	1,4497
88 0	1,4569	1,4642	1,4717	1,4792	1,4869	1,4947	1,5027	1,5108	1,5191	1.5275
20	1,5362	1,5449	1,5539	1,5630	1.5724	1,5819	1,5917	1,6017	1,6119	1,6224
40	1,6331	1,6441	1,6554	1,6670	1,6789	1,6911	1,7037	1,7167	1,7300	1,7438
89 0	1,7581	1,7728	1,7880	1,8038	1,8202	1,8373	1.8550	1,8735	1,8928	1,9130
20	1,9342	1,9565	1,9800	2,0048	2,0311	2,0591	2,0891	2,1213	2,1561	2,1938
40	2,2352	2,2810	2,3322	2,3901	2,4571	2,5363	2,6332	2,7581	2,9342	3,2352

Log. Secans.

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
0'	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0011	0,0017	0,0024	0,0032	0,0042	0,0054
10	0000	0001	0003	0007	0011	0018	0025	0034	0044	0056
20	0000	0001	0004	0007	0012	0019	0027	0036	0046	0058
30	0000	0001	0004	0008	0013	0020	0028	0037	0048	0060
40	0000	0002	0005	0009	0014	0021	0029	0039	0050	0062
50	0000	0002	0005	0010	0015	0022	0031	0041	0052	0064
	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°
0'	0,0066	0,0080	0,0096	0,0113	0,0131	0,0151	0,0172	0,0194	0,0218	0,0243
10	0069	0083	0099	0116	0134	0154	0175	0198	0222	0248
20	0071	0085	0101	0119	0137	0157	0179	0202	0226	0252
30	0073	0088	0104	0122	0141	0161	0183	0206	0230	0256
40	0076	0091	0107	0125	0144	0164	0186	0210	0235	0261
50	0078	0093	0110	0128	0147	0168	0190	0214	0239	0266
	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°
0'	0,0270	0,0298	0,0328	0,0360	0,0393	0,0427	0,0463	0,0501	0,0541	0,0582
10	0275	0303	0333	0365	0398	0433	0470	0508	0547	0589
20	0279	0308	0339	0371	0404	0439	0476	0514	0554	0596
30	0284	0313	0344	0376	0410	0445	0482	0521	0561	0603
40	0289	0318	0349	0381	0416	0451	0488	0527	0568	0610
50	0294	0323	0354	0387	0421	0457	0495	0534	0575	0617
	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°
0'	0,0625	0,0669	0,0716	0,0764	0,0814	0,0866	0,0920	0,0976	0,1035	0,1095
10	0632	0677	0724	0772	0823	0875	0930	0986	1045	1105
20	0639	0685	0732	0781	0831	0884	0939	0996	1054	1116
30	0647	0692	0740	0789	0840	0893	0948	1005	1065	1126
40	0654	0700	0748	0797	0849	0902	0958	1015	1075	1136
50	0662	0708	0756	0806	0857	0911	0967	1025	1085	1147
	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°	48°	49°
0'	0,1157	0,1222	0,1289	0,1359	0,1431	0,1505	0,1582	0,1662	0,1745	0,1831
10	1168	1233	1301	1370	1443	1518	1595	1676	1759	1845
20	1179	1244	1312	1382	1455	1531	1609	1689	1773	1860
30	1189	1255	1324	1394	1468	1543	1622	1703	1787	1875
40	1200	1267	1335	1406	1480	1556	1635	1717	1802	1889
50	1211	1278	1347	1418	1493	1569	1649	1731	1816	1904
	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°
0'	0,1919	0,2011	0,2107	0,2205	0,2308	0,2414	0,2524	0,2639	0,2758	0,2882
10	1934	2027	2123	2222	2325	2432	2543	2658	2778	2903
20	1950	2043	2139	2239	2343	2450	2562	2678	2799	2924
30	1965	2058	2155	2256	2360	2469	2581	2698	2819	2945
40	1980	2074	2172	2273	2378	2487	2600	2718	2840	2967
50	1996	2090	2189	2290	2396	2506	2619	2738	2861	2988
	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	68°	69°
0'	0,3010	0,3144	0,3284	0,3429	0,3582	0,3740	0,3907	0,4081	0,4264	0,4457
10	3032	3167	3308	3454	3608	3768	3935	4111	4296	4490
20	3054	3190	3332	3479	3634	3795	3964	4141	4327	4523
30	3077	3213	3356	3505	3660	3823	3993	4172	4359	4557
40	3099	3237	3380	3530	3687	3851	4022	4202	4391	4591
50	3122	3260	3405	3556	3713	3879	4052	4233	4424	4625

Log. Secans.

	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°
0′	0,4659	0,4874	0,5100	0,5341	0,5597	0,5870	0,6163	0,6479	0,6821	0,7194
4	4673	4888	5116	5357	5614	5889	6184	6501	6845	7220
8	4687	4903	5131	5374	5632	5908	6204	6523	6869	7246
12	4701	4918	5147	5390	5650	5927	6224	6545	6893	7273
16	4715	4933	5163	5407	5668	5946	6245	6568	6917	7299
20	4729	4948	5179	5424	5686	5965	6266	6590	6942	7326
24	4744	4963	5195	5441	5704	5985	6287	6613	6966	7353
28	4758	4978	5211	5458	5722	6004	6308	6635	6991	7380
32	4772	4993	5227	5475	5740	6024	6329	6658	7016	7407
36	4786	5008	5243	5492	5758	6043	6350	6681	7041	7435
40	4801	5023	5259	5509	5777	6063	6371	6704	7066	7462
44	4815	5038	5275	5527	5795	6083	6392	6727	7091	7490
48	4830	5054	5291	5544	5814	6103	6414	6750	7117	7518
52	4844	5069	5308	5561	5832	6123	6436	6774	7142	7546
56	4859	5085	5324	5579	5851	6143	6457	6797	7168	7575
60	4874	5100	5341	5597	5870	6163	6479	6821	7194	7603

	0′	2′	4′	6′	8′	10′	12′	14′	16′	18′
80° 0′	0,7603	0,7618	0,7632	0,7646	0,7661	0,7676	0,7690	0,7705	0,7719	0,7734
20	0,7749	0,7764	0,7779	0,7794	0,7809	0,7824	0,7839	0,7854	0,7869	0,7885
40	0,7900	0,7915	0,7931	0,7946	0,7962	0,7978	0,7993	0,8009	0,8025	0,8041
81 0	0,8057	0,8073	0,8089	0,8105	0,8121	0,8137	0,8153	0,8170	0,8186	0,8203
20	0,8219	0,8236	0,8253	0,8269	0,8286	0,8303	0,8320	0,8337	0,8354	0,8371
40	0,8388	0,8406	0,8423	0,8440	0,8458	0,8475	0,8493	0,8511	0,8529	0,8546
82 0	0,8564	0,8582	0,8601	0,8619	0,8637	0,8655	0,8674	0,8692	0,8711	0,8729
20	0,8748	0,8767	0,8786	0,8805	0,8824	0,8843	0,8862	0,8882	0,8901	0,8920
40	0,8940	0,8960	0,8979	0,8999	0,9019	0,9039	0,9059	0,9080	0,9100	0,9120
83 0	0,9141	0,9162	0,9182	0,9203	0,9224	0,9245	0,9266	0,9288	0,9309	0,9330
20	0,9352	0,9374	0,9395	0,9417	0,9439	0,9461	0,9484	0,9506	0,9528	0,9551
40	0,9574	0,9597	0,9619	0,9643	0,9666	0,9689	0,9713	0,9736	0,9760	0,9784
84 0	0,9808	0,9832	0,9856	0,9880	0,9905	0,9930	0,9954	0,9979	1,0004	1,0030
20	1,0055	1,0081	1,0106	1,0132	1,0158	1,0184	1,0211	1,0237	1,0264	1,0290
40	1,0317	1,0345	1,0372	1,0399	1,0427	1,0455	1,0483	1,0511	1,0540	1,0568
85 0	1,0597	1,0626	1,0655	1,0685	1,0714	1,0744	1,0774	1,0804	1,0884	1,0865
20	1,0896	1,0927	1,0958	1,0990	1,1022	1,1054	1,1086	1,1118	1,1151	1,1184
40	1,1217	1,1251	1,1284	1,1318	1,1353	1,1387	1,1422	1,1457	1,1492	1,1528
86 0	1,1564	1,1600	1,1637	1,1674	1,1711	1,1749	1,1787	1,1825	1,1863	1,1902
20	1,1941	1,1981	1,2021	1,2061	1,2102	1,2143	1,2185	1,2227	1,2269	1,2312
40	1,2355	1,2398	1,2442	1,2487	1,2532	1,2577	1,2623	1,2670	1,2717	1,2764
87 0	1,2812	1,2869	1,2909	1,2959	1,3009	1,3060	1,3111	1,3163	1,3216	1,3269
20	1,3323	1,3378	1,3433	1,3489	1,3546	1,3603	1,3661	1,3720	1,3780	1,3841
40	1,3903	1,3965	1,4028	1,4093	1,4158	1,4224	1,4292	1,4360	1,4430	1,4500
88 0	1,4572	1,4645	1,4719	1,4794	1,4871	1,4950	1,5029	1,5110	1,5193	1,5277
20	1,5363	1,5451	1,5541	1,5632	1,5725	1,5821	1,5918	1,6018	1,6120	1,6225
40	1,6332	1,6442	1,6555	1,6671	1,6790	1,6912	1,7038	1,7168	1,7301	1,7439
89 0	1,7581	1,7729	1,7881	1,8039	1,8203	1,8373	1,8550	1,8735	1,8928	1,9130
20	1,9342	1,9565	1,9800	2,0048	2,0311	2,0592	2,0891	2,1213	2,1561	2,1938
40	2,2352	2,2810	2,3322	2,3901	2,4571	2,5363	2,6332	2,7581	2,9342	3,2352

Trigon. Zahlen.

	Sin. Tang.		Sin.	Tang.	Sec.		Sin.	Tang	Sec.
1'	0.0003	1°	0.0175	0.0175	1.0002	46°	0.7193	1.0355	1.4396
2	006	2	0349	0349	0006	47	7314	0724	4663
3	009	3	0523	0524	0014	48	7431	1106	4945
4	012	4	0698	0699	0024	49	7547	1504	5243
5	015	5	0872	0875	0038	50	7660	1918	5557
6	0.0017	6	0.1045	0.1051	1.0055	51	0.7771	1.2349	1.5890
7	020	7	1219	1228	0075	52	7880	2799	6243
8	023	8	1392	1405	0098	53	7986	3270	6616
9	026	9	1564	1584	0125	54	8090	3764	7013
10	029	10	1736	1763	0154	55	8192	4281	7434
11	0.0032	11	0.1908	0.1944	1.0187	56	0.8290	1.4826	1.7883
12	035	12	2079	2126	0223	57	8387	5399	8361
13	038	13	2250	2309	0263	58	8480	6003	8871
14	041	14	2419	2493	0306	59	8572	6643	9416
15	044	15	2588	2679	0353	60	8660	7321	2.0000
16	0.0047	16	0.2756	0.2867	1.0403	61	0.8746	1.8040	2.0627
17	049	17	2924	3057	0457	62	8829	8807	1301
18	052	18	3090	3249	0515	63	8910	9626	2027
19	055	19	3256	3443	0576	64	8988	2.0503	2812
20	058	20	3420	3640	0642	65	9063	1445	3662
21	0.0061	21	0.3584	0.3839	1.0711	66	0.9135	2.2460	2.4586
22	064	22	3746	4040	0785	67	9205	3559	5593
23	067	23	3907	4245	0864	68	9272	4751	6695
24	070	24	4067	4452	0946	69	9336	6051	7904
25	073	25	4226	4663	1034	70	9397	7475	9238
26	0.0076	26	0.4384	0.4877	1.1126	71	0.9455	2.9042	3.0716
27	079	27	4540	5095	1223	72	9511	3.0777	2361
28	081	28	4695	5317	1326	73	9563	2709	4203
29	084	29	4848	5543	1434	74	9613	4874	6280
30	087	30	5000	5774	1547	75	9659	7321	8637
32	0.0093	31	0.5150	0.6009	1.1666	76	0.9703	4.0108	4.1336
34	099	32	5299	6249	1792	77	9744	3315	4454
36	105	33	5446	6494	1924	78	9781	7046	8097
38	111	34	5592	6745	2062	79	9816	5.1446	5.2408
40	116	35	5736	7002	2208	80	9848	6713	7588
42	0.0122	36	0.5878	0.7265	1.2361	81	0.9877	6.3138	6.3925
44	128	37	6018	7536	2521	82	9903	7.1154	7.1853
46	134	38	6157	7813	2690	83	9925	8.1443	8.2055
48	140	39	6293	8098	2868	84	9945	9.5144	9.5668
50	145	40	6428	8391	3054	85	9962	11.4301	11.4737
52	0.0151	41	0.6561	0.8693	1.3250	86	0.9976	14.3007	14.3356
54	157	42	6691	9004	3456	87	9986	19.0811	19.1073
56	163	43	6820	9325	3673	88	9994	28.6363	28.6537
58	169	44	6947	9657	3902	89	9998	57.2900	57.2987
60	175	45	7071	1.0000	4142	90	1.0000	∞	∞

(r = 10000)

Winkel.	Sehne.	Pfeil.	Winkel.	Sehne.	Pfeil.	Winkel.	Sehne.	Pfeil.	Winkel.	Sehne.	Pfeil.
1°	175	0	46°	7815	795	91°	14265	2991	136°	18544	6254
2	349	2	47	7975	829	92	14387	3053	137	18608	6335
3	524	3	48	8135	865	93	14507	3116	138	18672	6416
4	698	6	49	8294	900	94	14627	3180	139	18733	6498
5	872	10	50	8452	937	95	14746	3244	140	18794	6580
6	1047	14	51	8610	974	96	14863	3309	141	18853	6662
7	1221	19	52	8767	1012	97	14979	3374	142	18910	6744
8	1395	24	53	8924	1051	98	15094	3439	143	18966	6827
9	1569	31	54	9080	1090	99	15208	3506	144	19021	6910
10	1743	38	55	9235	1130	100	15321	3572	145	19074	6993
11	1917	46	56	9389	1171	101	15432	3639	146	19126	7076
12	2091	55	57	9543	1212	102	15543	3707	147	19176	7160
13	2264	64	58	9696	1254	103	15652	3775	148	19225	7244
14	2437	75	59	9848	1296	104	15760	3843	149	19273	7328
15	2611	86	60	10000	1340	105	15867	3912	150	19319	7412
16	2783	97	61	10151	1384	106	15973	3982	151	19363	7496
17	2956	110	62	10301	1428	107	16077	4052	152	19406	7581
18	3129	123	63	10450	1474	108	16180	4122	153	19447	7666
19	3301	137	64	10598	1520	109	16282	4193	154	19487	7750
20	3473	152	65	10746	1566	110	16383	4264	155	19526	7836
21	3645	167	66	10893	1613	111	16483	4336	156	19563	7921
22	3816	184	67	11039	1661	112	16581	4408	157	19598	8006
23	3987	201	68	11184	1710	113	16678	4481	158	19633	8092
24	4158	219	69	11328	1759	114	16773	4554	159	19665	8178
25	4329	237	70	11472	1808	115	16868	4627	160	19696	8264
26	4499	256	71	11614	1859	116	16961	4701	161	19726	8350
27	4669	276	72	11756	1910	117	17053	4775	162	19754	8436
28	4838	297	73	11896	1961	118	17143	4850	163	19780	8522
29	5008	319	74	12036	2014	119	17233	4925	164	19805	8608
30	5176	341	75	12175	2066	120	17321	5000	165	19829	8695
31	5345	364	76	12313	2120	121	17407	5076	166	19851	8781
32	5513	387	77	12450	2174	122	17492	5152	167	19871	8868
33	5680	412	78	12586	2229	123	17576	5228	168	19890	8955
34	5847	437	79	12722	2284	124	17659	5305	169	19908	9042
35	6014	463	80	12856	2340	125	17740	5383	170	19924	9128
36	6180	489	81	12989	2396	126	17820	5460	171	19938	9215
37	6346	517	82	13121	2453	127	17899	5538	172	19951	9302
38	6511	545	83	13252	2510	128	17976	5616	173	19963	9390
39	6676	574	84	13383	2569	129	18052	5695	174	19973	9477
40	6840	603	85	13512	2627	130	18126	5774	175	19981	9564
41	7004	633	86	13640	2686	131	18199	5853	176	19988	9651
42	7167	664	87	13767	2746	132	18271	5933	177	19993	9738
43	7330	696	88	13893	2807	133	18341	6013	178	19997	9825
44	7492	728	89	14018	2867	134	18410	6093	179	19999	9913
45	7654	761	90	14142	2929	135	18478	6173	180	20000	10000

a	aπ : 180 = a Arc 1°	aπ : 180 . 60 = a Arc 1′	aπ : 180 . 60² = a Arc 1″	a . 180 . 60 : π = a : Arc 1′
1	0.0174533	0,0002908.882	0.0000048.4814	3437.7468
2	0349066	05817.764	096.9627	6875.4935
3	0523599	08726.646	145.4441	10313.2403
4	0698132	11635.528	193.9255	13750.9871
5	0872665	14544.410	242.4068	17188.7338
6	1047198	17453.292	290.8882	20626.4806
7	1221730	20362.175	339.3696	24064.2274
8	1396263	23271.057	387.8509	27501.9742
9	1570796	26179.939	436.3323	30939.7209

$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399$

$1 : \pi = 0.31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77675\ 26745\ 02872\ 40689\ 19291$

$\sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 81674\ 83341\ 14518\ 27975\ 49456$

$\sqrt{1 : \pi} = 0.56418\ 95835\ 47756\ 28694\ 80794\ 51560\ 77258\ 58440\ 50629$

$\pi^2 = 9.86960\ 44011 \qquad 1 : \pi^2 = 0.10132\ 11836$

$\sqrt[3]{\pi} = 1.46459\ 18876 \qquad \sqrt[3]{\pi^2} = 2.14502\ 93971$

$180 : \pi = 57.29577\ 95131 = 57^\circ\ 17'\ 44''.806$

$\log \pi = 0.49714\ 98727 \qquad \log \text{Sin}\ 1'' = 4.68557\ 48668$

VIIᵇ. Tafel der Logarithmen von a . Arc 1″.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	4.6856	4.9866	5.1627	5.2876	5.3845	5.4637	5.5307	5.5887	5.6398
10	5.6856	5.7270	5.7648	5.7996	5.8317	5.8617	5.8897	5.9160	5.9408	5.9643
20	5.9866	6.0078	6.0280	6.0473	6.0658	6.0835	6.1006	6.1169	6.1327	6.1480
30	6.1627	6.1769	6.1907	6.2041	6.2171	6.2296	6.2419	6.2538	6.2654	6.2766
40	6.2876	6.2984	6.3088	6.3190	6.3290	6.3388	6.3483	6.3577	6.3668	6.3758
50	6.3845	6.3931	6.4016	6.4098	6.4180	6.4259	6.4338	6.4414	6.4490	6.4564
60	4637	4709	4780	4849	4918	4985	5051	5116	5181	5244
70	5307	5368	5429	5488	5548	5606	5664	5721	5777	5832
80	5887	5941	5994	6047	6099	6150	6201	6251	6301	6350
90	6398	6446	6494	6541	6587	6633	6678	6723	6768	6812
100	6.6856	6.6899	6.6942	6.6984	6.7026	6.7068	6.7109	6.7150	6.7190	6.7230
110	7270	7309	7348	7387	7425	7463	7500	7538	7575	7611
120	7648	7684	7719	7755	7790	7825	7859	7894	7928	7962
130	7996	8029	8062	8094	8127	8159	8191	8223	8255	8286
140	8317	8348	8379	8409	8439	8469	8499	8529	8558	8588
150	6.8617	6.8646	6.8674	6.8702	6.8731	6.8759	6.8787	6.8815	6.8842	6.8870
160	8897	8924	8951	8978	9004	9031	9057	9083	9109	9135
170	9160	9186	9211	9236	9261	9286	9311	9335	9360	9384
180	9408	9433	9456	9480	9504	9527	9551	9574	9597	9620
190	9643	9666	9689	9711	9734	9756	9778	9800	9822	9844
200	6.9866	6.9888	6.9909	6.9931	6.9952	6.9973	6.9994	7.0015	7.0036	7.0057
210	7.0078	7.0099	7.0119	7.0140	7.0160	7.0180	7.0200	7.0220	7.0240	7.0260
220	7.0280	7.0300	7.0319	7.0339	7.0358	7.0378	7.0397	7.0416	7.0435	7.0454
230	7.0473	7.0492	7.0511	7.0529	7.0548	7.0566	7.0585	7.0603	7.0622	7.0640
240	7.0658	7.0676	7.0694	7.0712	7.0730	7.0747	7.0765	7.0783	7.0800	7.0818

Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.	Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.	Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.	Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.
15′	1m	0,000694	15′	37m	0,025694	15′	73m	0,050694	15′	109m	0,075694
30	2	1389	30	38	26389	30	74	51389	30	110	76389
45	3	2083	45	39	27083	45	75	52083	45	111	77083
1°	4	2778	10°	40	27778	19°	76	52778	28°	112	77778
15	5	0,003472	15	41	0,028472	15	77	0,053472	15	113	0,078472
30	6	4167	30	42	29167	30	78	54167	30	114	79167
45	7	4861	45	43	29861	45	79	54861	45	115	79861
2	8	5556	11	44	30556	20	80	55556	29	116	80556
15	9	0,006250	15	45	0,031250	15	81	0,056250	15	117	0,081250
30	10	6944	30	46	31944	30	82	56944	30	118	81944
45	11	7639	45	47	32639	45	83	57639	45	119	82639
3	12	8333	12	48	33333	21	84	58333	30	120	83333
15	13	0,009028	15	49	0,034028	15	85	0,059028	15	121	0,084028
30	14	09722	30	50	34722	30	86	59722	30	122	84722
45	15	10417	45	51	35417	45	87	60417	45	123	85417
4	16	11111	13	52	36111	22	88	61111	31	124	86111
15	17	0,011806	15	53	0,036806	15	89	0,061806	15	125	0,086806
30	18	12500	30	54	37500	30	90	62500	30	126	87500
45	19	13194	45	55	38194	45	91	63194	45	127	88194
5	20	13889	14	56	38889	23	92	63889	32	128	88889
15	21	0,014583	15	57	0,039583	15	93	0,064583	15	129	0,089583
30	22	15278	30	58	40278	30	94	65278	30	130	90278
45	23	15972	45	59	40972	45	95	65972	45	131	90972
6	24	16667	15	60	41667	24	96	66667	33	132	91667
15	25	0,017361	15	61	0,042361	15	97	0,067361	15	133	0,092361
30	26	18056	30	62	43056	30	98	68056	30	134	93056
45	27	18750	45	63	43750	45	99	68750	45	135	93750
7	28	19444	16	64	44444	25	100	69444	34	136	94444
15	29	0,020139	15	65	0,045139	15	101	0,070139	15	137	0,095139
30	30	20833	30	66	45833	30	102	70833	30	138	95833
45	31	21528	45	67	46528	45	103	71528	45	139	96528
8	32	22222	17	68	47222	26	104	72222	35	140	97222
15	33	0,022917	15	69	0,047917	15	105	0,072917	15	141	0,097917
30	34	23611	30	70	48611	30	106	73611	30	142	098611
45	35	24306	45	71	49306	45	107	74306	45	143	099306
9	36	25000	18	72	50000	27	108	75000	36	144	100000
′	s		″	s		″	s			°	m h m
1	4	0,0000463	1	0,07	0,0000008	15	1	0,0000116	0,1	36	144 = 2 24
2	8	0926	2	13	15	30	2	0231	0,2	72	288 4 48
3	12	1389	3	20	23	45	3	0347	0,3	108	432 7 12
4	16	1852	4	27	31	60	4	0463	0,4	144	576 9 36
5	20	2315	5	33	38	75	5	0578	0,5	180	720 12 0
6	24	2778	6	40	46	90	6	0694	0,6	216	864 14 24
7	28	3241	7	47	54	105	7	0810	0,7	252	1008 16 48
8	32	3704	8	53	62	120	8	0926	0,8	288	1152 19 12
9	36	4167	9	60	69	135	9	1041	0,9	324	1296 21 36

VIII. Chemische Tafel.

(H = 10)

Elemente.	Zeichen.	Mischungs-gewicht.	Elemente.	Zeichen.	Mischungs-gewicht.	Elemente.	Zeichen.	Mischungs-gewicht.
Aluminium	Al	136	Iridium	Ir	986	Ruthenium	Ru	520
Antimon	Sb	1220	Kalium	K	392	Sauerstoff	O	80
Arsen	As	750	Kiesel	Si	140	Schwefel	S	160
Barium	Ba	685	Kobalt	Co	295	Selen	Se	395
Beryllium	Be	70	Kohlenstoff	C	60	Silber	Ag	1080
Blei	Pb	1035	Kupfer	Cu	317	Stickstoff	N	140
Bor	B	110	Lanthan	La	460	Strontium	Sr	438
Brom	Br	800	Lithium	Li	70	Tantal	Ta	1820
Cadmium	Cd	560	Magnesium	Mg	120	Tellur	Te	642
Calcium	Ca	200	Mangan	Mn	276	Thallium	Tl	2040
Cæsium	Cs	1330	Molybdän	Mo	480	Thorium	Th	[illegible]
Cerium	Ce	460	Natrium	Na	230	Titan	Ti	250
Chlor	Cl	355	Nickel	Ni	295	Uran	U	600
Chrom	Cr	262	Niobium	Nb	940	Vanadium	V	513
Didym	Di	480	Osmium	Os	996	Wasserstoff	H	10
Eisen	Fe	280	Palladium	Pd	530	Wismuth	B	2100
Erbium	Eb	563	Phosphor	P	310	Wolfram	Wo	920
Fluor	F	190	Platin	Pt	990	Yttrium	Yt	3[illegible]
Gold	Au	1970	Quecksilber	Hg	1000	Zink	Zn	325
Jod	J	1270	Rhodium	Rh	520	Zinn	Sn	590
Indium	In	730	Rubidium	Rb	854	Zircon	Zr	448

Braunstein	MnO^2.	Natron	NaO.
Chlorsaures Kali	$KO + ClO^5$.	Oxalsäure	C^2O^3.
Eisenvitriol	$(FeO + SO^3) + 7 HO$.	Pottasche	$KO + CO^2$.
Glaubersalz	$NaO + SO^3 + 10 HO$.	Salmiakgeist	$H^3N + HO$.
Gyps	$(CaO + SO^3) + 2 HO$.	Salpeter	$KO + NO^5$.
Höllenstein	$AgO + NO^5$.	Salpetersäure	NO^5.
Kali	KO.	Salzsäure	HCl.
Kalk	CaO.	Sauerkleesalz	$(KO + 2 C^2O^3) + HO$.
Kochsalz	$NaCl$.	Schwefelsäure	SO^3.
Kohlensäure	CO^2.	Soda	$NaO + CO^2 + 10 HO$.
Kreide	$CaO + CO^2$.	Wasser	HO.
Kupfervitriol	$(CuO + SO^3) + 5 HO$.	Zinkoxyd	ZnO.
Musivgold	SnS^2.	Zinkvitriol	$(ZnO + SO^3) + 7 HO$.

Argentan = 8 Kupfer + 3.5 Zink + 3 Nickel (Gew.)
Atmosphärische Luft = 0.21 O + 0.79 N (Vol.) = 0.23 O + 0.77 N (Gew.)
Königswasser = Salpetersäure + 3 Salzsäure (Vol.)
Messing = 71.5 Kupfer + 28.5 Zink (Gew.)
Schiesspulver = 1 Salpeter + 1 Schwefel + 3 Kohle (Gew.)
Rose'sches Metall = 8 Blei + 8 Wismuth + 3 Zinn (Gew.)

Name des Stoffes.	Dichte.		Schmelzpunkt.	Siedepunkt bei 760mm Druck.	Latente Wärme.		Spezif. Wärme.	Brechungsexponent.	Ausdehnung für 100 Millionen Centes. Grade.
	Wasser. 1.	Luft. 1.			Schmelzen.	Sieden.			
Alabaster	2,8	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Alaun	1,71	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Alcohol	0,79	. .	— 130	78,4	. .	208	0,600	1,377	. .
Antimon (geg.)	6,7	. .	432	. .	. .	. .	0,051	. .	1083
Arsenik	5,8	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Atmosph. Luft	0,00129 = 1		. .	. .	. .	. .	0,24	1,000294	
Baumöl	0,91	. .	2,2	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Bergkristall	2,69	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1,562	. .
Bernstein	1,08	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1,552	. .
Blei (gegoss.)	11,4	. .	325	. .	5,4	. .	0,031	. .	2848
Buchenholz	0,7	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Butter	0,94	. .	32	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Chlor	. .	2,470	. .	. .	. .	. .	0,12	. .	. .
Crownglas	2,4 bis 2,9		. .	. .	. .	. .	0,198	1,50	862
Diamant	3,5	. .	. .	. .	. .	. .	0,147	2,487	. .
Ebenholz	1,19	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Eichenholz	0,9	. .	. .	. .	. .	. .	0,570	. .	. .
Eichenkohle	0,6	. .	1800	. .	. .	. .	0,241	. .	. .
Eis	0,92	. .	0	100	79	536	0,51	1,31	. .
Eisen (weich)	7,8	. .	1600	. .	. .	. .	0,114	. .	1182
Eisenvitriol	1,84	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1,49	. .
Elfenbein	1,9	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Erde	1,4 bis 2,4		. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Essigsäure	1,06	. .	. .	117	. .	102	0,459	1,40	. .
Feldspath	2,6	. .	. .	. .	. .	. .	0,191	1,536	. .
Flintglas	3,2 bis 3,8		. .	. .	. .	. .	0,190	1,6 bis 2,0	
Flussspath	3,1	. .	. .	. .	. .	. .	0,208	1,43	2070
Glanzkohle	1,48	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Gold (gehämm.)	19,36	. .	1250	. .	. .	. .	0,032	. .	1466
Granit	2,58 bis 2,96		. .	. .	. .	. .	0,190	. .	897
Gusseisen	7,2	. .	1200	. .	. .	. .	. .	. .	1110
Jod	4,9	. .	104	175	. .	. .	0,054	. .	. .
Kalium	0,86	. .	58	. .	. .	. .	0,170	. .	. .
Kanonengut	8,4	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Knochen	1,66	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Kobalt (geg.)	8,9	. .	1500	. .	. .	. .	0,107	. .	. .
Kochsalz	2,08	. .	. .	. .	. .	. .	0,214	. .	. .
Kohlensäure	. .	1,529	— 87	. .	. .	. .	0,221	1,000449	
Kork	0,24	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Kupfer (geg.)	8,9	. .	1090	. .	. .	. .	0,095	. .	1717

Name des Stoffes.	Dichte. Wasser. 1.	Luft. 1.	Schmelzpunkt.	Siedepunkt bei 760^{mm} Druck.	Latente Wärme. Schmelzen.	Sieden.	Spezif. Wärme.	Brechungsexponent.	Ausdehnung für 100 Millionen Centes. Grade.
Kupfervitriol .	2,21	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Marmor . . .	2,84	. .	. .	. .	. .	. .	0,208	. .	849
Meerwasser . .	1,00 bis 1,03		— 2,5	104	. .	. .	. .	. .	. .
Messing (geg.) .	8,4	. .	900	. .	. .	. .	0,094	. .	1875
Natrium . . .	0,97	. .	90	. .	. .	. .	0,293	. .	. .
Nickel (geg.) .	8,3	. .	1500	. .	. .	. .	0,109	. .	. .
Olivenöl . . .	0,91	. .	10	. .	. .	. .	. .	1,47	. .
Palladium (geg.)	11,3	. .	1700	. .	. .	. .	0,059	. .	. .
Phosphor . .	1,8	. .	42,8	290	5,3	. .	0,189	2,224	. .
Platin (geh.) .	21,4	. .	1800	. .	. .	. .	0,032	. .	884
Porzellan (chin.)	2,38	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Pottasche . .	2,26	. .	. .	. .	. .	. .	0,216	. .	. .
Quecksilber . .	13,597	. .	— 39	350	. .	. .	0,033	. .	17405
Rubin	3,1	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1,779	. .
Salpeter . . .	1,62	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Salpetersäure .	1,51	. .	— 45	66	. .	. .	. .	1,41	. .
Salzsäure . . .	1,28	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1,38	. .
Sandstein . .	2,2 bis 2,5		. .	. .	. .	. .	. .	. .	1174
Sauerstoff . .	. .	1,105	. .	. .	. .	. .	0,218	1,000272	
Schnee . . .	0,1	. .	0	100	. .	. .	. .	. .	. .
Schwefel . . .	2,0	. .	108	316	9,4	. .	0,184	2,11	6100
Schwefeläther .	0,74	. .	— 90	34,9	. .	91	0,521	1,36	. .
Schwefelsäure .	1,84	. .	— 25	288	. .	. .	. .	1,44	. .
Schwerspath .	4,5	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1900
Selen	4,3	. .	102	. .	. .	. .	0,076	. .	. .
Silber (geh.) .	10,5	. .	1000	. .	21,1	. .	0,057	. .	1909
Smaragd (grün)	2,68	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
Stahl (weich) .	7,8	. .	1350	. .	. .	. .	0,116		1079 bis 1142
Steinkohle . .	1,27	. .	. .	. .	. .	. .	0,201	. .	. .
Stickstoff . . .	. .	0,971	. .	. .	. .	. .	0,24	1,000300	
Tannenholz . .	0,5	. .	. .	. .	. .	. .	0,654	. .	352
Tannenkohle .	0,4	. .	1800	. .	. .	. .	0,221	. .	. .
Terpentinöl . .	0,87	. .	— 10	293	. .	69	0,41	1,47	. .
Turmalin . . .	3,1	. .	. .	. .	. .	. .	. .	1,668	. .
Wachs . . .	0,97	. .	66	. .	97,5	77	. .	. .	. .
Wasser . . .	1	. .	0	100	79	536	1	1,34	. .
Wasserstoff . .	. .	0,069	. .	. .	. .	. .	3,405	1,000138	
Wismuth (geg.)	9,8	. .	264	. .	12,6	. .	0,031	. .	1392
Zink (geg.) . .	6,9	. .	423	. .	28,1	. .	0,096	. .	2942
Zinn (geg.) . .	7,3	. .	228	. .	14,2	. .	0,056	. .	2173

Material.	Elasticitäts-		Zug-Festigkeit.		Druck-Festigkeit.	
	Modul.	Grenze.	Festig-keits-modul.	Trag-modul.	Festig-keits-modul.	Trag-modul.
Basalt	. .	. . .	. .	. . .	9	. . .
Blei	500	1 : 477	1,3	1	5	. . .
Bleidraht . . .	600	1 : 1500	1,4	0,4	. .	. . .
Buchenholz . .	930	1 : 570	8	1,6 (0,6)	5	1,8 (0,5)
Eichenholz . . .	1200	1 : 600	7	2 (0,6)	5	1,8 (0,5)
Eisen in Stäben .	20000	1 : 1300	40	15 (6,0)	22	15 (4,5)
Eisenblech . . .	17000	. . .	32	. . .	. .	. . .
Eisendraht . . .	30000	1 : 1000	70	20 (10)	. .	. . .
Eschenholz . . .	1120	1 : 885	12	1,3 (0,6)	5	1,8 (0,5)
Glockengut . .	3200	1 : 1590	. .	2	. .	. . .
Gneis	. .	. . .	. .	. . .	8,5	. . .
Granit	. .	. . .	. .	. . .	8	(0,35)
Gusseisen . . .	10000	1 : 1300	11	7,5 (2,0)	63	15 (5,0)
Gussstahl, gehärt.	30000	1 : 450	100	65	. .	. . .
Hanfseile . . .	. .	. . .	4,5	(3,0)	. .	. . .
Kalkstein . . .	. .	. . .	0,3	(0,015)	5	(0,40)
Kupfer, gehämm.	11000	. . .	25	. . .	. .	. . .
- gegossen	. .	. . .	. .	. . .	70	. . .
Kupferdraht . .	13100	1 : 1000	40	13	. .	. . .
Mauer- Kalkstein . .	. .	. . .	. .	. . .	5	. . .
Mauer- Sandstein . .	. .	. . .	. .	. . .	1,5	. .
Mauer- Ziegelstein .	. .	. . .	. .	. . .	0,4	. . .
Messing	6500	1 : 1320	12	4,8	110	. .
Messingdraht . .	10000	1 : 742	50	13	. .	. . .
Mörtel	. .	. . .	0,04	(0,002)	35	(0,018)
Quarz	. .	. . .	. .	. . .	12	. . .
Sandstein . . .	. .	. . .	. .	. . .	7	. .
Stahl	20000	1 : 835	80	25	. .	. . .
Tannenholz . .	1300	1 : 850	8,5	2,2 (0,6)	5	1,8 (0,5)
Ziegelstein . . .	. .	. . .	. .	. . .	0,6	(0,02)
Zinn	. .	. . .	. .	. . .	11	. . .

NB. Die unter Elasticitäts-Grenze eingeschriebenen Zahlen geben das Ausdehnungsverhältniss an der Elasticitäts-Grenze, — die übrigen bezeichnen Kilogramme auf Quadratmillimeter. — Bei Rechnungen auf Zugfestigkeit führt man als zulässige Spannung pro Quadrateinheit $^1/_2$ bis $^1/_3$ des Tragmoduls ein. — Bei Rechnungen auf Druckfestigkeit setzt man die zulässige Spannung bei Holz und Steinen $^1/_{10}$, bei Metallen $^1/_5$ des Tragmoduls. — Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen übliche Maximalbelastungen, welche ausgeführten Bauwerken entnommen sind.

Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.
	—		—		—		—		—
— 20°	0,93	27°	25,50	67°	204,37	98,°0	707,17	120°	1491,28
— 15	1,40	28	28,10	68	213,59	1	709,74	121	1539,25
— 12	1,78	29	29,78	69	223,15	2	712,32	122	1588,47
— 10	2,09	30	31,55	70	233,08	3	714,91	123	1638,96
— 9	2,26	31	33,41	71	243,38	4	717,50	124	1690,76
— 8	2,46	32	35,36	72	254,06	98,5	720,10	125	1743,88
— 7	2,67	33	37,41	73	265,13	6	722,71	126	1798,35
— 6	2,89	34	39,56	74	276,61	7	725,31	127	1854,20
— 5	3,13	35	41,83	75	288,50	8	727,93	128	1911,47
— 4	3,39	36	44,20	76	300,82	9	730,56	129	1970,15
— 3	3,66	37	46,69	77	313,58	99,0	733,19	130	2030,28
— 2	3,96	38	49,30	78	326,79	1	735,83	131	2091,90
— 1	4,27	39	52,04	79	340,46	2	738,48	132	2155,03
0	4,60	40	54,91	80	354,62	3	741,14	133	2219,69
1	4,94	41	57,91	81	369,26	4	743,82	134	2285,92
2	5,30	42	61,05	82	384,40	99,5	746,49	135	2353,73
3	5,69	43	64,34	83	400,07	6	749,17	136	2423,16
4	6,10	44	67,79	84	416,26	7	751,86	137	2494,23
5	6,53	45	71,39	85	433,00	8	754,57	138	2567,00
6	7,00	46	75,16	86	450,30	9	757,28	139	2641,44
7	7,49	47	79,09	87	468,17	100	760,00	140	2717,63
8	8,02	48	83,20	88	486,64	101	787,59	141	2795,57
9	8,57	49	87,50	89	505,70	102	816,01	142	2875,30
10	9,16	50	91,98	90	525,39	103	845,28	143	2956,86
11	9,79	51	96,66	91	545,71	104	875,41	144	3040,26
12	10,46	52	101,54	92	566,69	105	906,41	145	3125,55
13	11,16	53	106,63	93	588,33	106	938,31	146	3212,74
14	11,91	54	111,94	94	610,66	107	971,14	147	3301,87
15	12,70	55	117,47	95	633,69	108	1004,91	148	3392,98
16	13,54	56	123,24	96	657,44	109	1039,65	149	3486,09
17	14,42	57	129,25	97,0	681,93	110	1075,37	150	3581,23
18	15,36	58	135,50	1	684,42	111	1112,09	155	4088,56
19	16,35	59	142,01	2	686,92	112	1149,83	160	4651,62
20	17,39	60	148,79	3	689,43	113	1188,61	165	5274,54
21	18,50	61	155,83	4	691,94	114	1228,47	170	5961,66
22	19,66	62	163,16	97,5	694,46	115	1269,41	175	6717,43
23	20,89	63	170,78	6	696,98	116	1311,47	180	7546,39
24	22,18	64	178,71	7	699,51	117	1354,66	185	8453,23
25	23,55	65	186,94	8	702,05	118	1399,02	190	9442,70
26	24,99	66	195,49	9	704,60	119	1444,55	200	11689,0

NB. Für die Anwendung dieser Tafel vergleiche die Sätze 247 und 304—305.

Dampfspannung in			Temperatur in Cent.-Graden t.	Flüssigkeitswärme q.	Innere latente Wärme ϱ.	Aeussere latente Wärme L.	Gewicht eines Kubikmeters in Kilogrammen γ.
Atmo-sphären.	Millimeter Queck-silber.	Kilo-grammen pro 1qm.					
0,1	76	1033	46,21	46,282	538,848	35,464	0,0687
0,2	152	2067	60,45	60,589	527,584	36,764	0,1326
0,3	228	3100	69,49	69,687	520,433	37,574	0,1945
0,4	304	4134	76,25	76,499	515,086	38,171	0,2553
0,5	380	5167	81,71	82,017	510,767	38,637	0,3153
0,6	456	6200	86,32	86,662	507,121	39,045	0,3744
0,7	532	7234	90,32	90,704	503,957	39,387	0,4330
0,8	608	8267	93,88	94,304	501,141	39,688	0,4910
0,9	684	9301	97,08	97,543	498,610	39,957	0,5487
1,0	760	10334	100,00	100,500	496,300	40,200	0,6059
1,1	836	11367	102,68	103,216	494,180	40,421	0,6628
1,2	912	12401	105,17	105,740	492,210	40,626	0,7194
1·3	988	13434	107,50	108,104	490,367	40,816	0,7757
1,4	1064	14468	109,68	110,316	488,643	40,993	0,8317
1,5	1140	15501	111,74	112,408	487,014	41,159	0,8874
2,0	1520	20668	120,60	121,417	480,005	41,861	1,1631
2,5	1900	25835	127,80	128,753	474,310	42,416	1,4345
3,0	2280	31002	133,91	134,989	469,477	42,876	1,7024
3,5	2660	36169	139,24	140,138	465,261	43,269	1,9676
4,0	3040	41336	144,00	145,310	461,496	43,614	2,2303
4,5	3420	46503	148,29	149,708	458,103	43,918	2,4911
5,0	3800	51670	152,22	153,741	454,994	44,192	2,7500
5,5	4180	56837	155,85	157,471	452,123	44,441	3,0073
6,0	4560	62004	159,22	160,938	449,457	44,667	3,2632
6,5	4940	67171	162,37	164,181	446,965	44,876	3,5178
7,0	5320	72338	165,34	167,243	444,616	45,070	3,7711
7,5	5700	77505	168,15	170,142	442,393	45,250	4,0234
8,0	6080	82672	170,81	172,888	440,289	45,420	4,2745
8,5	6460	87839	173,35	175,514	438,280	45,578	4,5248
9,0	6840	93006	175,77	178,017	436,366	45,727	4,7741
9,5	7220	98173	178,08	180,408	434,539	45,868	5,0226
10,0	7600	103340	180,31	182,719	432,775	46,001	5,2704
10,5	7980	108507	182,44	184,927	431,090	46,127	5,5174
11,0	8360	113674	184,50	187,065	429,460	46,247	5,7636
11,5	8740	118841	186,49	189,131	427,886	46,362	6,0092
12,0	9120	124008	188,41	191,126	426,368	46,471	6,2543
12,5	9500	129175	190,27	193,060	424,896	46,576	6,4986
13,0	9880	134342	192,08	194,944	423,465	46,676	6,7424
13,5	10260	139509	193,83	196,766	422,080	46,772	6,9857
14,0	10640	144676	195,53	198,537	420,736	46,864	7,2283

NB. Für das Verständniss dieser Tafel vergleiche Satz 306.

t_2	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
-19	[illegible]	76	65	54	44	34	24							2 (12.5°)	[illegible] (12.4°)
-18	[illegible]	78	67	57	48	38	29	18						4	[illegible]
-17	[illegible]	79	70	60	51	42	34	25	17						
-16	90	81	72	63	55	47	39	31	23	16					
-15	91	82	74	66	58	50	43	36	29	22	15				
-14	92	84	76	68	61	54	47	40	33	27	21	15			
-13	92	85	77	70	63	56	50	43	37	31	25	20	14		
-12	93	86	79	72	65	59	53	47	41	35	30	24	19	14	[illegible]
-11	93	86	80	74	67	61	56	50	44	39	34	29	24	19	[illegible]
-10	93	87	81	75	69	63	58	52	47	42	38	33	29	24	[illegible]
-9	94	88	82	76	71	66	61	56	51	46	41	37	33	29	[illegible]
-8	94	89	83	78	73	68	63	58	54	49	45	40	36	32	[illegible]
-7	94	89	84	79	74	69	65	61	56	52	48	44	40	36	[illegible]
-6	95	90	85	80	76	71	67	63	59	55	51	47	43	40	[illegible]
-5	95	90	86	81	77	73	69	65	61	57	53	50	46	43	[illegible]
-4	95	91	87	82	78	74	70	67	63	59	56	52	49	46	[illegible]
-3	96	92	87	83	79	75	72	68	65	61	58	55	52	48	[illegible]
-2	96	92	88	84	80	77	73	70	66	63	60	57	54	51	[illegible]
-1	96	92	88	85	81	78	74	71	68	65	62	59	56	53	[illegible]
0	97	93	89	86	82	79	76	73	70	67	64	61	58	56	[illegible]
0	96	92	88	85	81	78	74	71	67	64	61	58	55	52	[illegible]
1	96	93	89	85	82	79	75	72	68	66	63	60	57	54	[illegible]
2	96	93	89	86	83	80	76	73	70	67	65	62	59	56	[illegible]
3	97	93	90	87	84	80	77	74	71	68	66	63	61	58	[illegible]
4	97	93	90	87	84	81	78	75	73	70	67	65	62	60	[illegible]
5	97	94	91	88	85	82	79	76	74	71	69	66	64	61	[illegible]
6	97	94	91	88	85	83	80	77	75	72	70	67	65	63	[illegible]
7	97	94	91	89	86	83	81	78	76	73	71	69	66	64	[illegible]
8	97	94	92	89	86	84	81	79	76	74	72	70	67	65	[illegible]
9	97	95	92	89	86	84	82	80	77	75	73	71	69	67	[illegible]
10	97	95	93	90	87	85	83	80	78	76	74	72	70	68	[illegible]
11	97	95	93	90	87	86	83	81	79	77	75	73	71	69	[illegible]
12	98	95	93	90	88	86	84	82	80	78	76	74	72	70	[illegible]
13	98	95	93	91	88	86	84	82	80	78	76	75	73	71	[illegible]
14	98	95	93	91	89	87	85	83	81	79	77	75	73	72	[illegible]
15	98	96	93	91	89	87	85	83	81	80	78	76	74	72	71
16	98	96	94	92	90	88	[illegible]	84	82	80	78	77	75	73	[illegible]
17	98	96	94	92	90	88	[illegible]	84	83	81	79	77	76	74	[illegible]
18	98	96	94	92	90	88	[illegible]	85	83	81	[illegible]	78	76	75	[illegible]
19	98	96	94	92	91	89	[illegible]	85	83	82	[illegible]	[illegible]	77	75	74
20	98	96	94	92	91	89	[illegible]	[illegible]	84	82	81	79	77	76	[illegible]
21	98	96	94	92	91	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
22	98	96	95	93	91	90	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23	98	96	95	93	91	90	[illegible]	[illegible]	[illegible]	83	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
24	98	97	95	93	92	90	[illegible]	[illegible]	[illegible]	84	[illegible]	81	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	98	97	95	93	92	90	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	81	[illegible]	[illegible]	[illegible]
26	97	97	95	[illegible]	92	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	97	97	[illegible]	[illegible]	92	91	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	81	[illegible]	[illegible]
28	97	97	[illegible]	[illegible]	92	91	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	84	[illegible]	81	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	97	95	94	92	91	90	[illegible]	[illegible]	[illegible]	84	[illegible]	81	80	[illegible]



12.0*	11.6*	11.2*	10.8*	10.4*	10.0*	9.6*	9.2*	8.8*	8.4*	8.0*	7.6*	7.2*	6.8*	6.4*	t_2
5.3	6.3	8.5	9.5	11.5	13.5	15.5	17.5	19.5	21.5	24.5	26.5	29.4	31.4	34.4	8*
7.3	9.3	10.5	12.5	14.5	16.5	17.5	19.5	21.5	24.5	26.5	28.4	31.4	33.4	36.4	9*
10.3	11.3	13.5	14.5	16.5	18.5	20.5	22.4	24.4	26.4	28.4	30.4	33.4	35.4	38.4	10*
12.4	14.4	15.4	17.4	18.4	20.4	22.4	24.4	26.4	28.4	30.4	32.4	35.4	37.4	40.3	11*
	16.4	17.4	19.4	21.4	22.4	24.4	26.4	28.4	30.4	32.4	34.4	37.3	39.3	42.3	12*
			21.4	23.4	25.4	26.4	28.4	30.4	32.4	34.3	36.3	39.3	41.3	43.3	13*
3.2				25.4	26.4	28.4	30.4	32.3	34.3	36.3	38.3	40.3	43.3	45.3	14*
	3.4				28.3	30.3	32.3	33.3	35.3	37.3	40.3	42.3	44.3	46.3	15*
10.9		**3.6**				31.3	33.3	35.3	37.3	39.3	41.3	43.3	45.3	48.3	16*
16.9	12.9		**3.8**				35.3	37.3	39.3	40.3	43.3	45.3	47.3	49.2	17*
20.8	17.8	13.9	9.9	**4.0**				38.3	40.3	42.3	44.3	46.2	48.2	50.2	18*
25.7	21.7	18.7	14.8	11.8	**4.2**				41.3	43.2	45.2	47.2	49.2	51.2	19*
29.6	26.7	22.7	19.7	16.8	13.8	**4.4**				44.2	46.2	48.2	50.2	53.2	20*
33.6	30.6	26.7	23.7	20.7	17.7	15.7	**4.6**				48.2	50.2	52.2	54.2	21*
36.6	33.6	30.6	27.6	24.7	22.7	19.7	16.7	**4.8**	**5.0**			51.2	53.2	55.2	22*
40.5	37.5	34.6	31.6	28.6	26.6	23.6	20.7	19.7	17.7	**5.2**	**5.4**			56.2	23*
43.5	40.5	37.5	34.5	32.6	29.6	26.6	24.6	23.6	21.7	18.7		**5.6**			
45.4	43.5	40.5	37.5	35.5	32.5	30.5	28.6	26.6	24.6	22.6	20.6		**5.8**		
48.4	46.4	43.5	40.5	38.5	36.5	33.5	31.5	29.5	27.6	25.6	23.6	21.6		**6.0**	
51.4	49.4	46.4	43.5	41.5	39.5	36.5	34.5	32.5	30.5	28.5	26.5	24.6	22.6		
47.4	44.5	41.5	39.5	36.5	34.5	32.6	29.6	27.6	25.6	23.6	21.6	19.7	17.7	15.7	0
49.4	47.4	44.4	42.4	39.5	37.5	35.5	32.5	30.6	28.6	26.6	24.6	22.6	20.6	18.6	1
51.4	49.4	46.4	44.4	42.5	39.5	37.5	35.5	33.5	31.5	29.5	27.6	25.6	23.6	22.6	2
53.4	51.4	49.4	46.4	44.4	42.4	40.5	38.5	36.5	34.5	32.5	30.5	28.5	26.5	25.6	3
55.3	53.4	51.4	48.4	46.4	44.4	42.4	40.4	38.4	36.5	34.5	33.5	31.5	29.5	28.5	4
57.3	55.3	52.3	50.4	48.4	46.4	44.4	42.4	40.4	39.4	37.4	35.5	33.5	32.5	30.5	5
58.3	56.3	54.3	52.3	50.3	48.4	46.4	44.4	43.4	41.4	39.4	37.4	36.4	34.4	33.5	6
60.3	58.3	56.3	54.3	52.3	50.3	48.3	46.4	45.4	43.4	41.4	40.4	38.4	36.4	35.4	7
61.3	59.3	57.3	56.3	54.3	52.3	50.3	48.3	47.3	45.3	43.4	42.4	40.4	39.4	37.4	8
63.2	61.3	59.3	57.3	55.3	53.3	52.3	50.3	48.3	47.3	45.4	44.4	42.4	41.4	39.4	9
64.2	62.2	60.3	58.3	57.3	55.3	53.3	52.3	50.3	48.3	47.3	45.3	44.3	42.4	41.4	10
65.2	63.2	61.2	60.2	58.2	56.3	55.3	53.3	52.3	50.3	49.3	47.3	46.3	44.3	43.3	11
66.2	64.2	62.2	61.2	59.2	58.2	56.2	55.3	53.3	52.3	50.3	49.3	47.3	46.3	44.3	12
67.2	66.2	64.2	63.2	61.2	59.2	57.2	56.2	55.3	53.3	51.3	50.3	49.3	47.3	46.3	13
68.2	67.2	65.2	63.2	62.2	60.2	59.2	57.2	56.2	54.2	53.3	51.3	50.3	49.3	47.3	14
69.2	67.2	66.2	64.2	63.2	61.2	60.2	58.2	57.2	55.2	54.2	53.2	51.3	50.3	49.3	15
70.2	68.2	67.2	65.2	64.2	62.2	61.2	59.2	58.2	57.2	55.2	54.2	53.2	51.2	50.2	16
71.1	69.2	68.2	67.2	65.2	63.2	62.2	61.2	59.2	58.2	56.2	55.2	54.2	53.2	52.2	17
72.1	70.1	69.2	67.2	66.2	64.2	63.2	62.2	60.2	59.2	58.2	56.2	55.2	54.2	53.2	18
72.1	71.1	69.1	68.1	66.2	65.2	64.2	62.2	61.2	60.2	59.2	57.2	56.2	55.2	54.2	19
73.1	72.1	70.1	69.1	67.1	66.1	65.2	63.2	62.2	61.2	60.2	58.2	57.2	56.2	55.2	20
74.1	72.1	71.1	69.1	68.1	67.1	65.2	64.2	63.2	62.2	60.2	59.2	58.2	57.2	56.2	21
74.1	73.1	71.1	70.1	69.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.2	61.2	60.2	59.2	58.2	57.2	22
75.1	73.1	72.1	71.1	69.1	68.1	67.1	66.1	65.1	63.1	62.1	61.1	60.2	59.2	58.2	23
75.1	74.1	73.1	71.1	70.1	69.1	68.1	67.1	65.1	64.1	63.1	62.1	61.1	60.1	59.1	24
76.1	75.1	73.1	72.1	70.1	70.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1	62.1	60.1	59.1	25
77.1	75.1	74.1	73.1	71.1	70.1	69.1	68.1	67.1	65.1	64.1	63.1	62.1	61.1	60.1	26
77.1	76.1	74.1	73.1	72.1	71.1	70.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1	62.1	61.1	27
77.1	76.1	75.1	74.1	72.1	71.1	70.1	69.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1	62.1	28
77.1	76.1	75.1	75.1	73.1	72.1	71.1	70.1	68.1	67.1	66.1	65.1	64.1	63.1	62.1	29

mm	β	H'	T + t	A	Engl. Maass.	mm	Fahr.	Cels.
	mm	m		m				
760	0,12	0	0°	18393	21''	533,4	0°	— 17,77°
55	12	56	1	430	22	558,8	10	— 12,22
50	12	112	2	467	23	584,2	20	— 6,66
45	12	168	3	503	24	609,6	30	— 1,11
40	12	225	4	540	25	635,0	32	0,00
735	12	284	5	18577	26	660,4	34	1,11
30	12	340	6	614	27	685,8	36	2,22
28	12	363	7	651	28	711,2	38	3,33
26	12	387	8	687	29	736,6	40	4,44
24	12	410	9	724	30	762,0	42	5,55
722	12	433	10	18761	Par.		44	6,66
20	12	457	11	798	Maass.		46	7,77
18	11	480	12	835	18''	487,3	48	8,88
16	11	504	13	871	19	514,3	50	10,00
14	11	527	14	908	20	541,4	52	11,11
712	11	551	15	18945	21	568,5	54	12,22
10	11	575	16	982	22	595,5	56	13,33
08	11	599	17	19019	23	622,6	58	14,44
06	11	623	18	055	24	649,7	60	15,55
04	11	647	19	092	25	676,7	62	16,66
702	11	671	20	19129	26	703,8	64	17,77
00	11	694	21	166	27	730,9	66	18,88
695	11	755	22	203	28	758,0	68	20,00
90	11	816	23	239	1'''	2,3	70	21,11
85	11	878	24	276	2	4,5	72	22,22
680	11	939	25	19313	3	6,8	74	23,33
75	11	1002	26	350	4	9,0	76	24,44
70	11	1064	27	387	5	11,3	78	25,55
65	11	1128	28	423	6	13,5	80	26,66
60	11	1191	29	460	7	15,8	82	27,77
655	10	1206	30	19497	8	18,0	84	28,88
50	10	1320	31	534	9	20,3	86	30,00
45	10	1386	32	571	10	22,6	88	31,11
40	10	1451	33	607	11	24,8	90	32,22
35	10	1518	34	644			92	33,33
					Réaum.	Cels.		
630	10	1584	35	19681			94	34,44
25	10	1652	36	718	1°	1,25°	96	35,55
20	10	1719	37	755	2	2,50	98	36,66
15	10	1788	38	791	3	3,75	100	37,77
10	10	1857	39	828	4	5,00	120	48,88
605	10	1926	40	19865	5	6,25	140	60,00
600	10	1996	41	902	6	7,50	160	71,11
550	09	2731	42	939	7	8,75	180	82,22
500	08	3536	43	975	8	10,00	200	93,33
400	06	5420	44	20012	9	11,25	212	100,00

Für die Bedeutung von β ist 273, für H' und A aber 275 zu vergleichen.
Für Glas-Scalen ist β um circa 1 % zu vermehren.

Alphabetisches Register.

(Die Nummern beziehen sich, mit Ausnahme der eingeklammerten, auf die Sätze und nicht auf die Seiten.)

HANDBUCH

der

Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie.

Von

Dr. Rudolf Wolf,
Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

In zwei Bänden.

Erster Band.

Zürich.
Druck und Verlag von Friedrich Schulthess.
1870.

